

# 理论力学

绪

论

# 一、理论力学的研究对象和内容

理论力学：是研究物体机械运动一般规律的学科。

机械运动：是物体在空间的位置随时间的变化。

理论力学的内容：

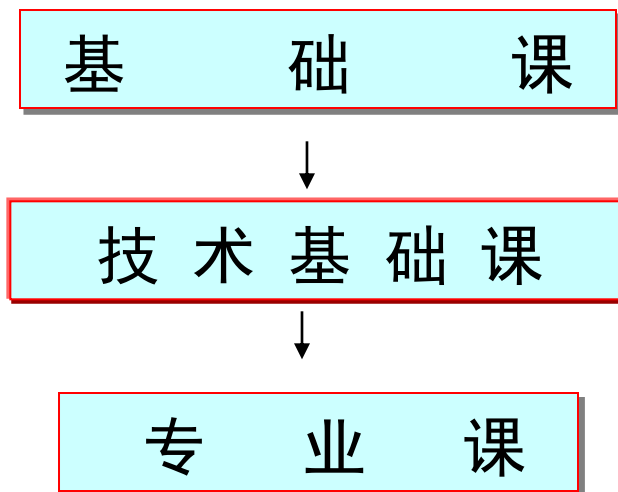
静力学：研究物体在力系作用下的平衡规律，同时也研究力的一般性质和力系的简化方法等。

运动学：研究物体运动的几何性质，而不研究引起物体运动的原因。

动力学：研究受力物体的运动与作用力之间的关系。

## 二、理论力学的任务

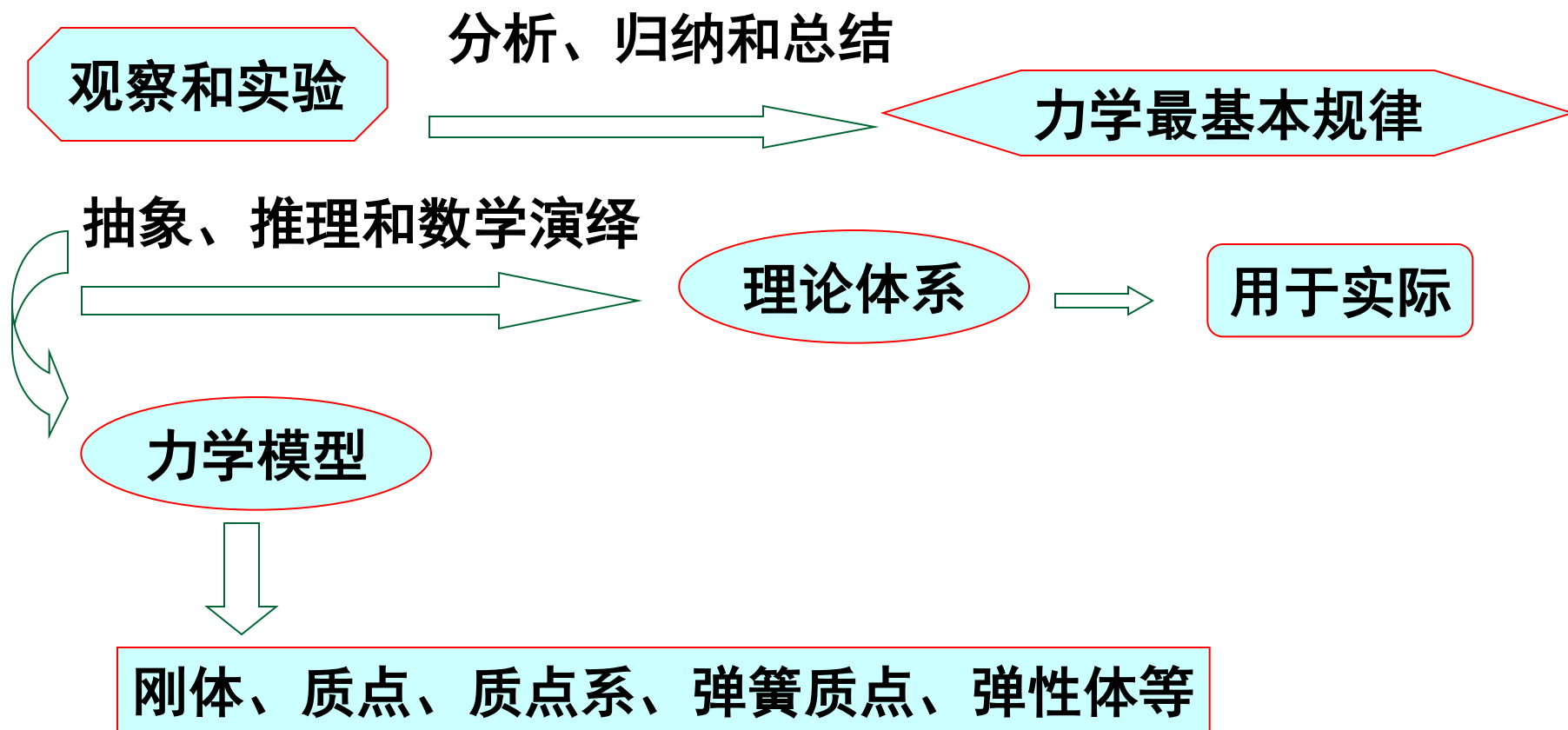
### 1、理论力学是一门理论性较强的技术基础课



### 2、理论力学是很多专业课程的重要基础

例如：材料力学、机械原理、机械零件、结构力学、弹性力学、流体力学、机械振动等一系列后续课程的重要基础。

### 三、理论力学的研究方法





# 引言

静力学是研究物体在力系作用下平衡规律的科学。

力系：是指作用在物体上的一群力。

平衡：是指物体相对于惯性参考系（地面）  
**保持静止**或作匀速直线运动的状态。

静力学主要研究：

- 1、物体的受力分析；
- 2、力系的等效替换（简化）；
- 3、力系的平衡条件及其应用。

平衡力系：使物体处于平衡的力系。

# 《静力学》

# 静力学基本概念

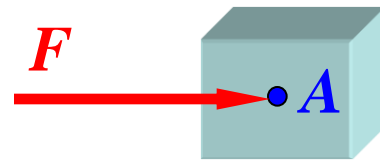
## 一、力的概念

1、定义：力是物体间的相互机械作用，这种作用可以改变物体的运动状态。

2、力的效应：①运动效应(外效应——理论力学研究)  
②变形效应(内效应——材料力学研究)

3、力的三要素：大小，方向，作用点

力是矢量，其表示方法



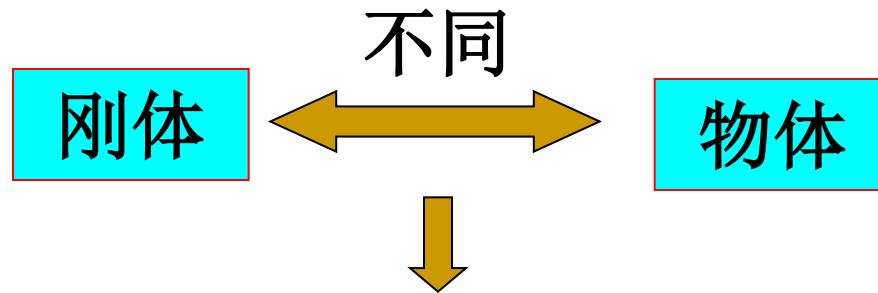
力的单位： 国际单位制： 牛顿(N) 、 千牛顿(kN)

## 二、刚 体

刚体就是在力的作用下，大小和形状都不变的物体。

绝对刚体不存在，但研究力的外效应时可将变形体看成刚体。研究力的内效应前也将物体看成刚体。

刚体内部任意两点间的距离始终不变。



一些基本公理和定理只对刚体成立，对可变形的物体不成立。

# 理论力学

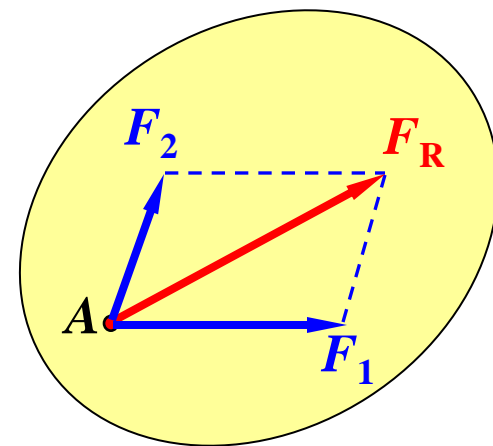
## 第一章 静力学公理 和物体的受力分析

## § 1-1 静力学公理

公理：是人类经过长期实践和经验而得到的结论，它被反复的实践所验证，是无须证明而为人们所公认的结论。

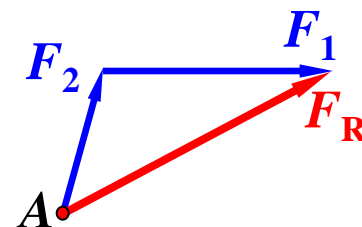
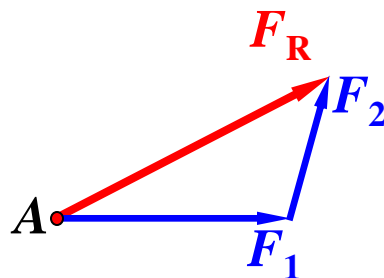
### 公理1 力的平行四边形法则

作用于**物体**上同一点的两个力可合成为一个合力，此合力也作用于该点，合力的大小和方向由这两个力为邻边所构成的平行四边形的对角线来确定。



即：合力为原两力的矢量和。

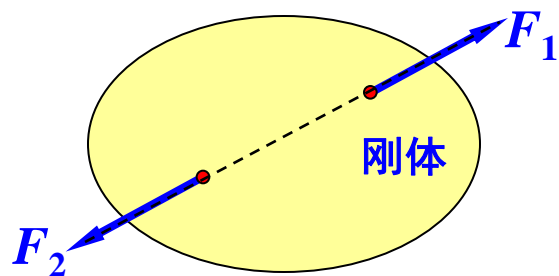
$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad \text{力三角形}$$



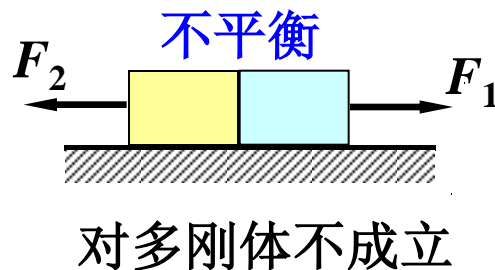
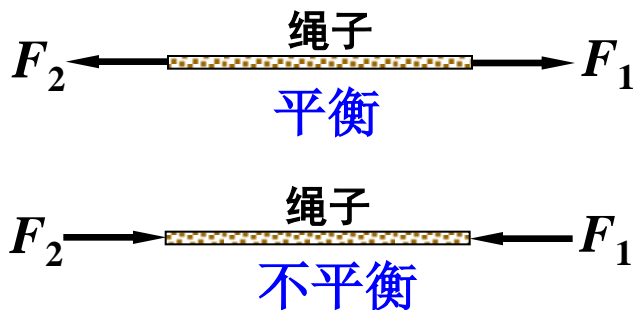
## 公理2 二力平衡条件

作用于**同一刚体**上的两个力，使刚体保持平衡的必要与充分条件是：这两个力

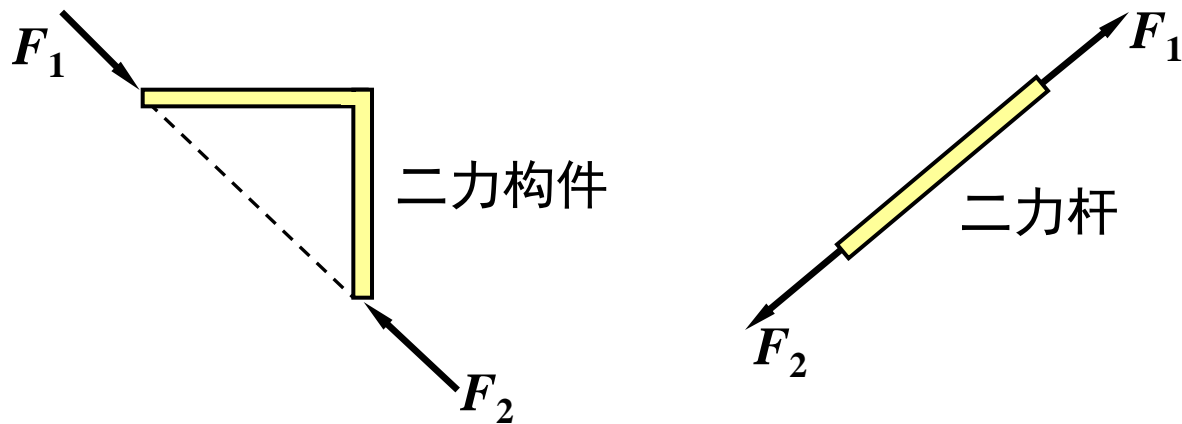
**大小相等**  $|F_1| = |F_2|$   
**方向相反**  $F_1 = -F_2$  (矢量)  
**且在同一直线上。**



说明：①对刚体来说，上面的条件是充要的；  
②对变形体来说，上面的条件只是必要条件。



③**二力构件**：只在**两个力**作用下**平衡的刚体**叫二力构件。



注意：二力构件是不计自重的。

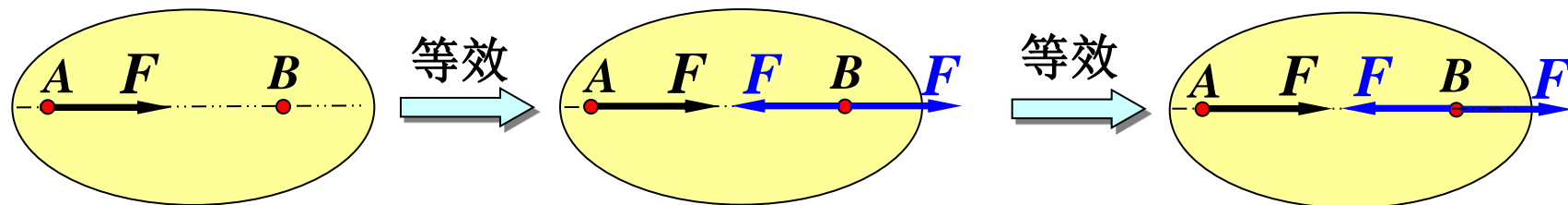
### 公理3 加减平衡力系原理

在已知的**任意力系**上加上或减去任意一个平衡力系，并不改变原力系对**刚体**的作用。



## 推论1：力的可传性

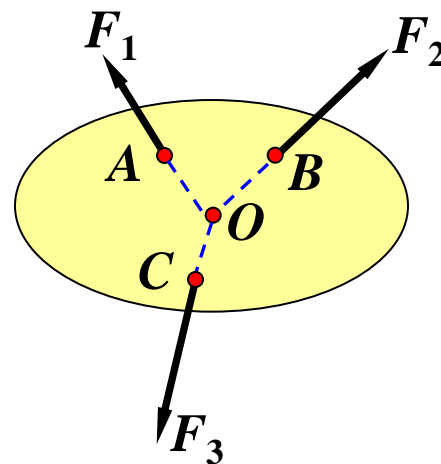
作用于**刚体**上的力可沿其作用线移到**同一刚体内**的任一点，而不改变该力对刚体的作用效应。



因此，对刚体来说，力作用三要素为：**大小，方向，作用线**

## 推论2：三力平衡汇交定理

**刚体**受三力作用而平衡，若其中两力作用线汇交于一点，则另一力的作用线必汇交于同一点，且三力的作用线共面。**(特殊情况下，力在无穷远处汇交——平行且共面。)**

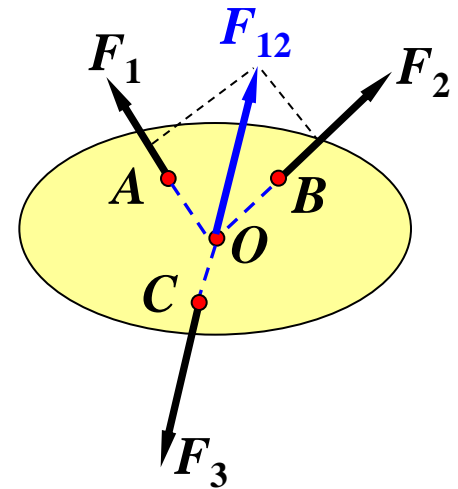


[证]  $\because F_1, F_2, F_3$  为平衡力系,

$\therefore F_{12}, F_3$  也为平衡力系。

又  $\because$  二力平衡必等值、反向、共线,

$\therefore$  三力  $F_1, F_2, F_3$  必汇交, 且共面。

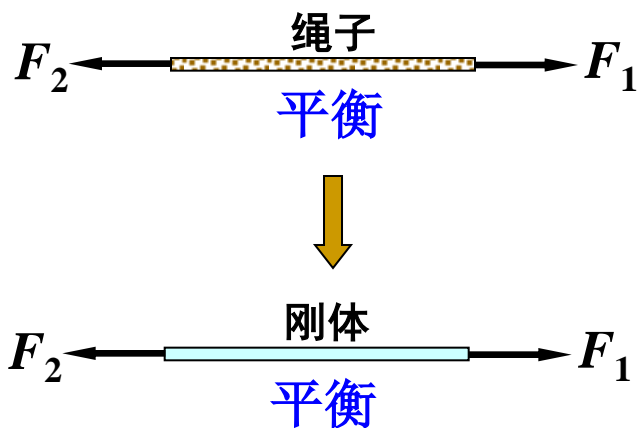


## 公理4 作用和反作用定律（牛顿第三定律）

两物体相互间的作用力总是同时存在, 且等值、反向、共线, 分别作用在两个物体上。

## 公理5 刚化原理

变形体在某一力系作用下处于平衡，若将此变形体变成刚体（刚化为刚体），则平衡状态保持不变。



公理5告诉我们：处于平衡状态的变形体，可用刚体静力学的平衡理论。

## § 1-2 约束和约束力

### 一、概 念

**自由体：**位移不受限制的物体叫自由体。

**非自由体：**位移受限制的物体叫非自由体。

工程中的绝大多数物体为非自由体。其位移受到周围物体的限制。我们称起限制作用的周围物体为约束体。

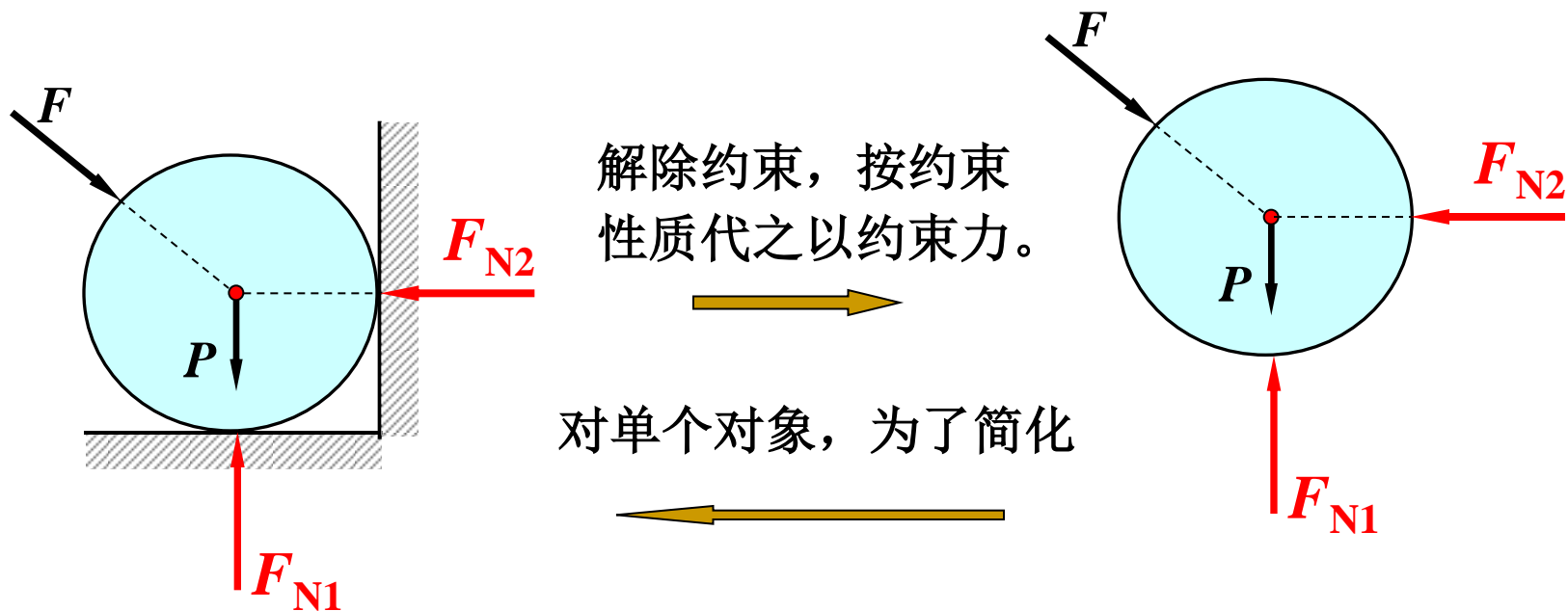
**约 束：**由约束体构成，对非自由体的某些位移起限制作用的条件。工程中的约束总是以接触的方式构成的。

**约束力：**约束给被约束物体的力叫约束力。（也称约束反力）

## 约束力的特点:

约束力 {

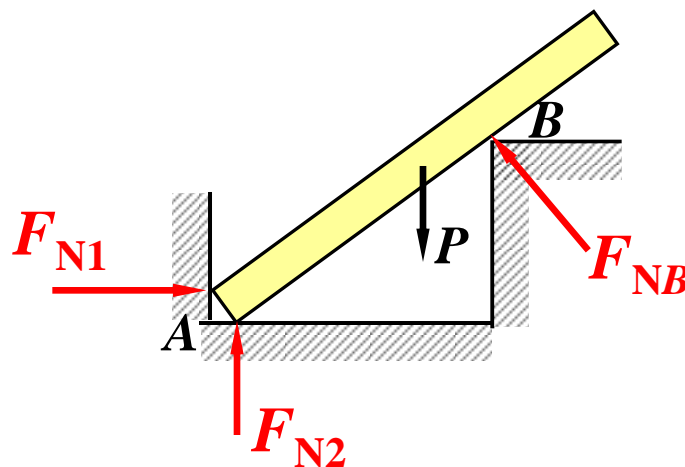
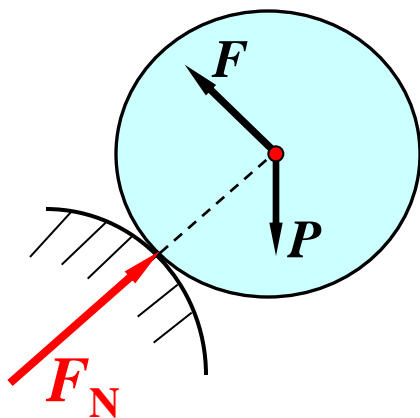
- 大小——待定
- 方向——与该约束所能阻碍的位移方向相反
- 作用点——接触处

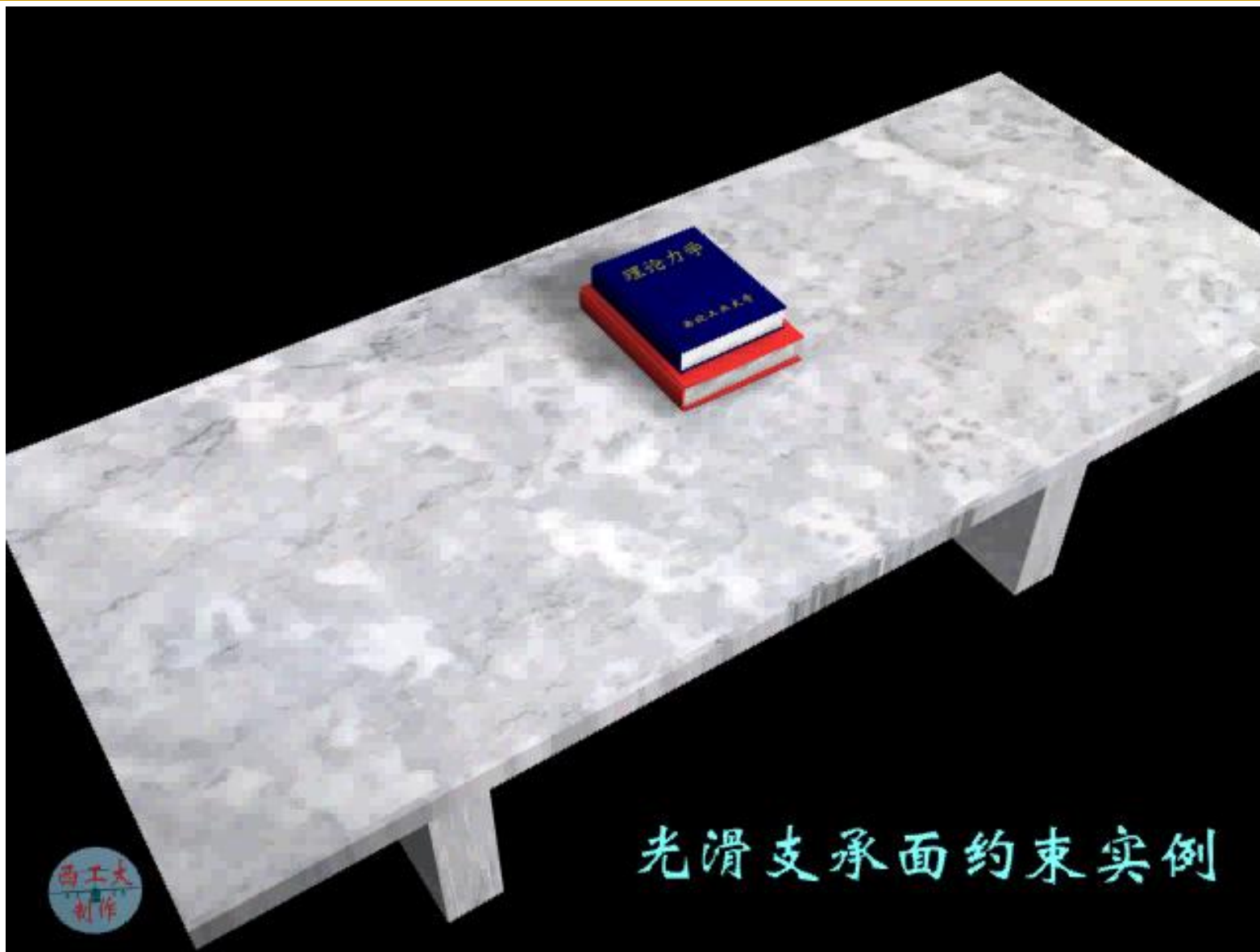


## 二、约束类型和确定约束力方向的方法

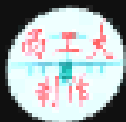
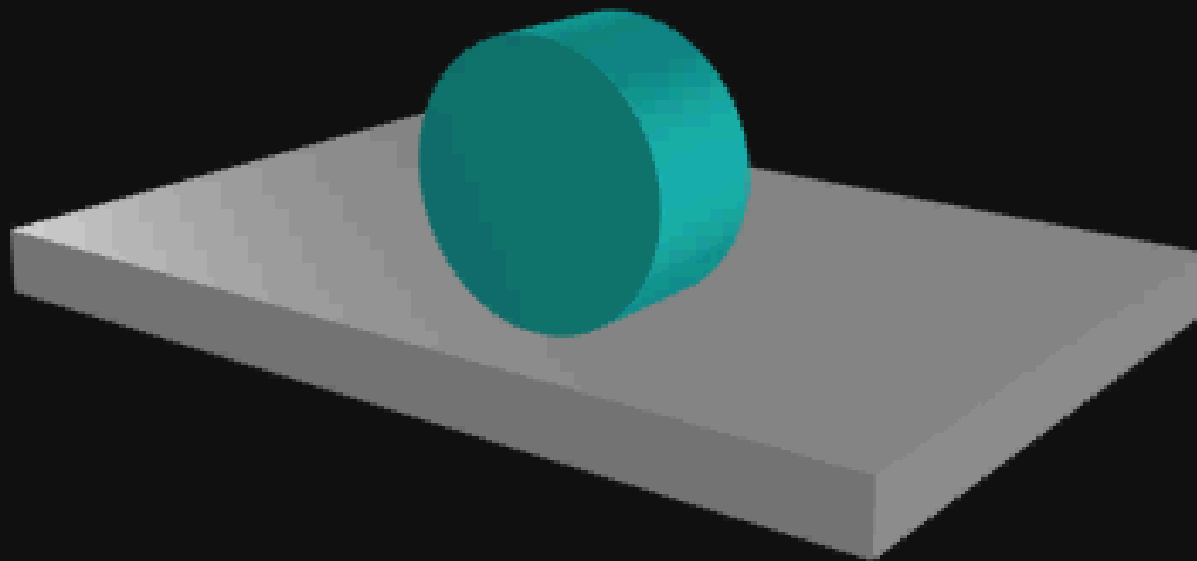
### 1、光滑接触面的约束：光滑约束（光滑指摩擦不计）

约束力**作用在接触点处**，方向沿接触面的**公法线并指向受力物体**，也称为法向约束力，通常用 $F_N$ 表示。



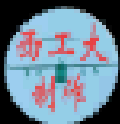
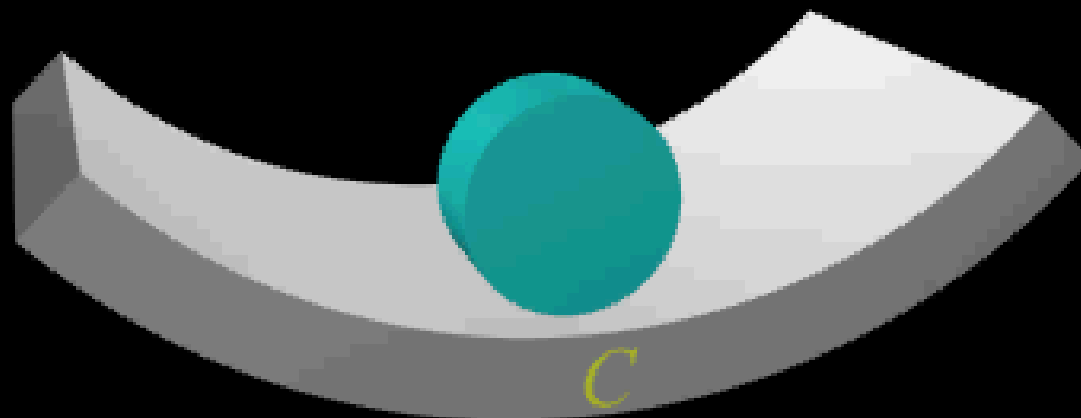


# 光滑接触面约束

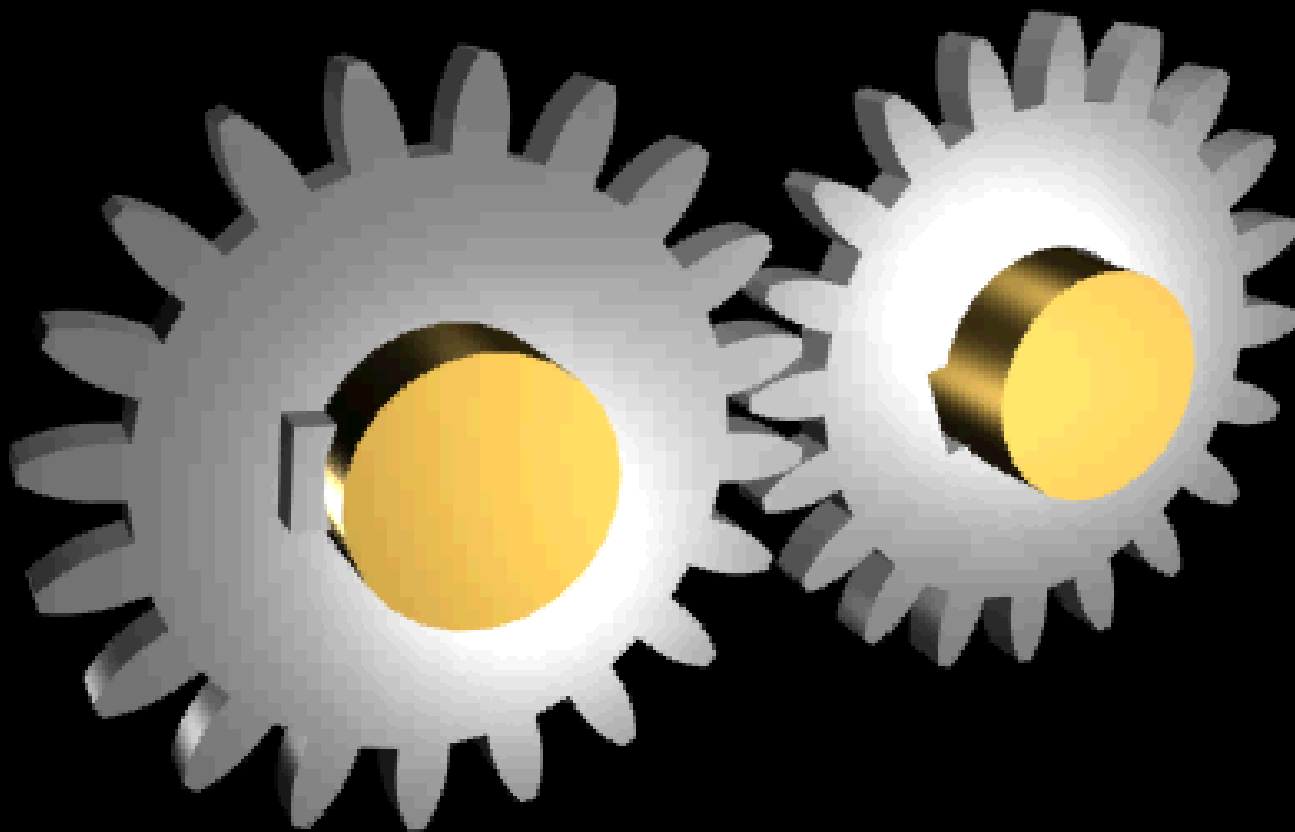


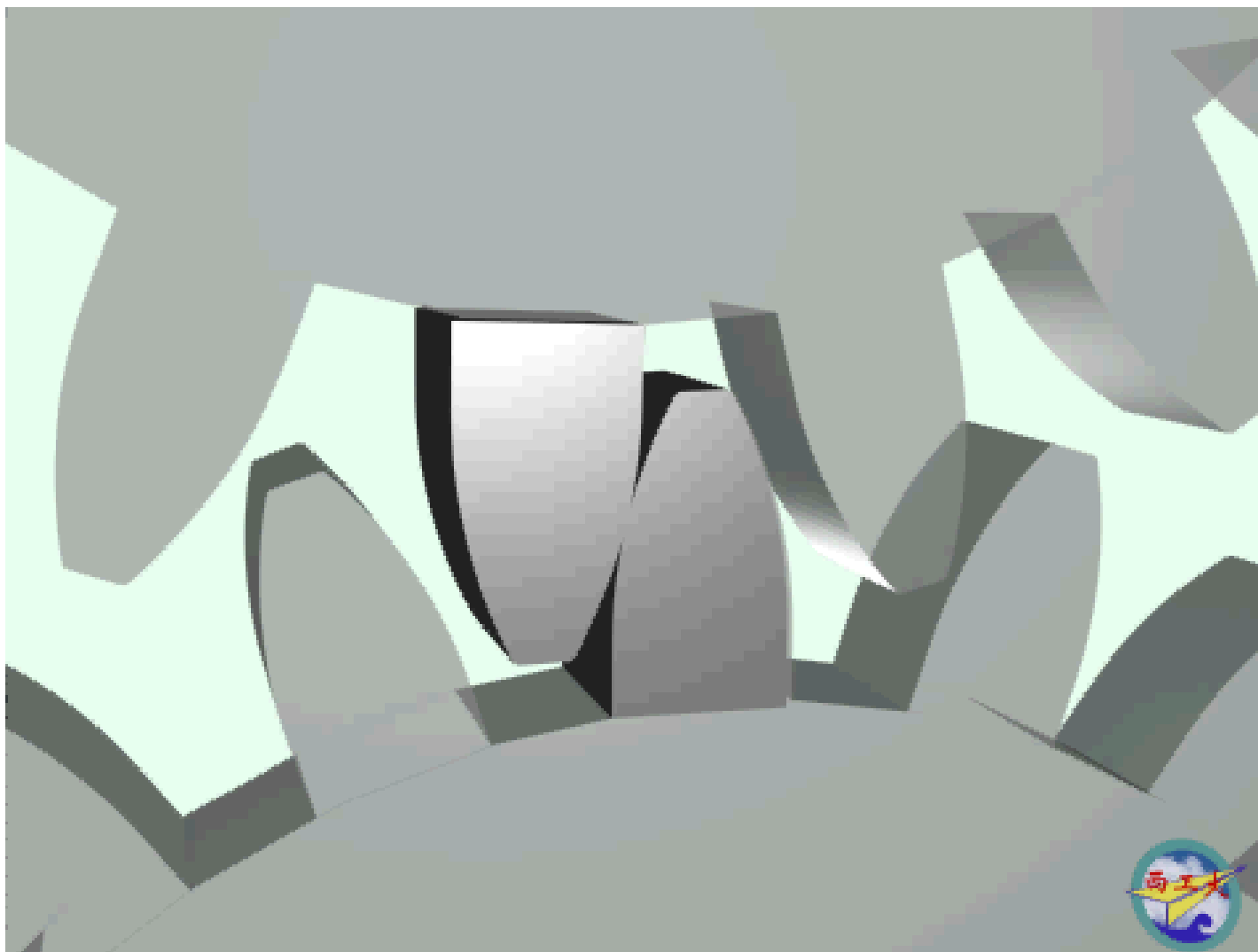


# 光滑接触面约束

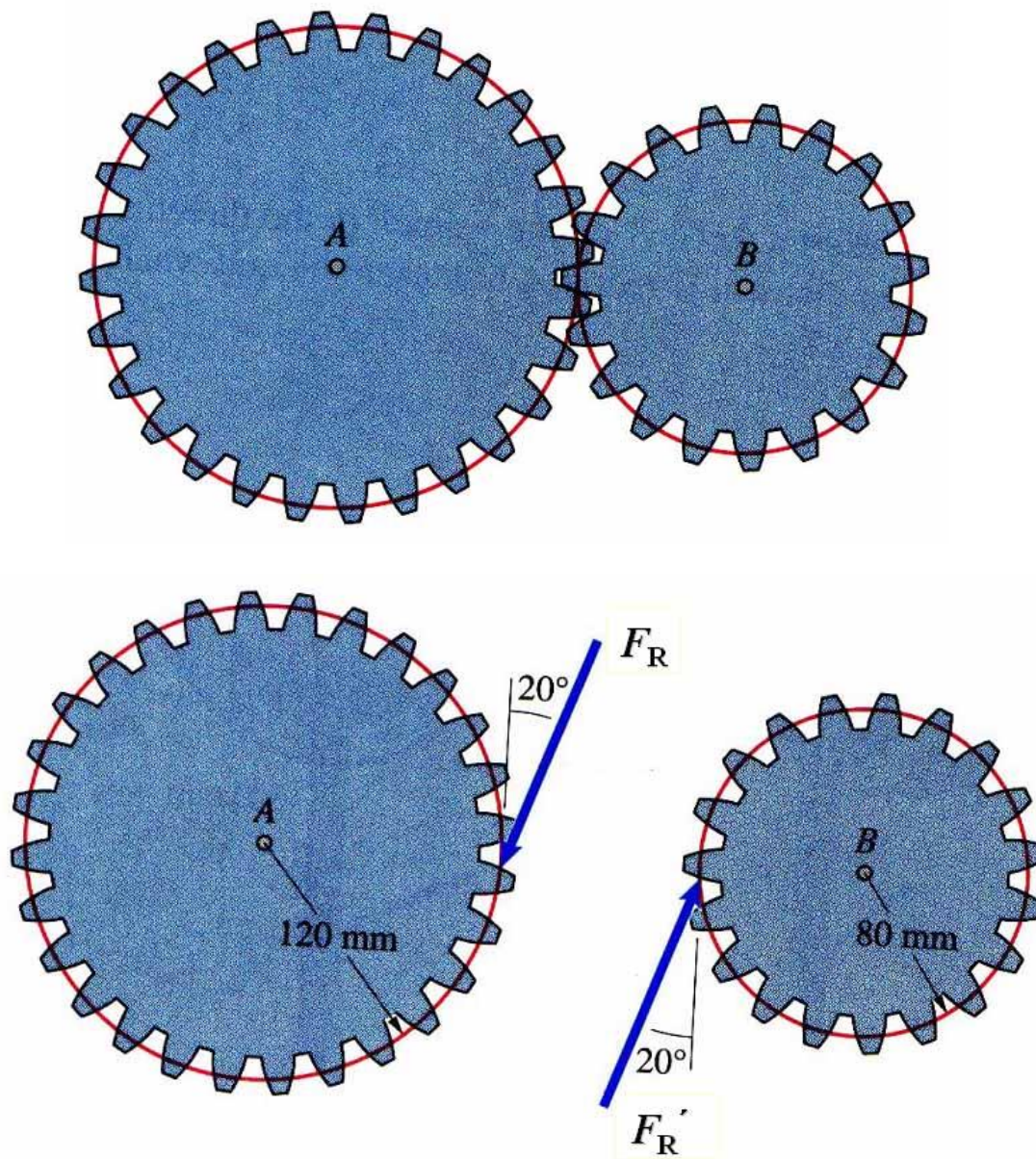


## 光滑接触面约束实例



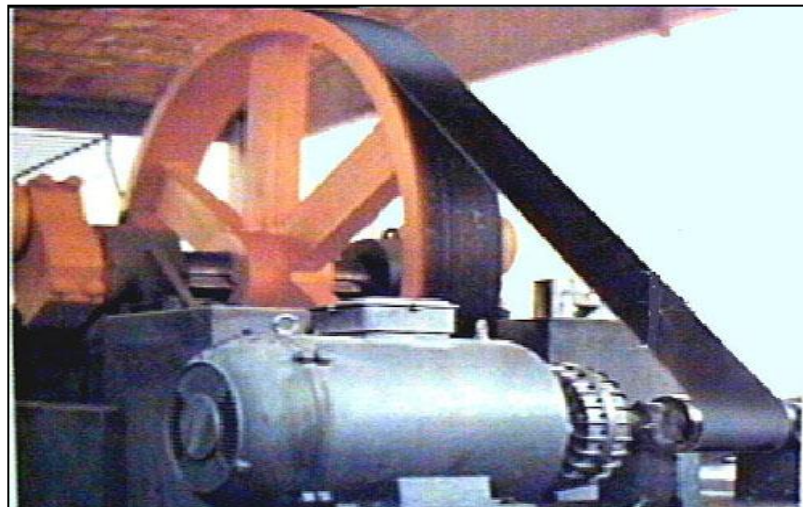
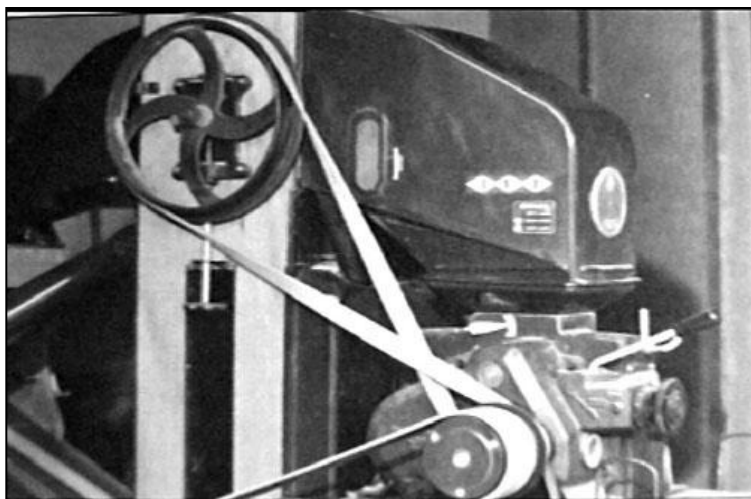
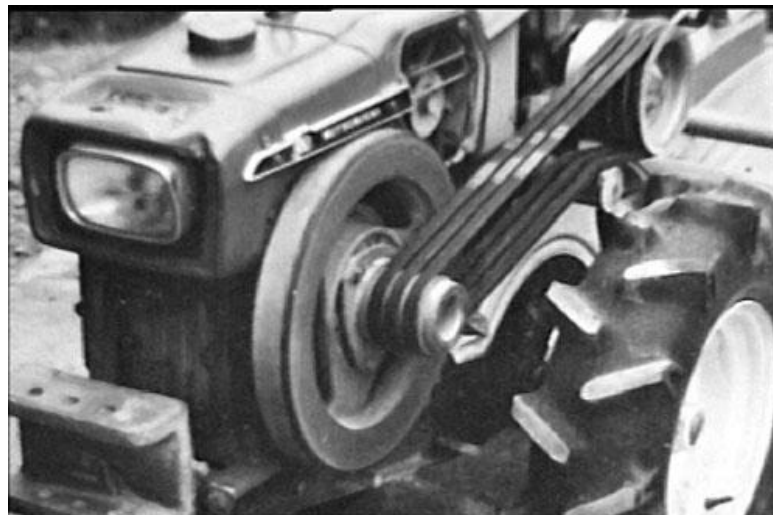


节圆

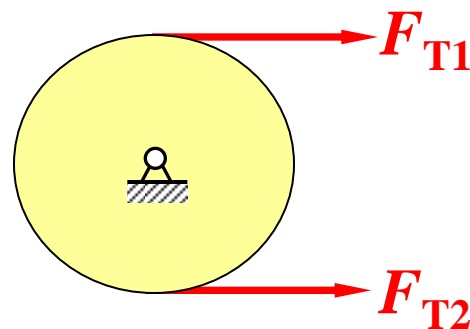
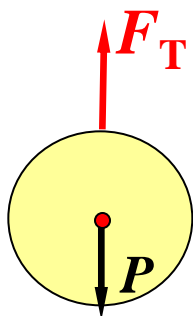
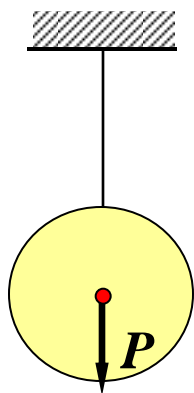


压力角

## 2、由柔软的绳索、链条或皮带构成的约束：柔性约束



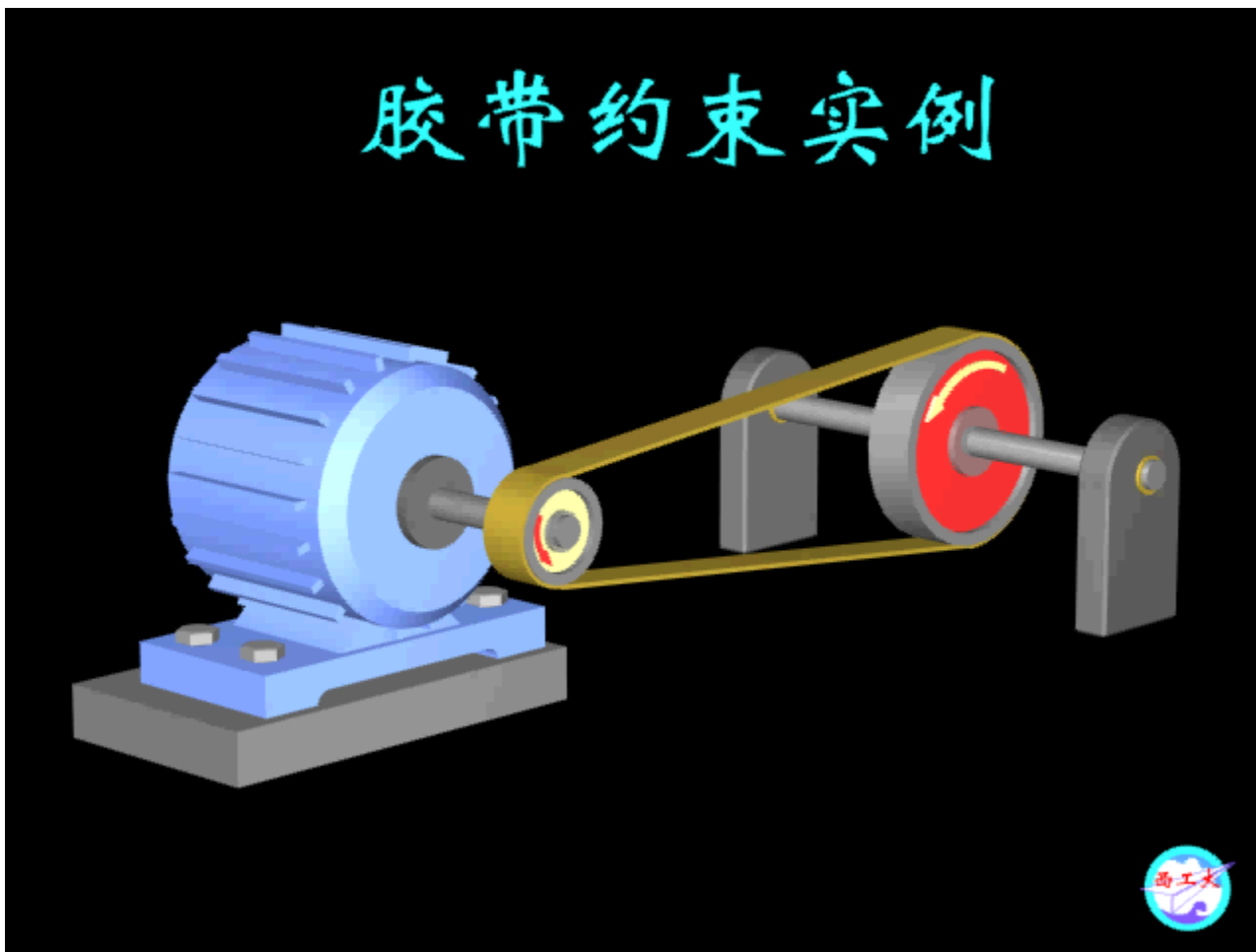
柔性体**只能受拉**，所以它们的约束力是**作用在接触点**，  
方向**沿柔性体轴线而背离物体**。通常用 $F_T$ 表示。



不能称为二力构件

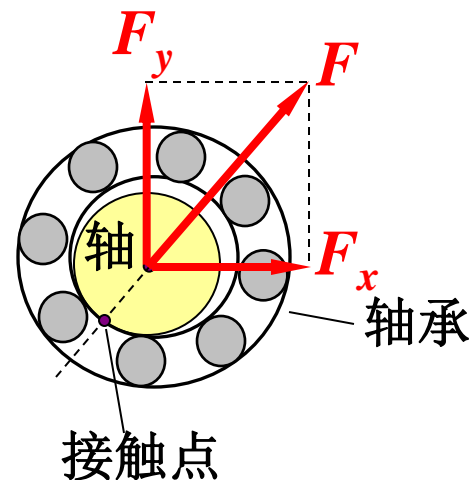


# 胶带约束实例



### 3、光滑铰链约束（向心轴承、圆柱铰链、固定铰链支座等）

#### （1）向心轴承（径向轴承）

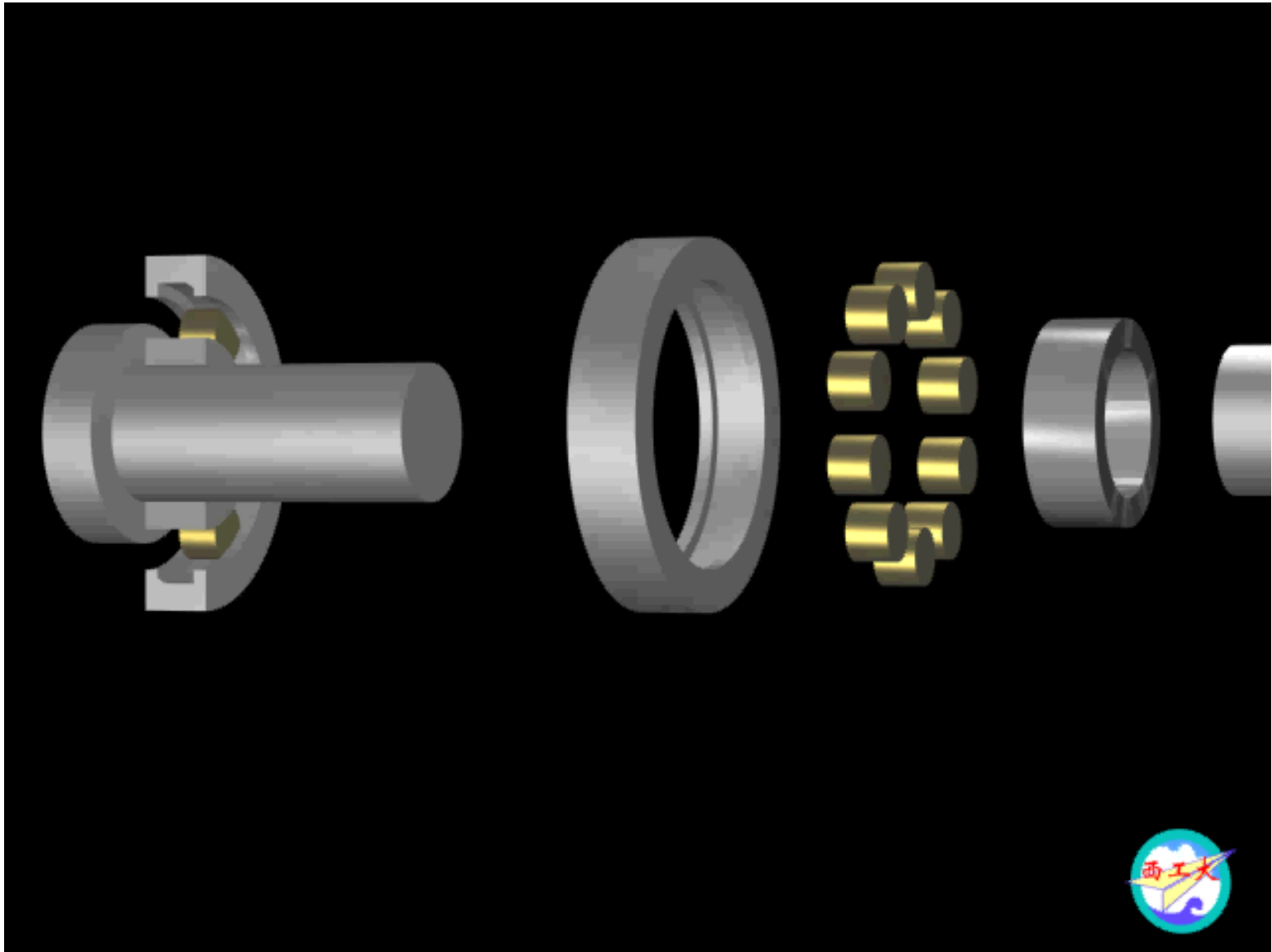


约束特点：

轴在轴承孔内，轴为非自由体、 轴承孔为约束。

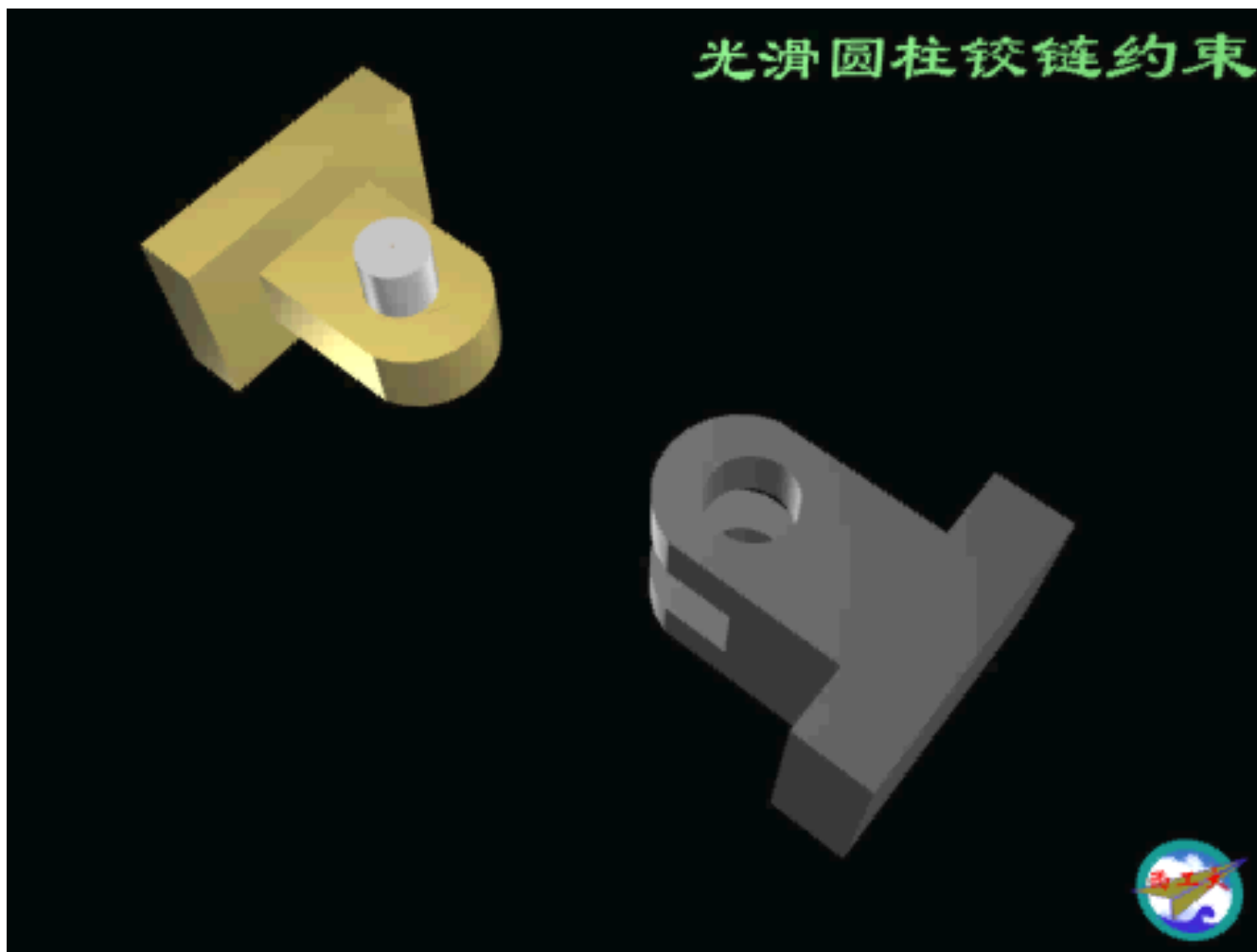
约束力：当不计摩擦时，轴与孔在接触处为光滑接触约束——**法向约束力**，约束力作用在接触处，沿径向指向轴心。

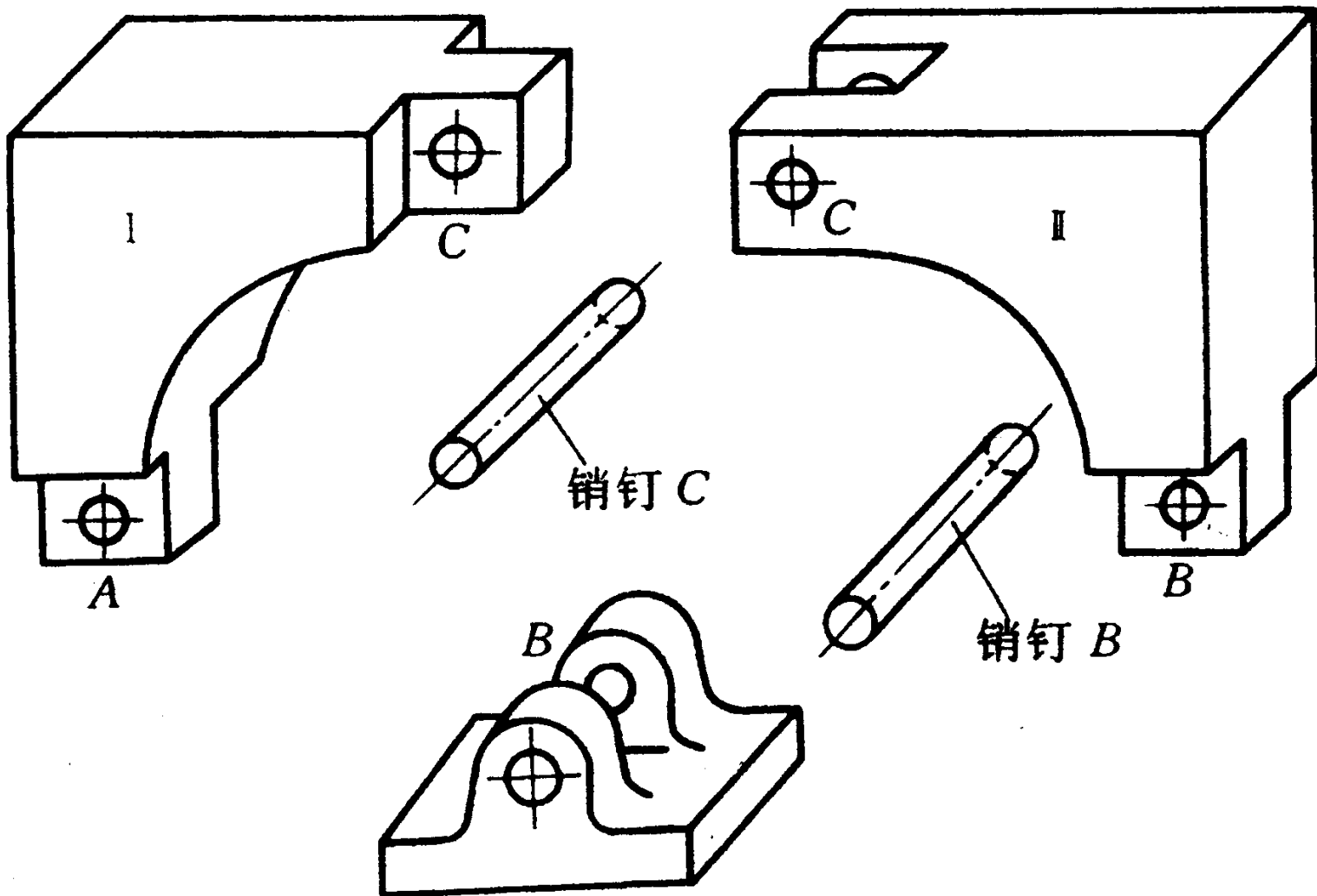


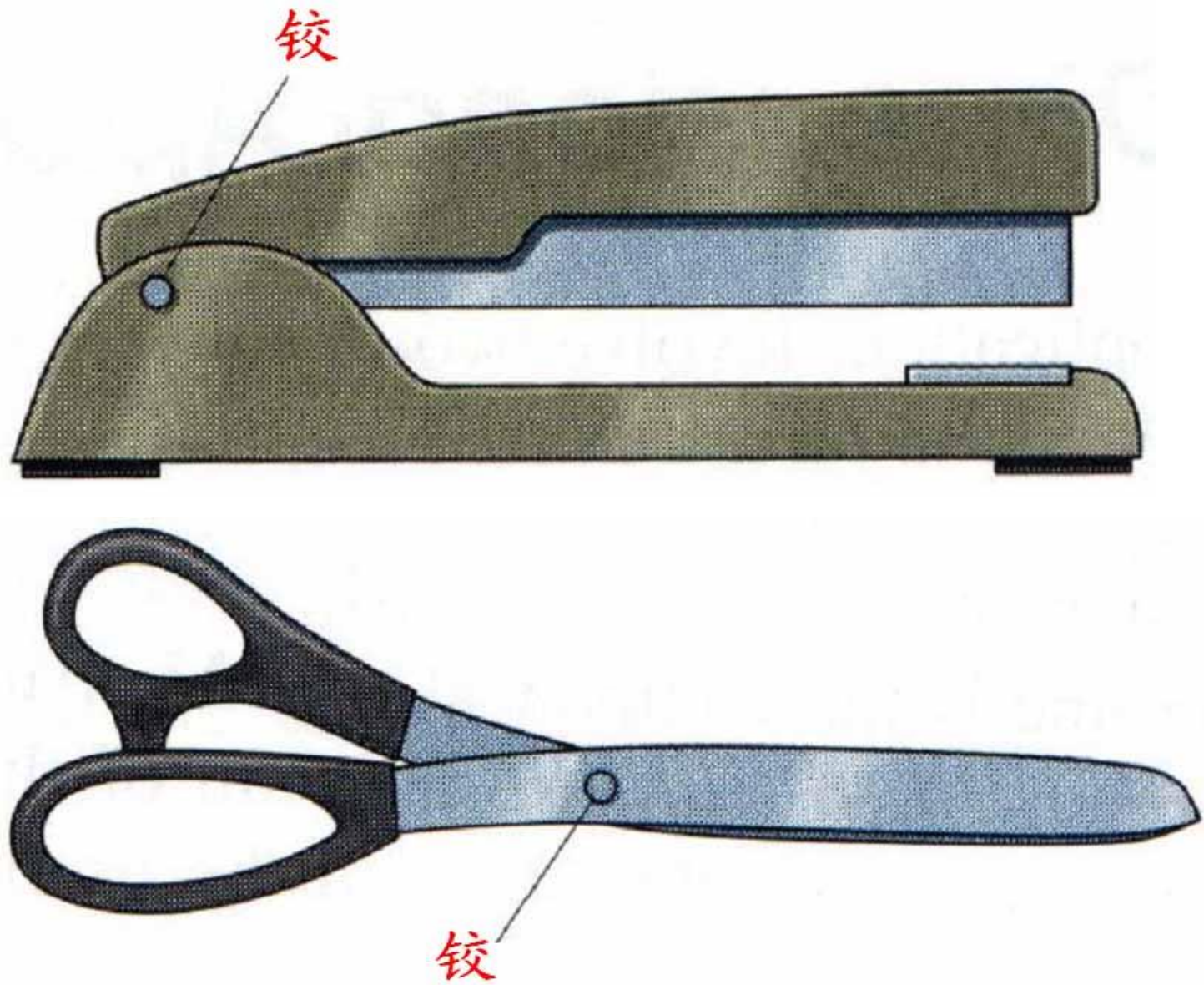


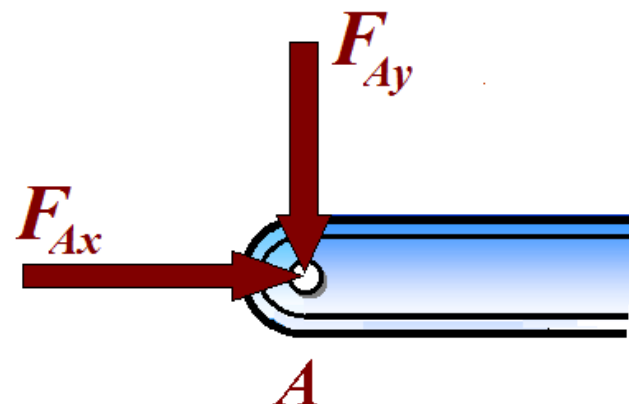
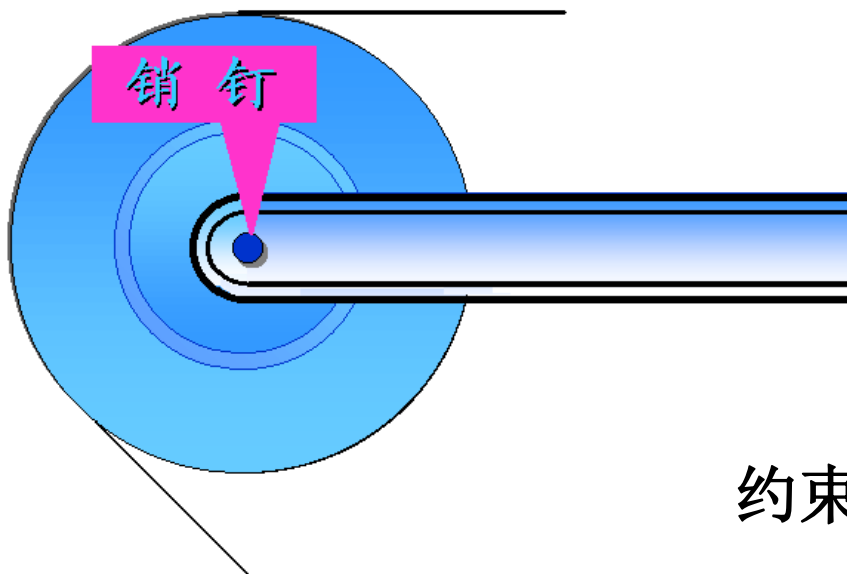
## (2) 光滑圆柱铰链

约束特点：由两个各穿孔的构件及圆柱销钉组成。

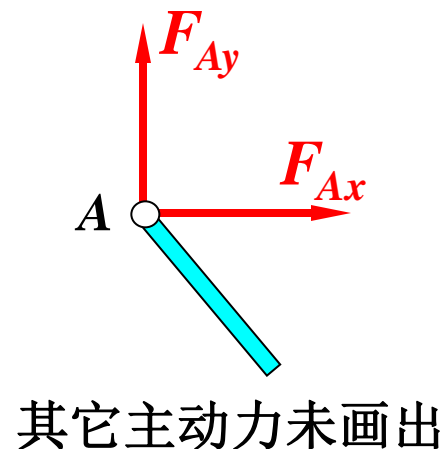
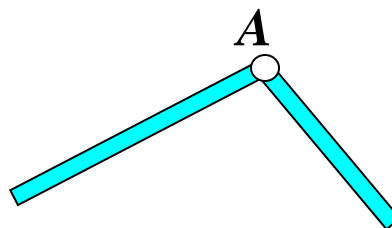
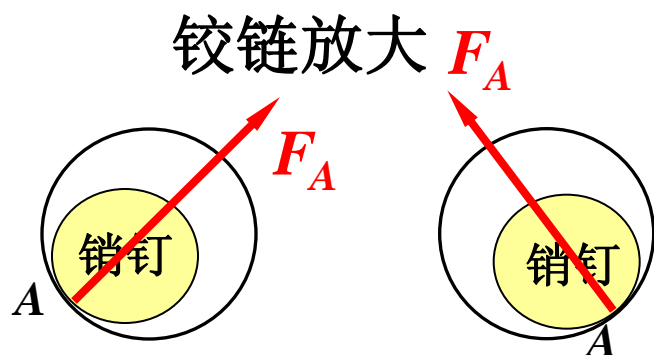






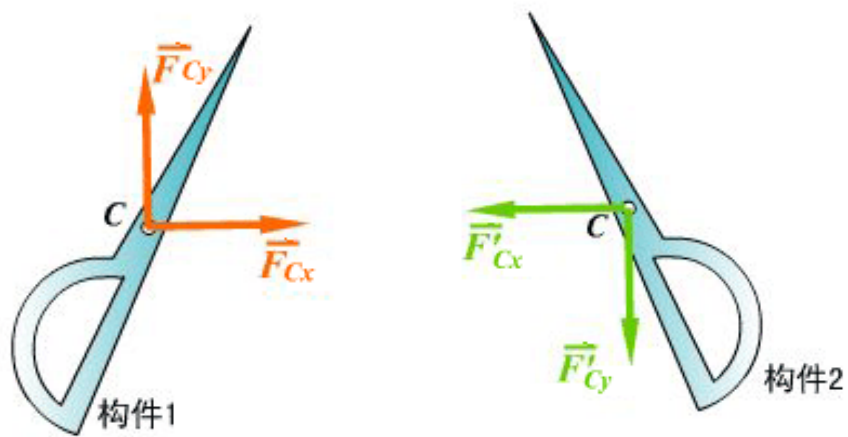


约束力指向未定



光滑圆柱铰链约束力： 亦为孔与轴的配合问题，与轴承一样，可用两个正交分力表示。

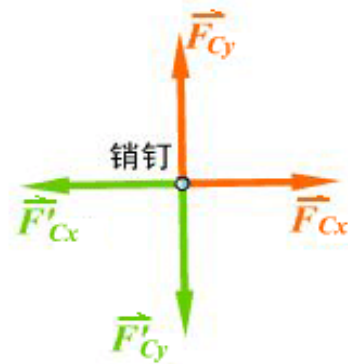
铰链约束力可用两个正交分力表示。



其中有作用反作用关系

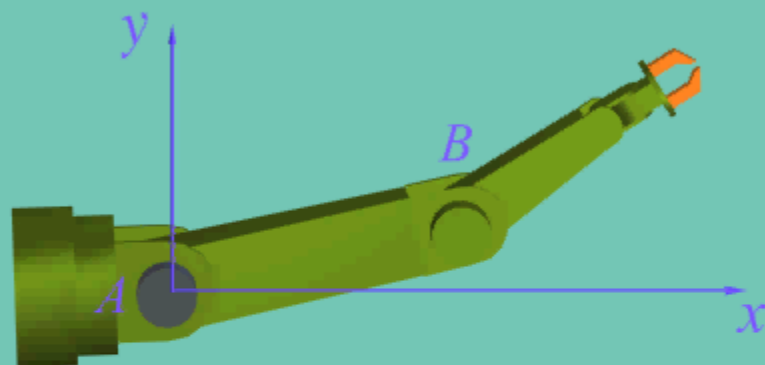
$$\vec{F}_{Cx} = -\vec{F}'_{Cx} , \quad \vec{F}_{Cy} = -\vec{F}'_{Cy}$$

一般不必单独分析销钉受力，当要分析时，必须把销钉单独取出。





## 光滑圆柱铰链约束实例——蝶铰

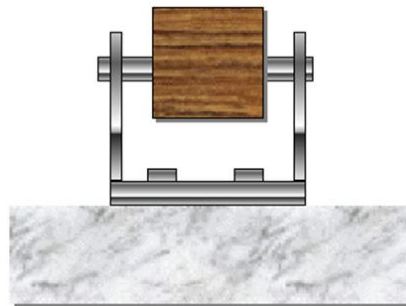
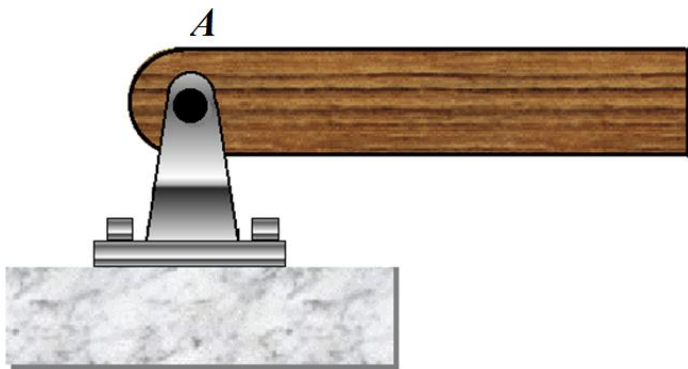


## 圆柱铰链约束实例

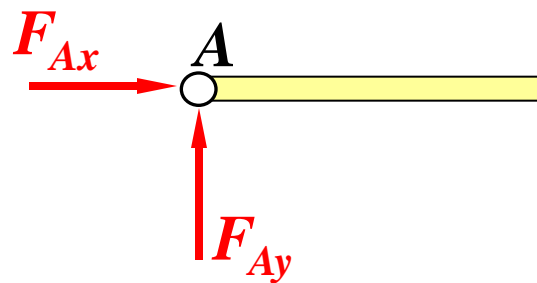
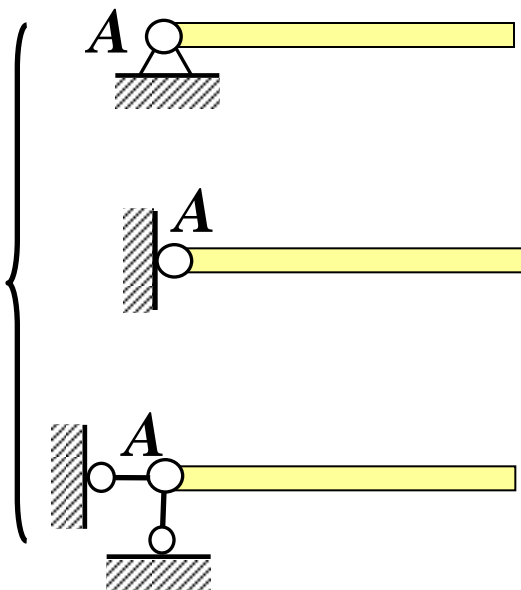




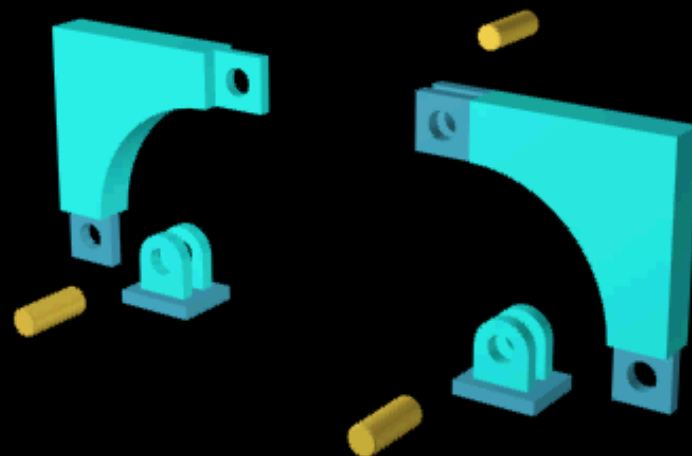
### (3) 固定铰链支座 (其中一个构件固定在地面)



简化图



## 圆柱铰链和固定铰链支座



# 固定铰链支座

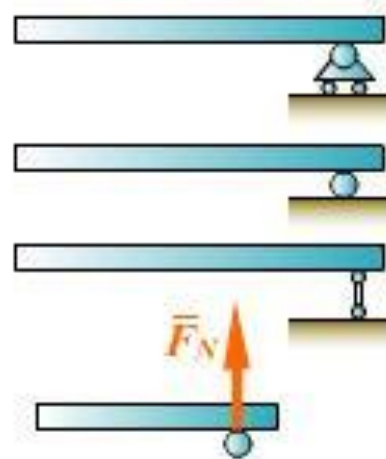


## 4、其它类型约束

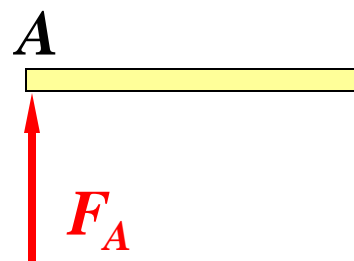
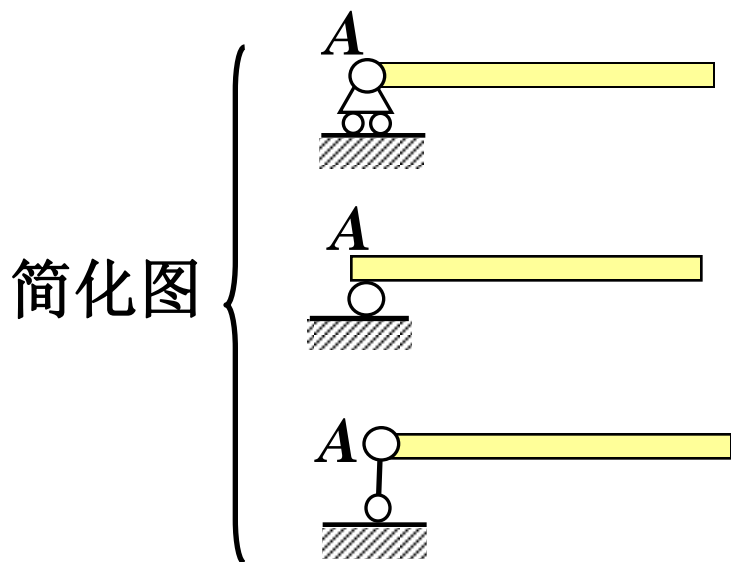
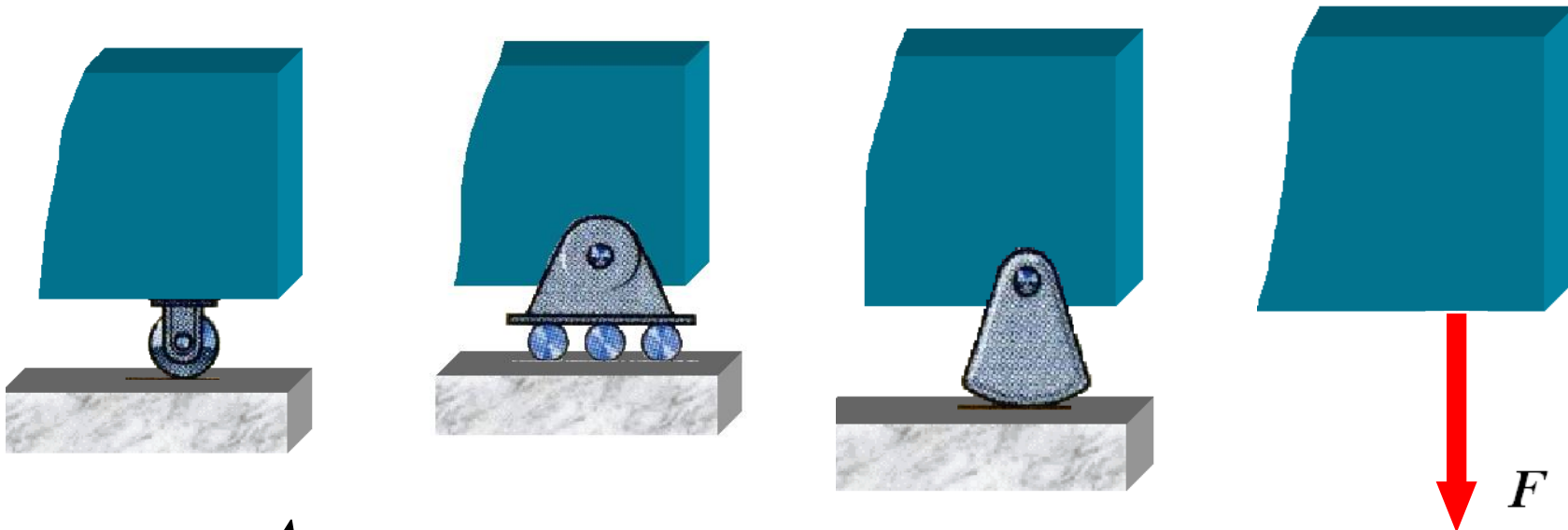
### (1) 滚动支座(活动铰支座、辊轴支座)

约束特点：在上述固定铰支座与光滑固定平面之间装有光滑辊轴而成。

约束力：构件受到垂直于光滑面的约束力。

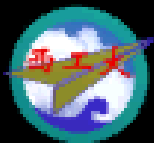
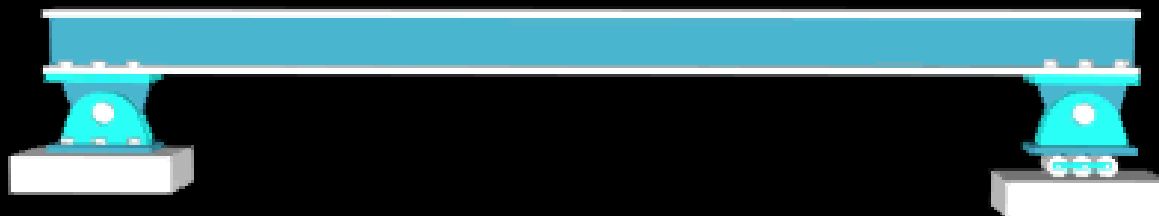


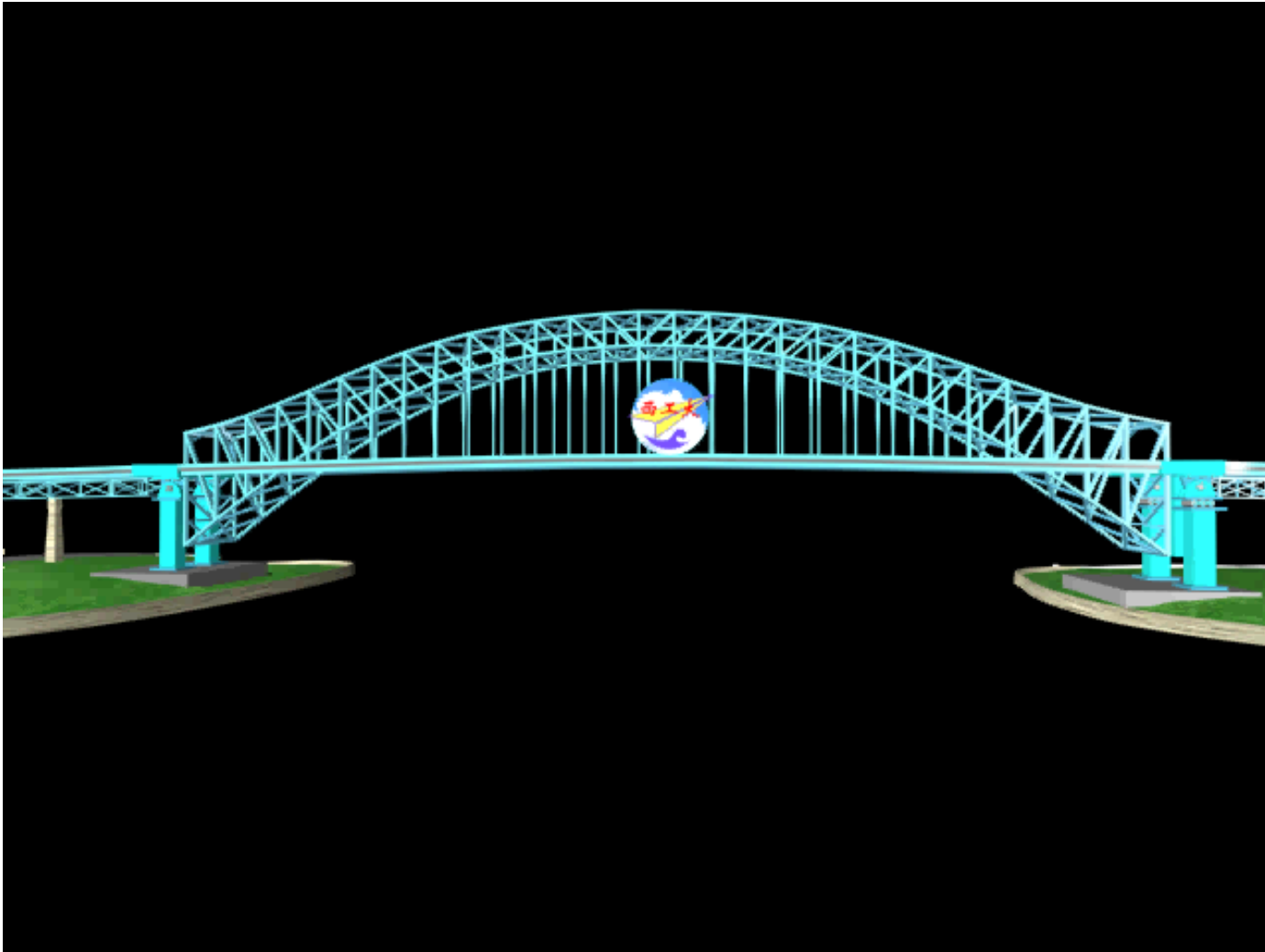
## (滚动) 活动铰支座 (辊轴支座)



$F$ 的实际方向也可以向下

# 活动铰链支座



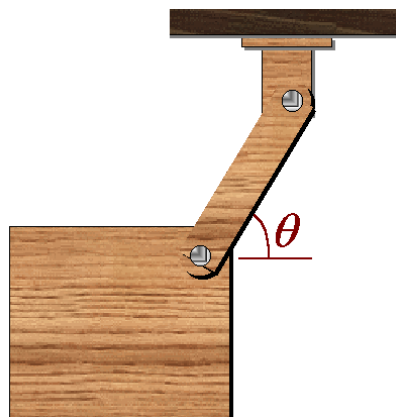
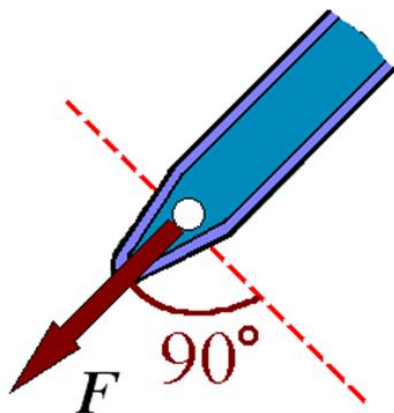
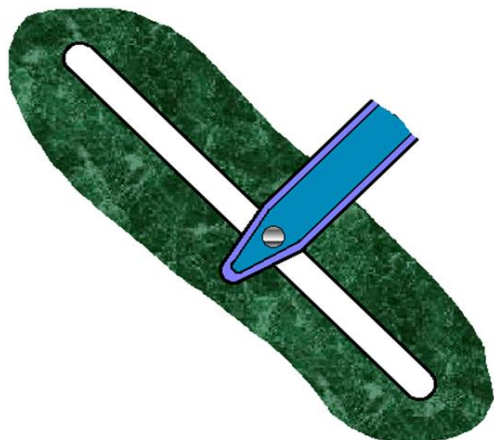


# 注意其它构件和销钉连接有不同的约束形式

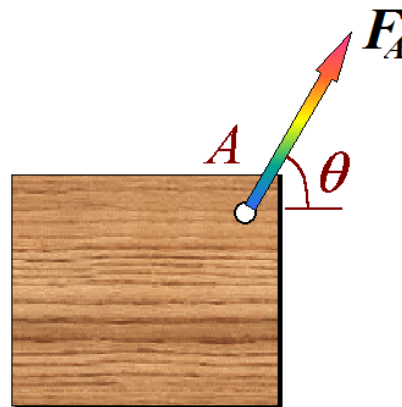
滑槽与销钉  
(双面约束)



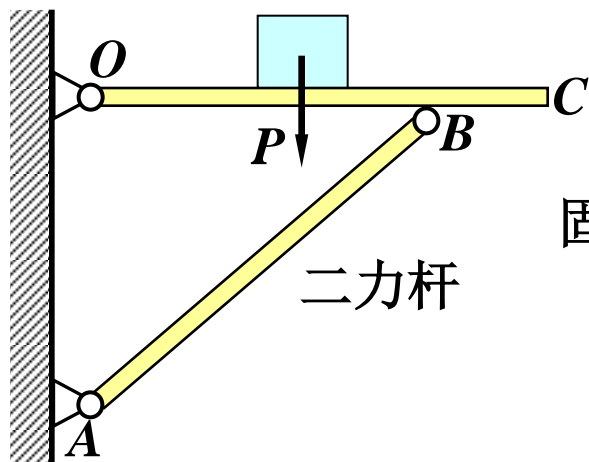
属于双面光滑约束



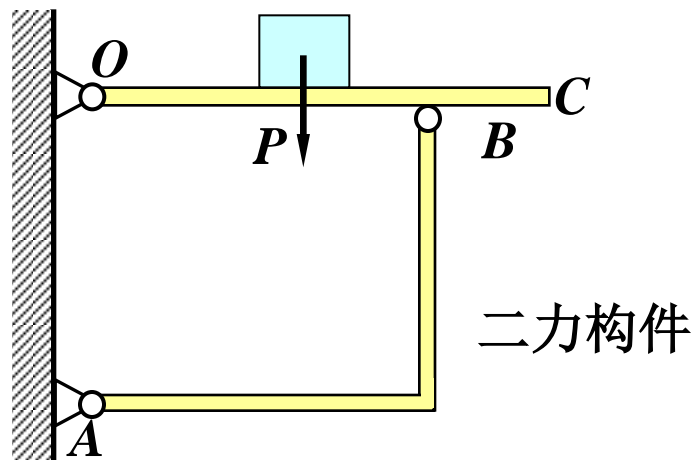
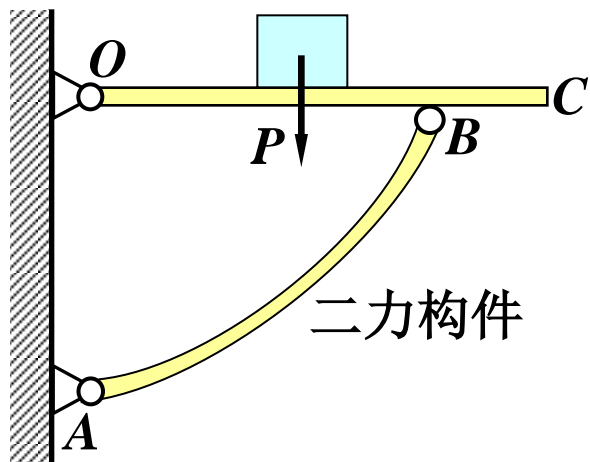
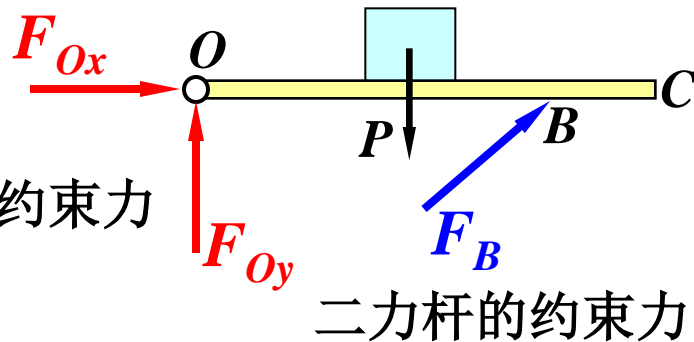
二力构件作为一种约束，其约束力沿两点连线方向。



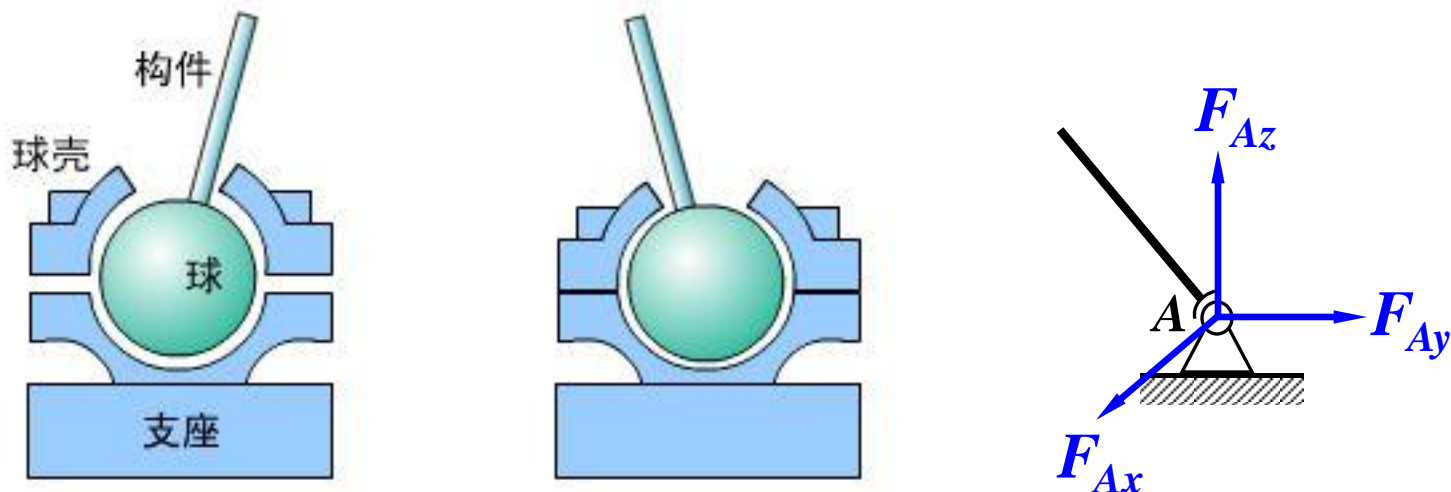




固定铰的约束力



## (2) 球铰链



**约束特点：**通过球与球壳将构件连接，构件可以绕球心任意转动，但构件与球心不能有任何移动。

**约束力：**当忽略摩擦时，球与球座亦是光滑约束问题。约束力通过接触点，并指向球心，是一个不能预先确定的空间力，可用三个正交分力表示。



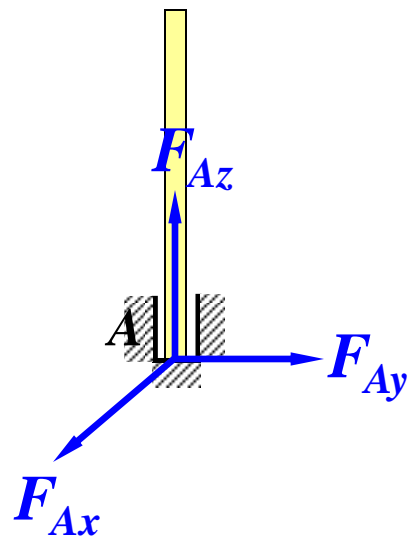
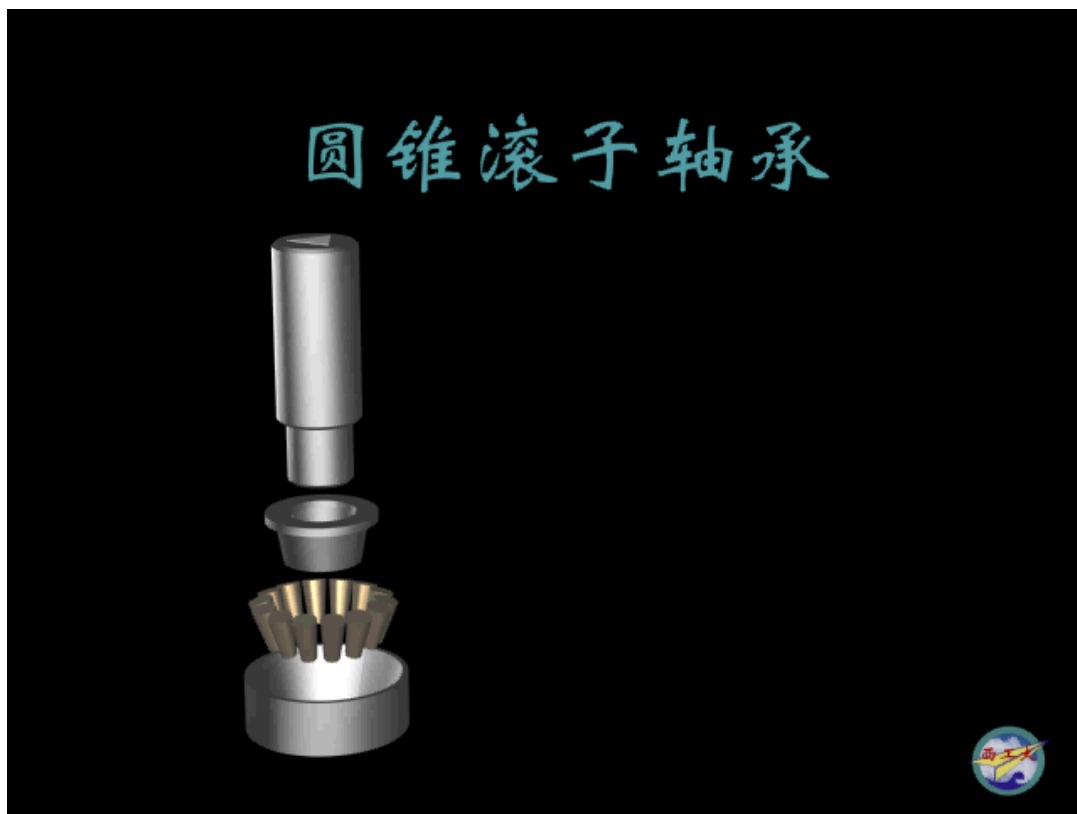
球铰约束结构以及  
约束力与示意简图

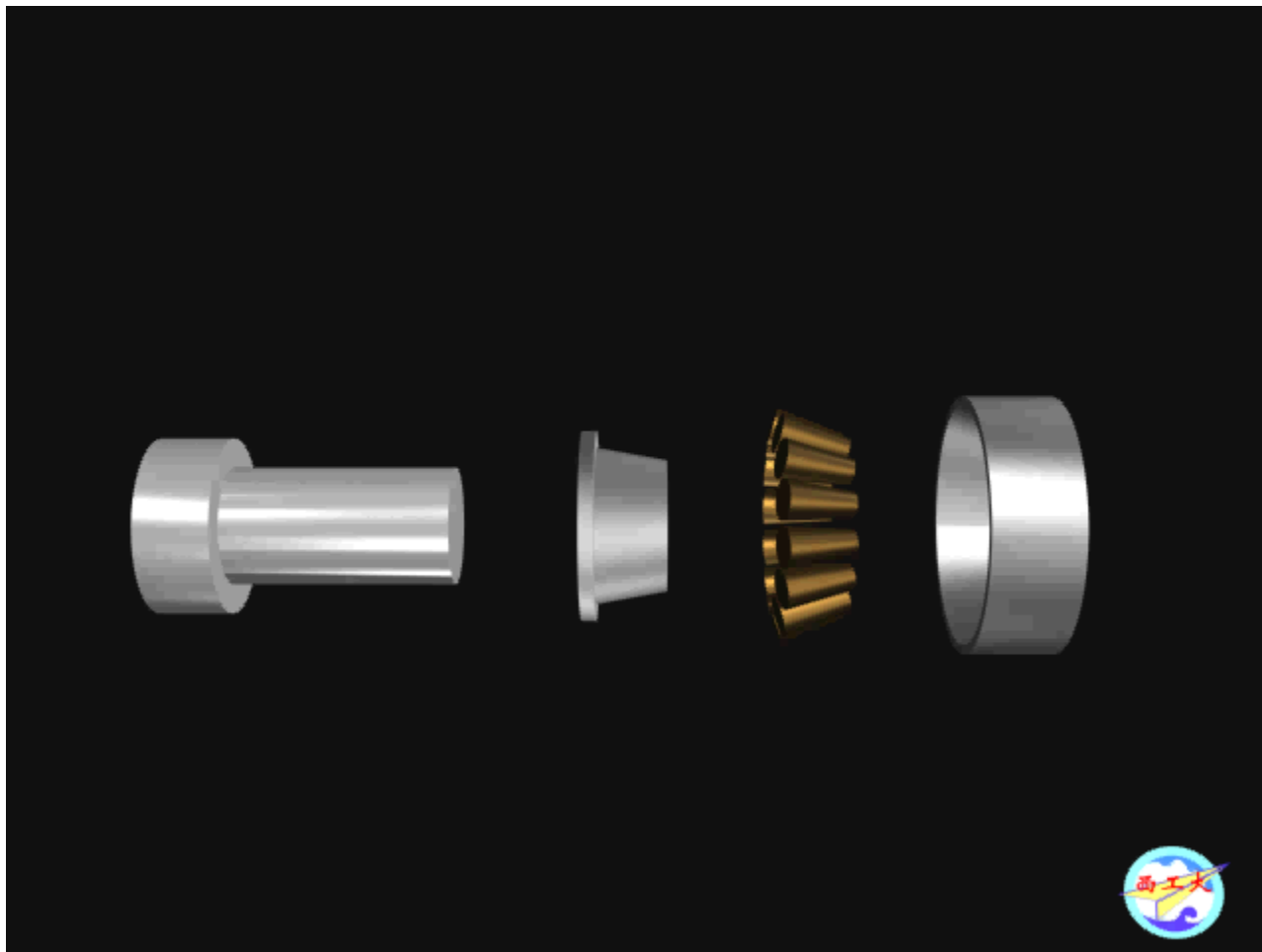


### (3) 止推轴承（圆锥轴承）

约束特点：止推轴承比径向轴承多一个轴向的位移限制。

约束力：比径向轴承多一个轴向的约束力，亦有三个正交分力  $F_{Ax}$ ， $F_{Ay}$ ， $F_{Az}$ 。





## § 1-3 物体的受力和受力图

### 一、受力分析

解决力学问题时，首先要选定需要进行研究的物体，即选择**研究对象**，然后根据已知条件，约束类型并结合基本概念和公理分析它的受力情况，这个过程称为物体的**受力分析**。

作用在物体上的力有两类：

一类是主动力，如重力，风力，气体压力等。

主动力通常称为**载荷**。

二类是被动力，即约束力。

# 载荷的分类

集中载荷

集中载荷：载荷的作用范围很小，可忽略不计。

分布载荷

分布载荷：载荷作用在整个物体或某一部分上。

体载荷

体载荷：载荷作用在整个体积上。

面载荷：载荷作用在整个面积上。

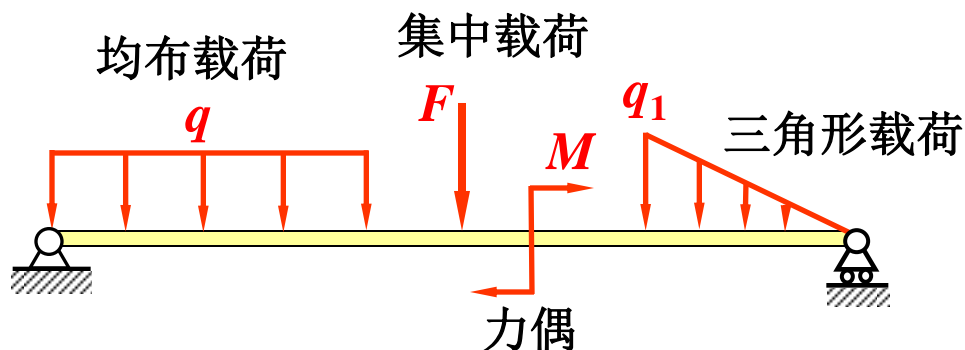
线载荷：载荷作用在整个长度上。

分布

载荷集度

物体单位体积、单位面积、单位长度上所承受的载荷。

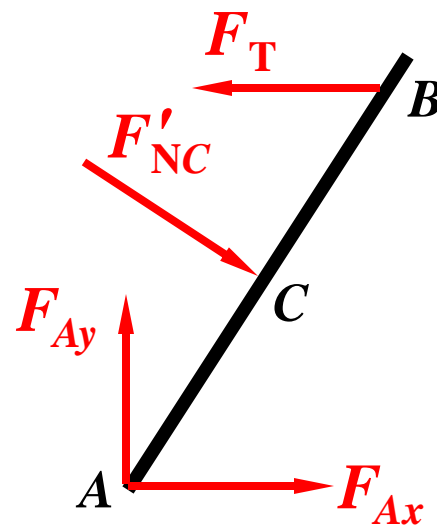
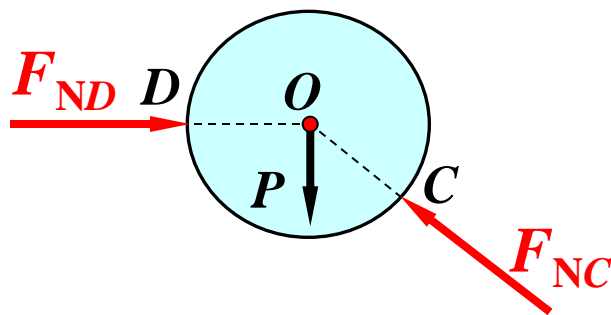
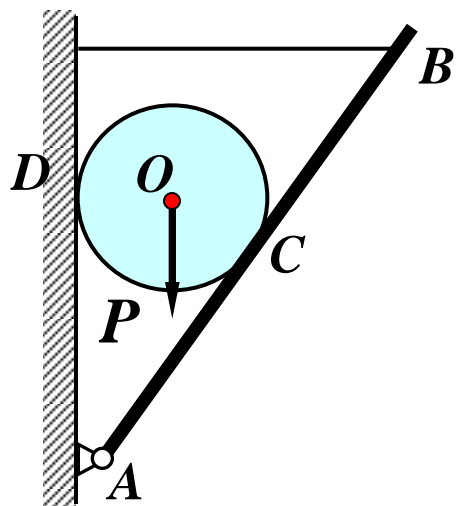
$$q_V = \frac{dF_R}{dV}, \quad q_A = \frac{dF_R}{dS}, \quad q_L = \frac{dF_R}{dL}$$



## 二、受力图

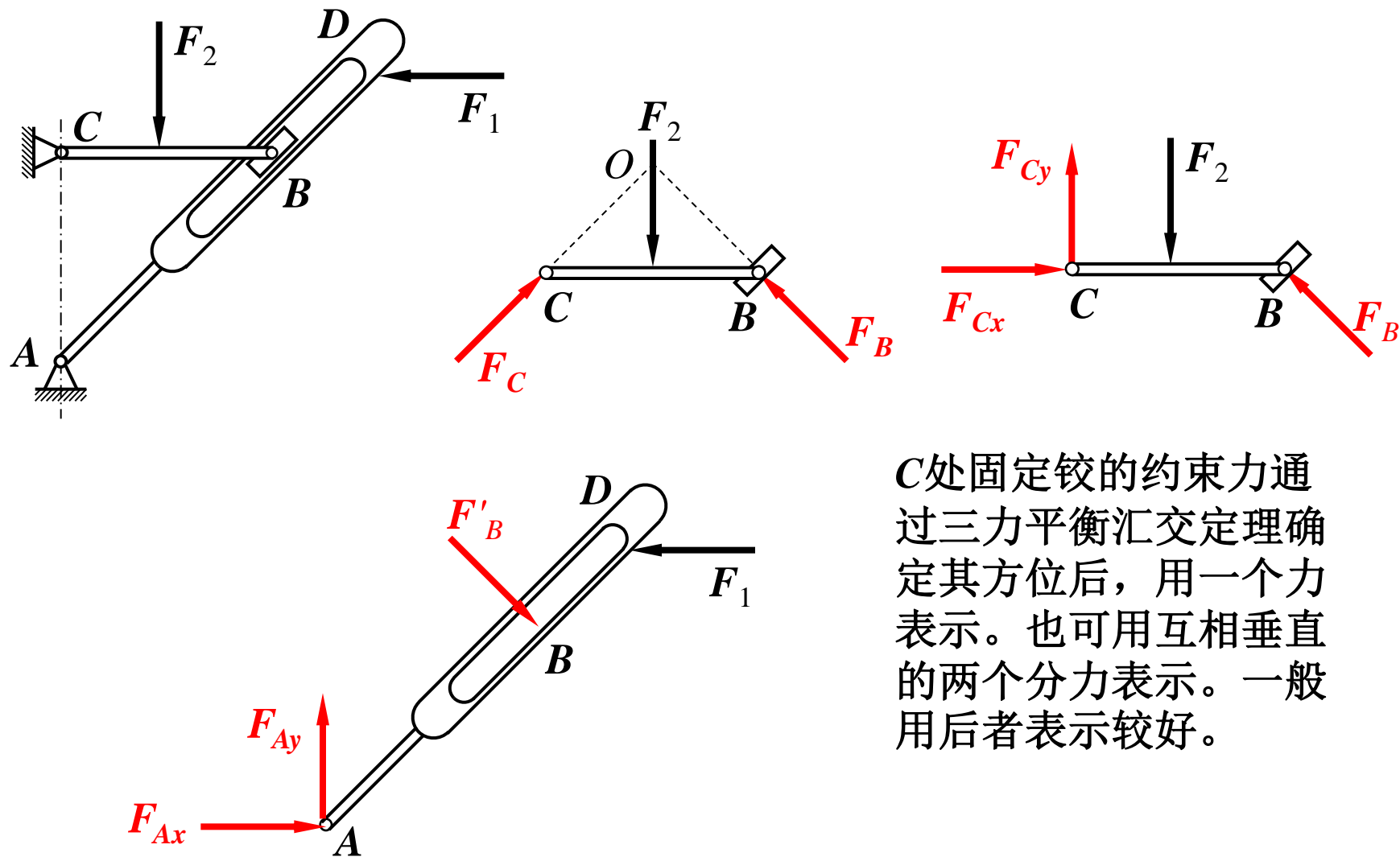
画物体受力图主要步骤为：①选研究对象；②取分离体；  
③画上主动力；④画出约束力。

[例]



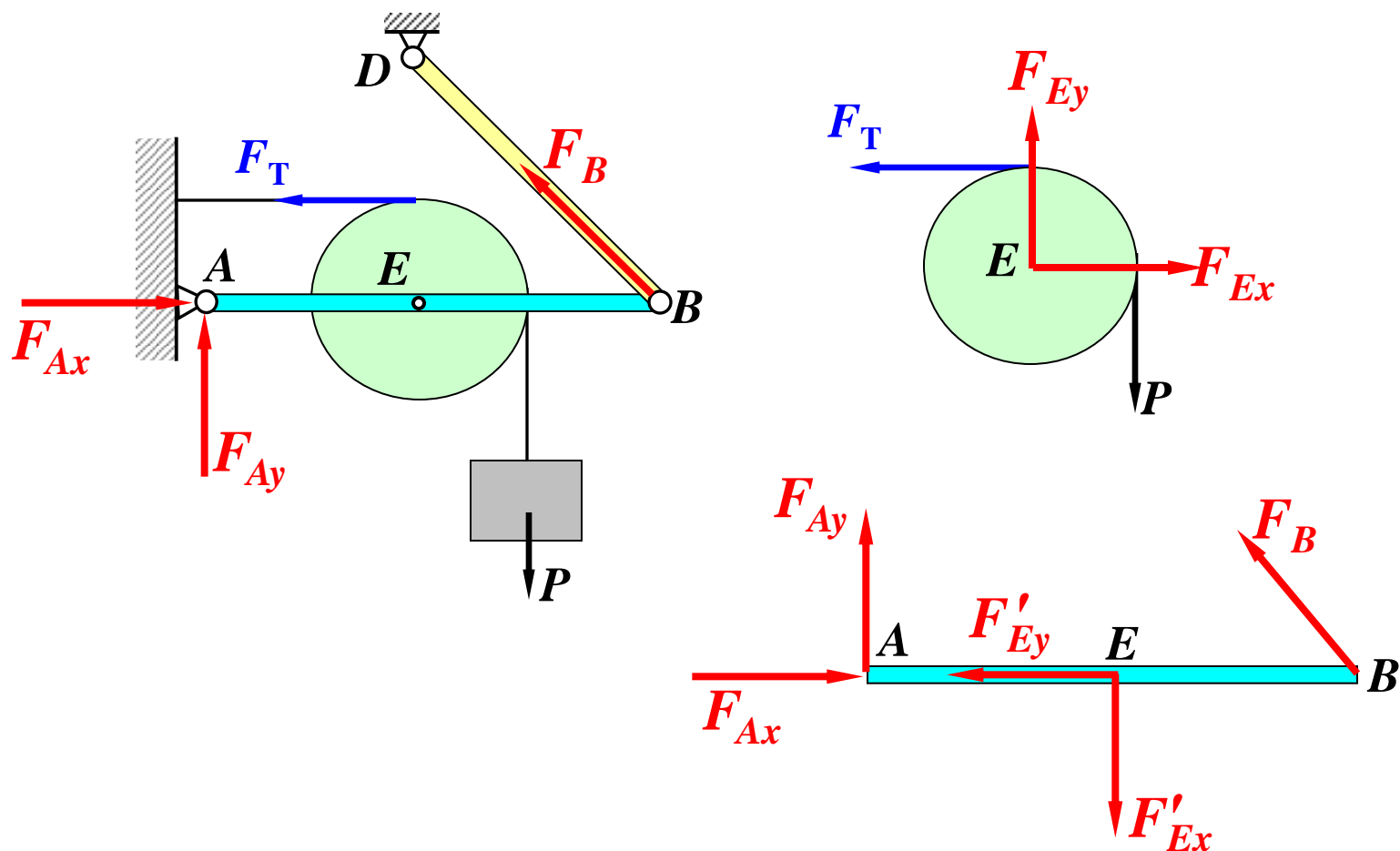


[例]如图所示结构，画AD、BC的受力图。

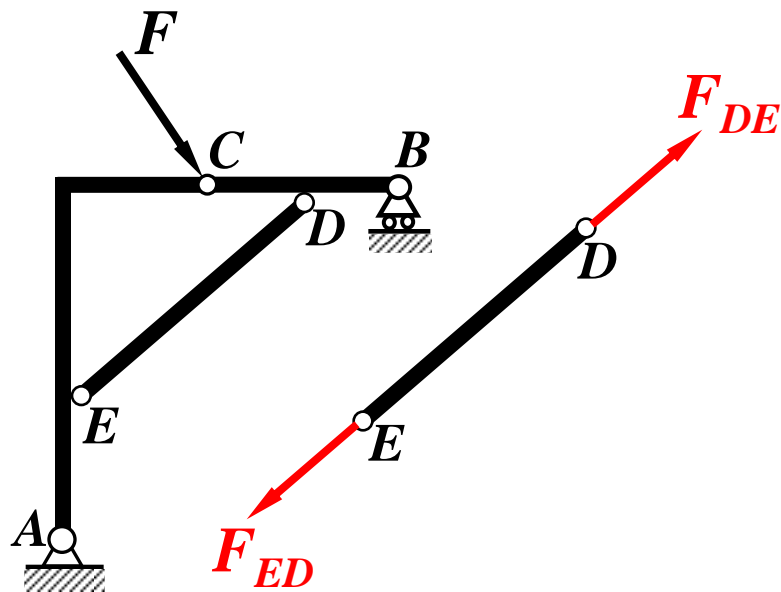


C处固定铰的约束力通过三力平衡汇交定理确定其方位后，用一个力表示。也可用互相垂直的两个分力表示。一般用后者表示较好。

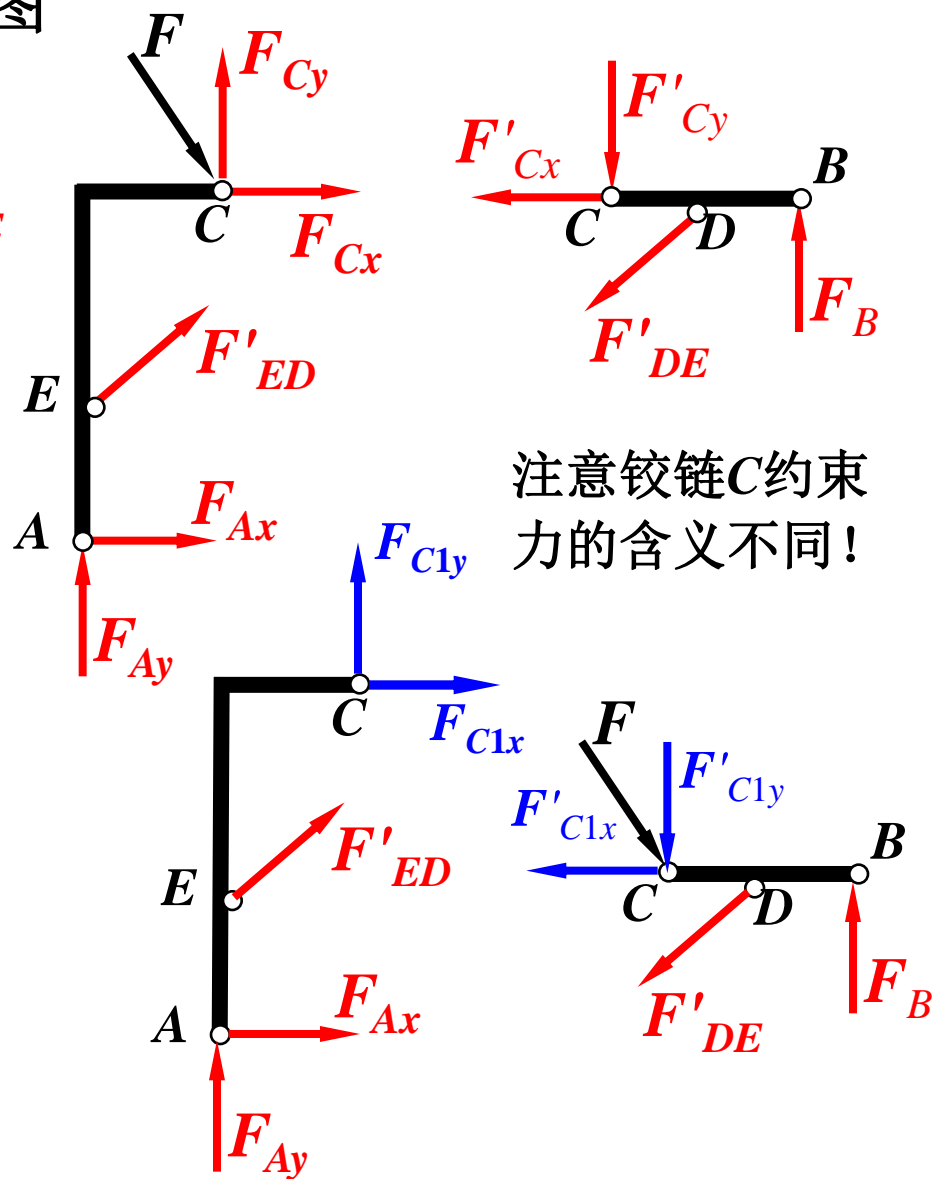
# [例] 画出下列各构件的受力图



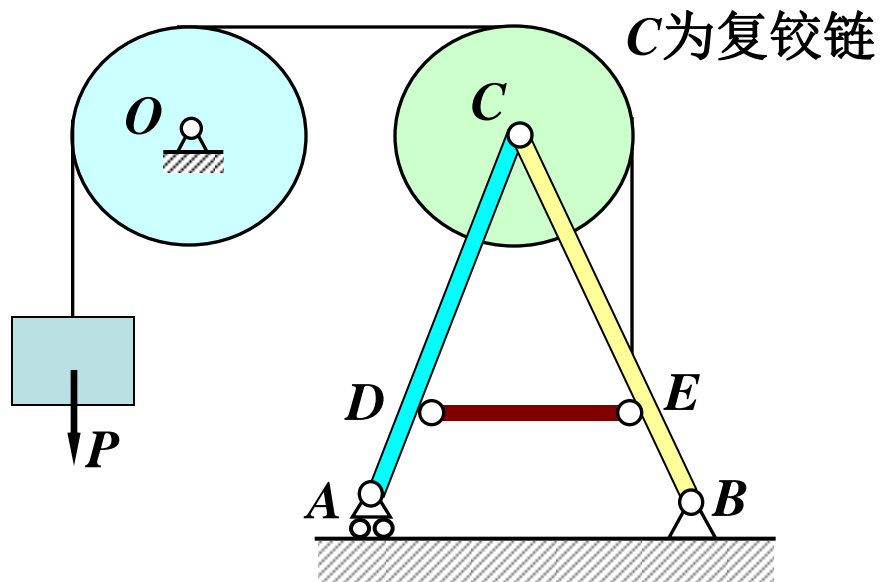
# [例]画出如图所示结构的受力图



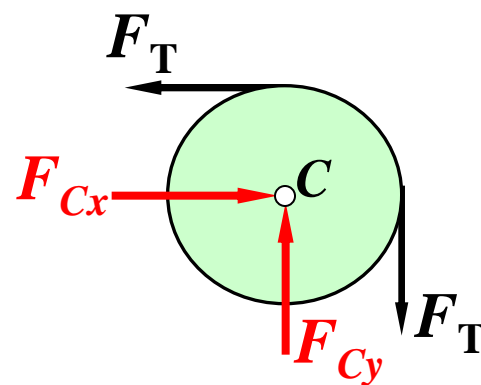
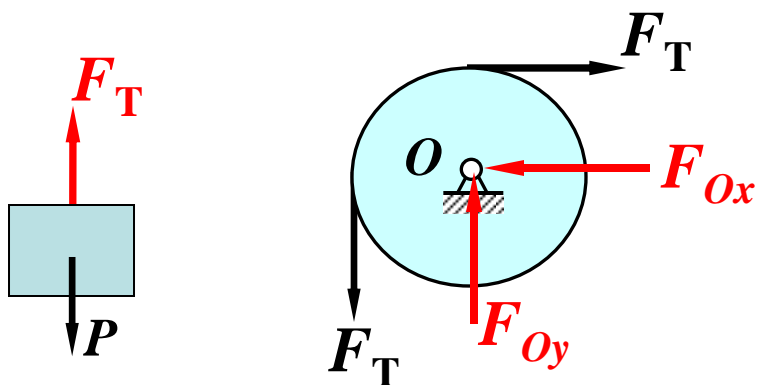
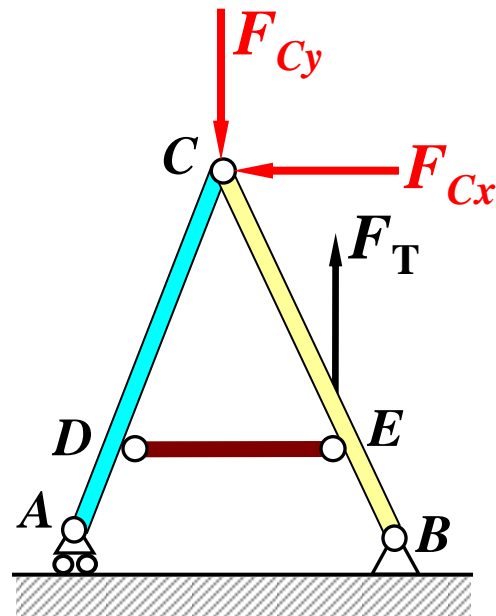
C为单铰受载荷作用，**载荷随销钉**作用在与之联系的任意**一个**构件上。但二力构件除外！

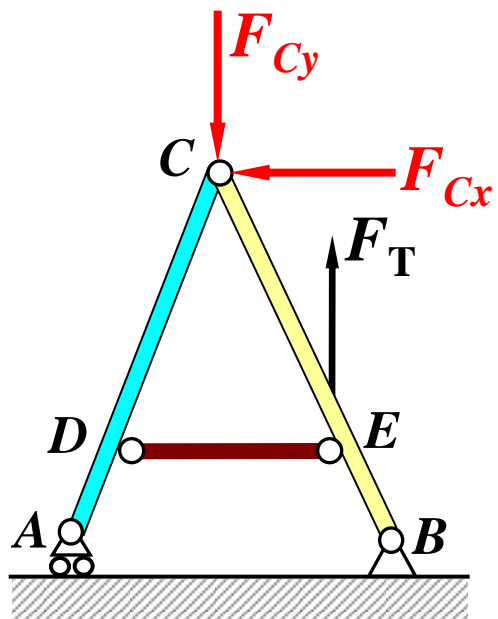


[例] 画出下列各构件的受力图

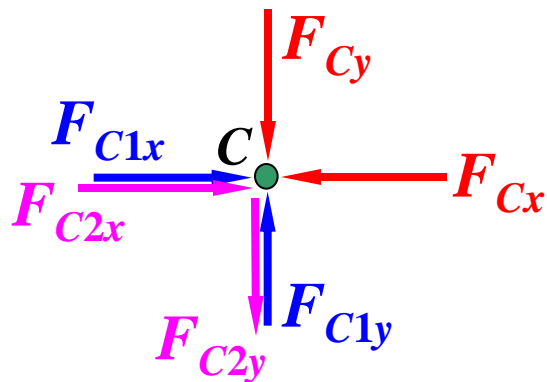
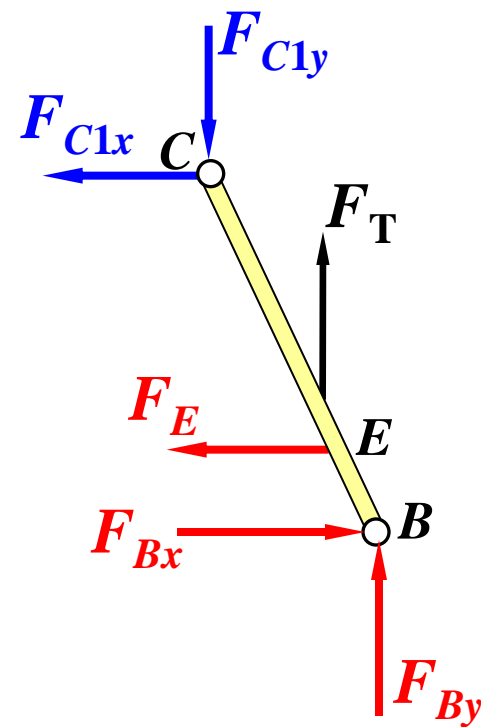
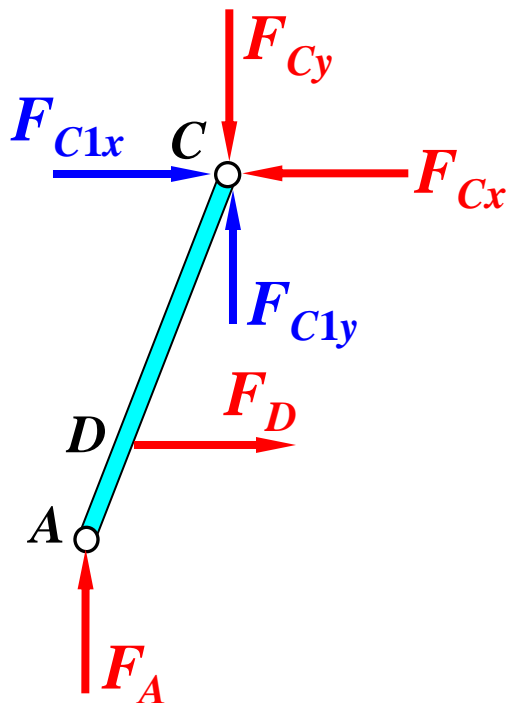


$C$ 为单铰受载荷作用

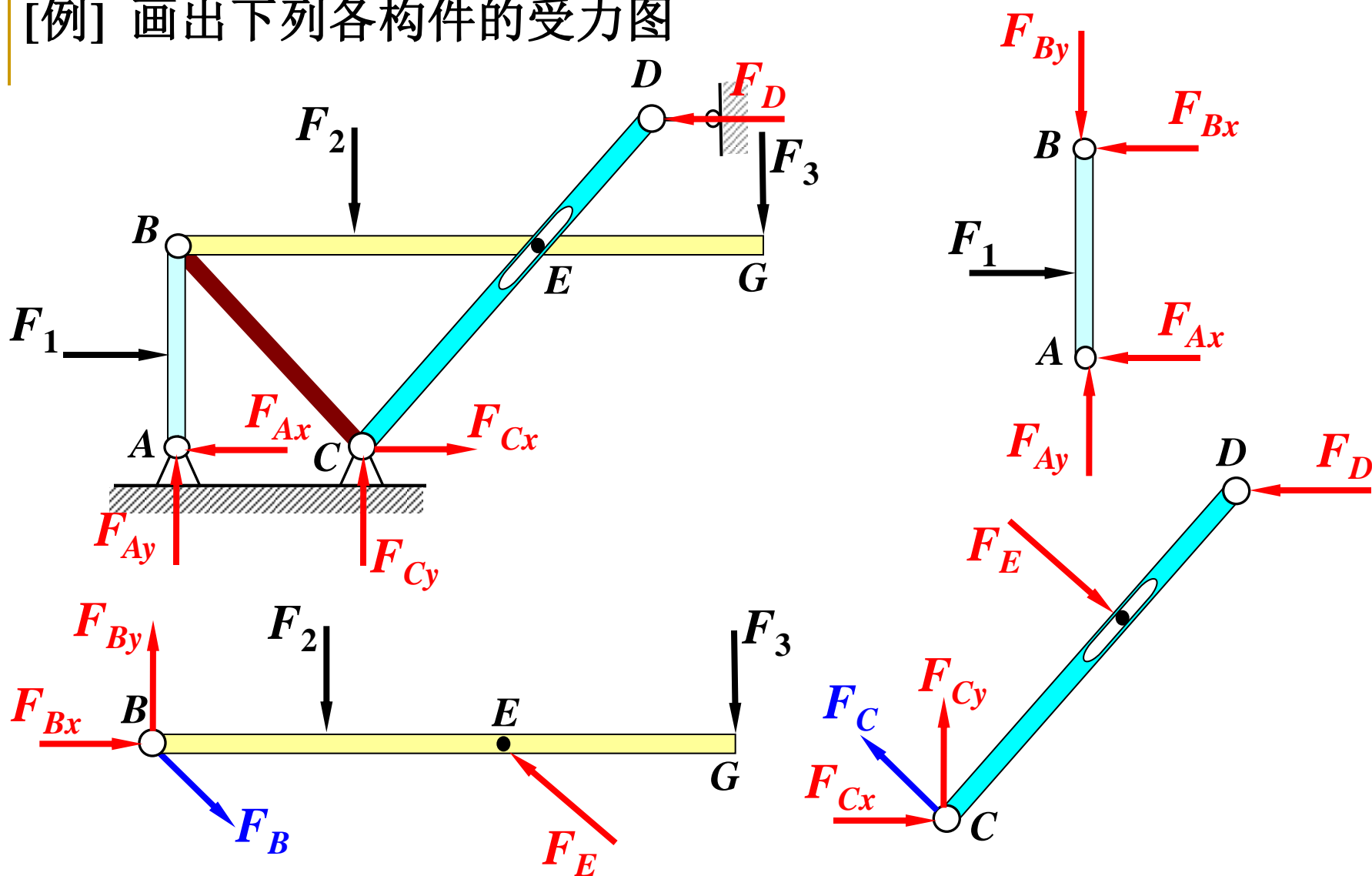




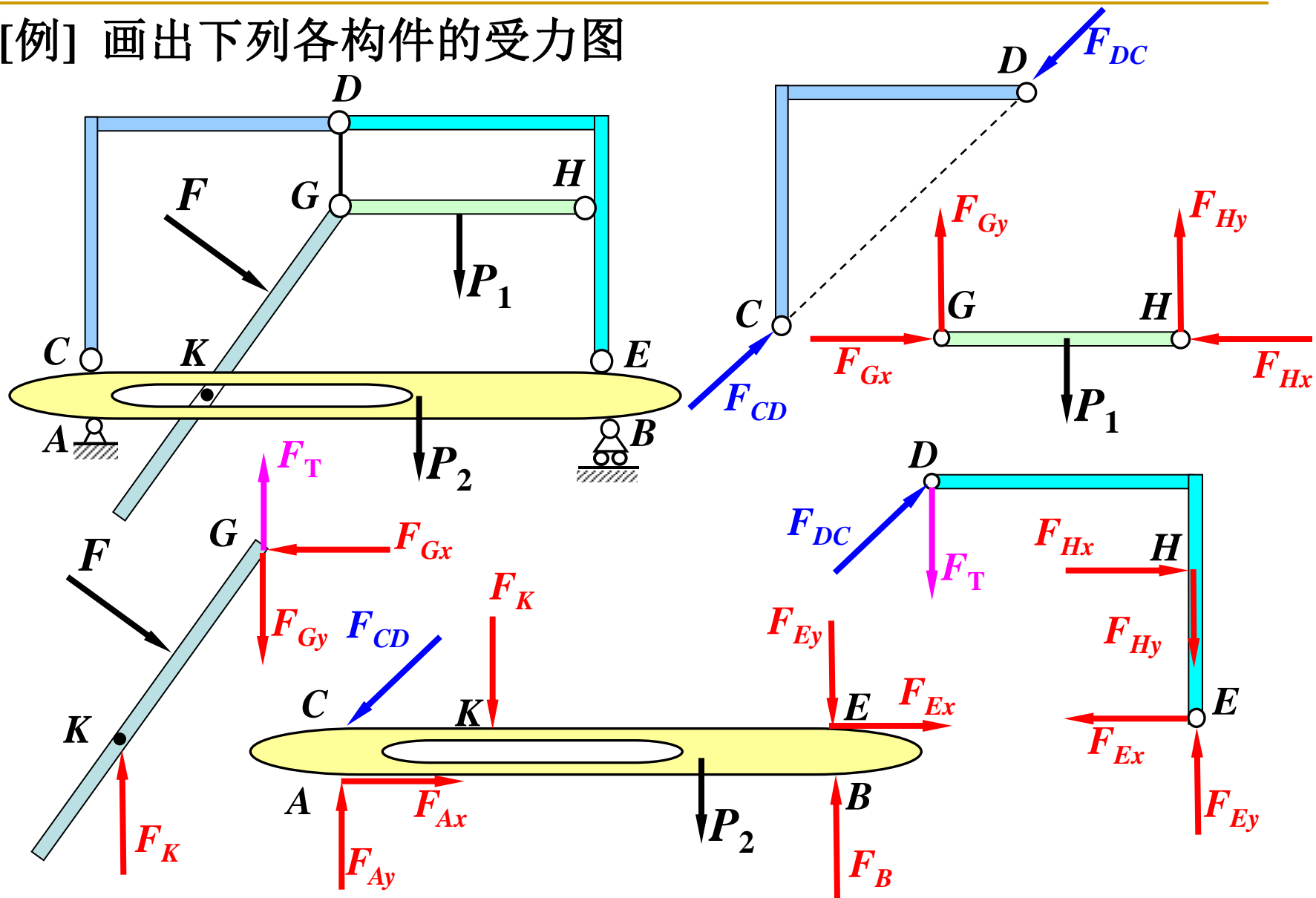
C为单铰受载荷作用



[例] 画出下列各构件的受力图



[例] 画出下列各构件的受力图



### 三、画受力图应注意的问题

#### 1、不要漏画力

除重力、电磁力外，物体之间只有通过接触才有相互机械作用力，要分清研究对象（受力体）都与周围哪些物体（施力体）相接触，接触处必有力，力的方向由约束类型而定。

#### 2、不要多画力

要注意力是物体之间的相互机械作用。因此对于受力体所受的每一个力，都应能明确地指出它是哪一个施力体施加的。



### 3、不要画错力的方向

约束力的方向必须严格地按照约束的类型来画，不能单凭直观或根据主动力的方向来简单推想。在分析两物体之间的作用力与反作用力时，要注意，作用力的方向一旦确定，反作用力的方向一定要与之相反，不要把箭头方向画错。

### 4、受力图上一般不能再画约束。

即受力图是针对研究对象画的，一般在图上不再画出原约束，但整体受力图例外。

## 5、受力图上只画外力，不画内力。

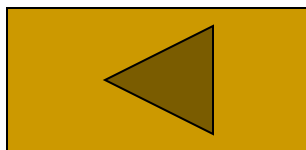
一个力，属于外力还是内力，因研究对象的不同，有可能不同。当物体系统拆开来分析时，原系统的部分内力，就成为新研究对象的外力。

## 6、同一系统各研究对象的受力图必须整体与局部一致，相互协调，不能相互矛盾。

对于某一处的约束力的方向一旦设定，在整体、局部或单个物体的受力图上要与之保持一致。

## 7、正确判断二力构件。

# 本章结束



# 理论力学

## 第二章 平面力系

力系按作用线分布分为：平面力系、空间力系

**平面力系**：作用线分布在同一平面内的力系。

**空间力系**：作用线分布在不同平面内的力系。

力系按作用线汇交情况分为

①汇交力系

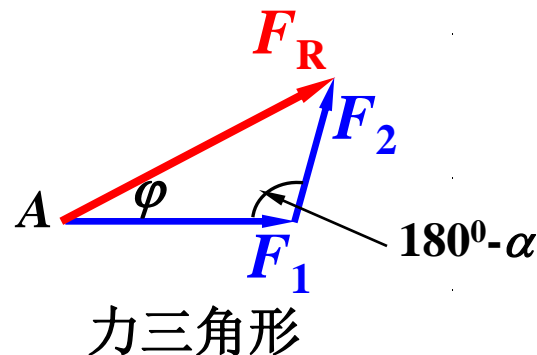
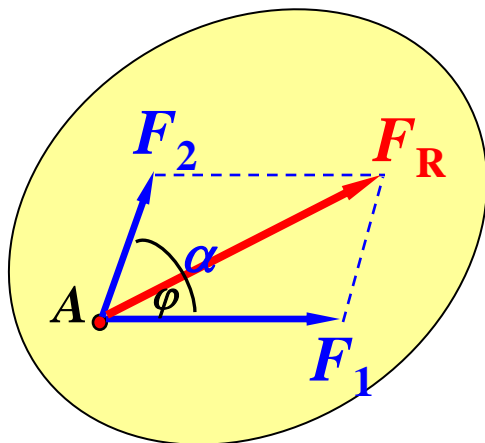
②平行力系(力偶系是其中的特殊情况)

③一般力系(任意力系)

## § 2-1 平面汇交力系

### 一、平面汇交力系合成的几何法

#### 1、两个共点力的合成



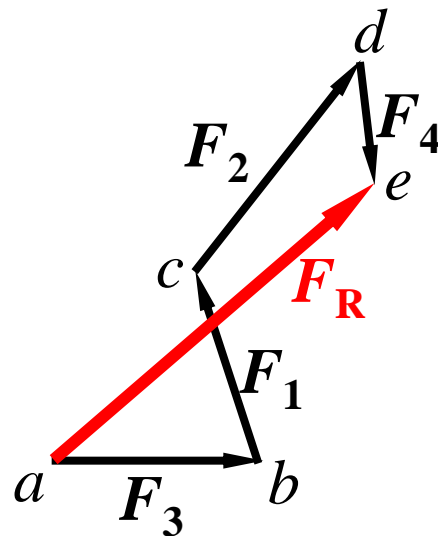
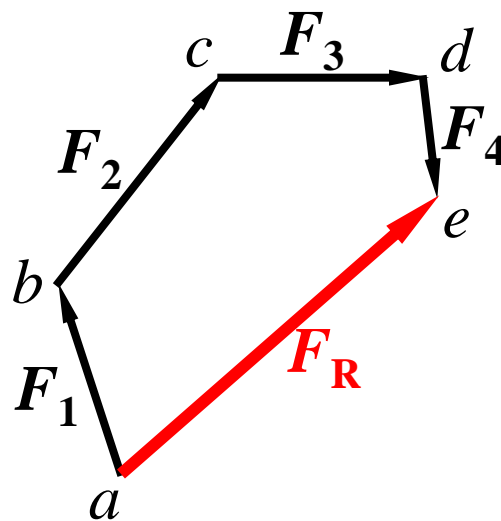
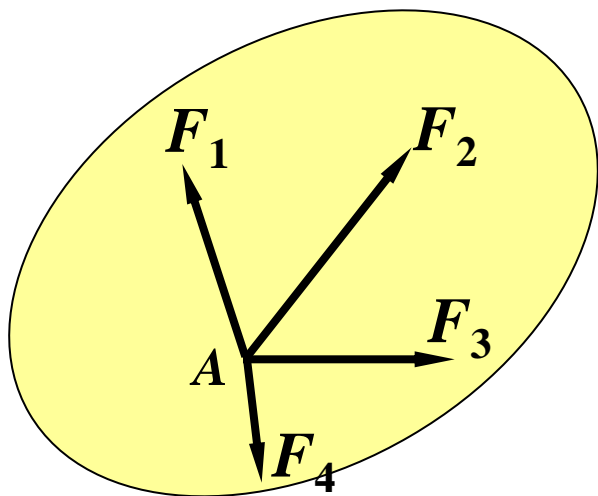
由力的平行四边形法则作图（左），也可用力的三角形来作图（右）。

由余弦定理：
$$F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}$$

合力方向由正弦定理：
$$\frac{F_1}{\sin \varphi} = \frac{F_R}{\sin(180^\circ - \alpha)}$$

## 2、任意个共点力的合成

**力多边形**:各分力矢首尾相连,组成一个不封闭的力多边形。封闭边表示合力的大小和方向。

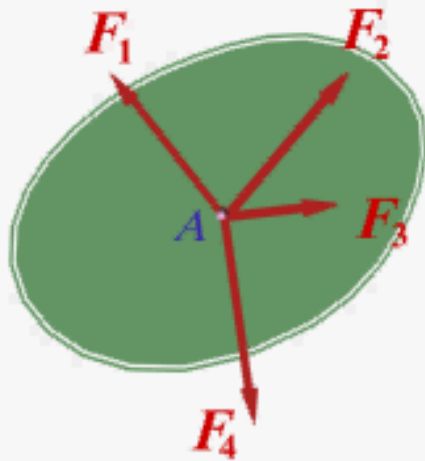


各力矢与合力矢构成的多边形称为力多边形。

用力多边形求合力的作图规则称为**力的多边形法则**。

力多边形中表示合力矢量的边称为力多边形的**封闭边**。

## 平面汇交力系合成的几何法





结论：平面汇交力系可简化为一合力，其合力的大小与方向等于各分力的矢量和（几何和），合力的作用线通过汇交点。用矢量式表示为：

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_i$$

### 3、平面汇交力系平衡的几何法

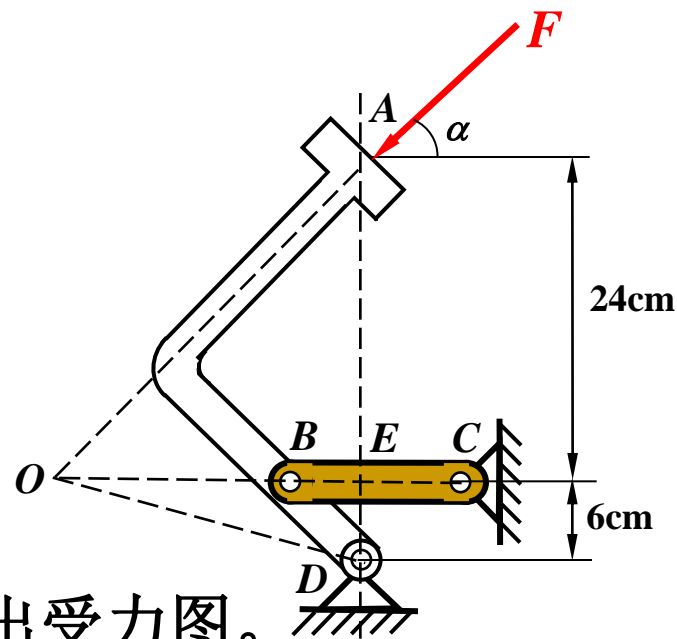
平面汇交力系平衡的必要和充分条件是：  
该力系的合力等于零。

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_i = 0$$

上述方程的几何表达为：该力系的力多边形自行封闭。

用几何方法求平面汇交力系平衡时，要做出**自行封闭的力多边形**，一般只适合三个力的平衡问题。

[例]图示是汽车制动机构的一部分。司机踩到制动蹬上的力 $F=212\text{ N}$ ，方向与水平面成 $\alpha=45^\circ$ 角。当平衡时， $DA$ 铅直， $BC$ 水平，试求拉杆 $BC$ 所受的力。已知 $EA=24\text{ cm}$ ， $DE=6\text{ cm}$ (点 $E$ 在铅直线 $DA$ 上)，又 $B$ ， $C$ ， $D$ 都是光滑铰链，机构的自重不计。



解：取制动蹬 $ABD$ 作为研究对象，并画出受力图。

作出相应的力多边形。

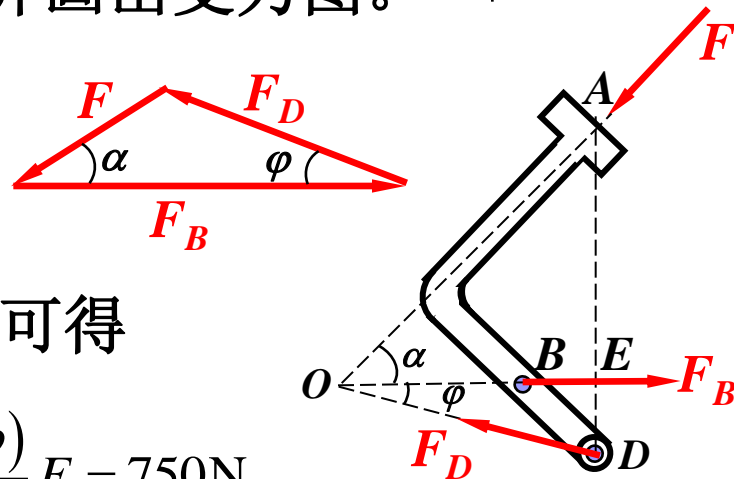
$$OE = EA = 24\text{ cm}$$

$$\tan \varphi = \frac{DE}{OE} = \frac{6}{24}$$

$$\varphi = \arctan \frac{1}{4} = 14^\circ$$

由力三角形图可得

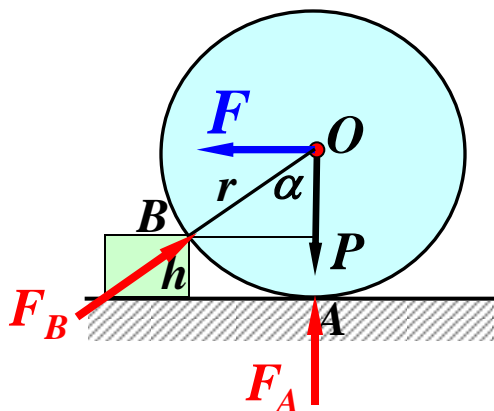
$$F_B = \frac{\sin(180^\circ - \alpha - \varphi)}{\sin \varphi} F = 750\text{ N}$$



[例]已知压路机碾子重 $P=20\text{kN}$ ,  $r=60\text{cm}$ , 欲拉过 $h=8\text{cm}$ 的障碍物。求在中心作用的水平力 $F$ 的大小和碾子对障碍物的压力。

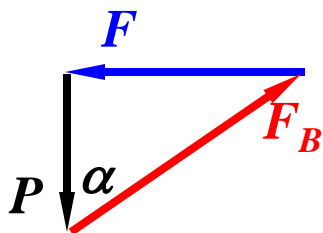
解：①选碾子为研究对象

②取分离体画受力图



∵当碾子刚离地面时 $F_A=0$ , 拉力 $F$ 最大, 这时拉力 $F$ 和自重 $P$ 及约束力 $F_B$ 构成一平衡力系。

由平衡的几何条件, 力多边形封闭, 故



$$F = P \cdot \tan \alpha \qquad F_B = \frac{P}{\cos \alpha}$$

又由几何关系:  $\tan \alpha = \frac{\sqrt{r^2 - (r-h)^2}}{r-h} = 0.577$

所以  $F=11.5\text{kN}, \quad F_B=23.1\text{kN}$

由作用力和反作用力的关系，碾子对障碍物的压力等于23.1kN。

几何法解题步骤：①选研究对象；②作出受力图；

③作力多边形；

④用几何方法求出未知数。

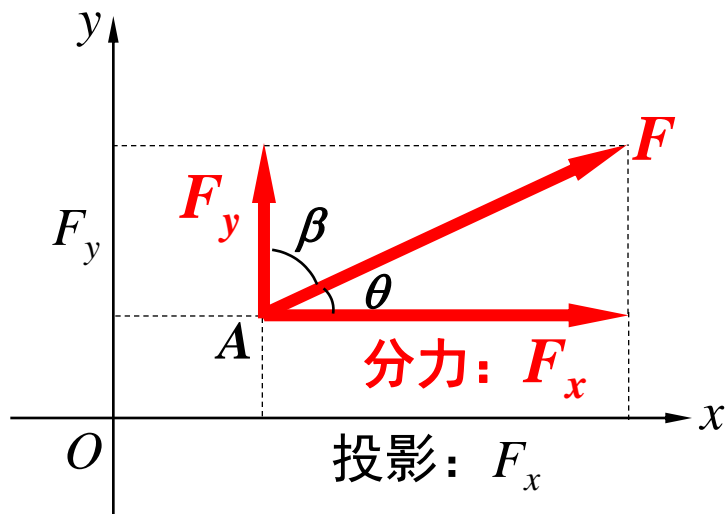
几何法解题不足：①一般只适合三个力时的平衡；做出的封闭多边形为三角形，可用三角形的正弦和余弦定理求解；

②不能表达各个量之间的函数关系。

下面我们研究力系合成与平衡的另一种方法：**解析法**。

## 二、平面汇交力系合成的解析法

### 1、力的投影



已知力可求投影

$$F_x = F \cos \theta$$

$$F_y = F \cos \beta = F \sin \theta$$

力的大小  $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$

反之，已知投影可求  
力的大小和方向

方向余弦  $\cos \theta = \frac{F_x}{F}, \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}$

若以  $\vec{F}_x$  ,  $\vec{F}_y$  表示力沿直角坐标轴的正交分量, 则:

力的分解  $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$  而各分力  $\vec{F}_x = F_x \vec{i}$ ,  $F_y = F_y \vec{j}$

所以:  $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$

## 2、合力投影定理

合力投影定理: 合力在任一轴上的投影, 等于各分力在同一轴上投影的代数和。

$$F_{Rx} = \sum F_{ix} \quad F_{Ry} = \sum F_{iy}$$

合力的大小:  $F_R = \sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2}$

方向:  $\cos(\vec{F}_R, \vec{i}) = \frac{F_{Rx}}{F_R}$ ,  $\cos(\vec{F}_R, \vec{j}) = \frac{F_{Ry}}{F_R}$

作用点: 为该力系的汇交点

[例] 已知：图示平面共点力系；求：此力系的合力。

解：用解析法

$$F_{Rx} = \sum F_{ix} = F_1 \cos 30^\circ - F_2 \cos 60^\circ - F_3 \cos 45^\circ + F_4 \cos 45^\circ = 129.3\text{N}$$

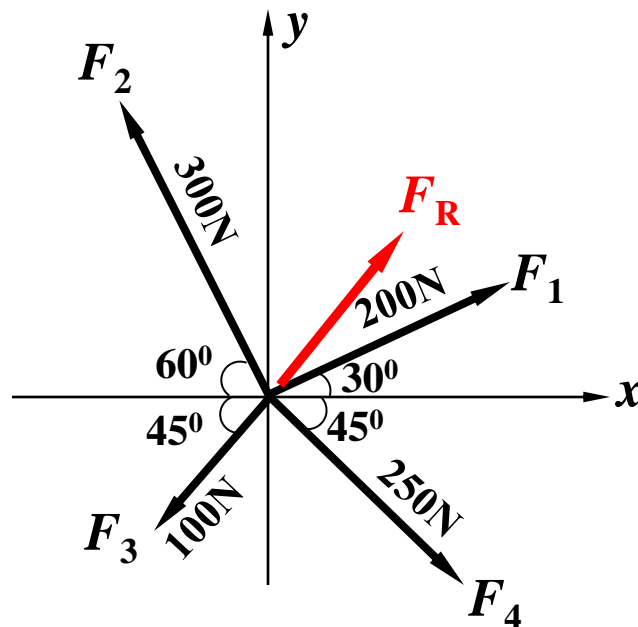
$$F_{Ry} = \sum F_{iy} = F_1 \sin 30^\circ + F_2 \sin 60^\circ - F_3 \sin 45^\circ - F_4 \sin 45^\circ = 112.3\text{N}$$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = 171.3\text{N}$$

$$\cos \theta = \frac{F_{Rx}}{F_R} = 0.7548$$

$$\cos \beta = \frac{F_{Ry}}{F_R} = 0.6556$$

$$\theta = 40.99^\circ, \quad \beta = 49.01^\circ$$



### 3、平面汇交力系的平衡方程

平面汇交力系平衡的必要和充分条件是：  
该力系的合力等于零。

$$F_R = \sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2} = 0$$

必有  $\sum F_{ix} = 0$  ,  $\sum F_{iy} = 0$

平面汇交力系平衡的必要和充分条件是：  
各力在两个坐标轴上投影的代数和分别等于零。



[例]已知：  $F=3\text{kN}$ ，  $l=1500\text{mm}$ ，  $h=200\text{mm}$ ， 忽略自重；  
求：平衡时，压块C对工件与地面的压力，  $AB$ 杆受力。

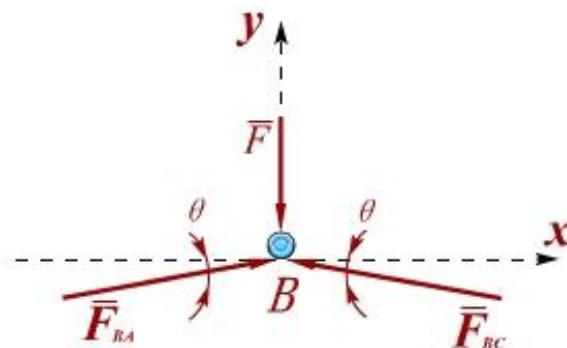
解：  $AB$ 、  $BC$ 杆为二力杆，取销钉  $B$  为对象。

$$\sum F_x = 0 \quad F_{BA} \cos \theta + F_{BC} \cos \theta = 0$$

得  $F_{BA} = F_{BC}$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{BA} \sin \theta + F_{BC} \sin \theta - F = 0$$

解得  $F_{BA} = F_{BC} = \frac{F}{2 \sin \theta} = 11.35\text{kN}$



选压块C为对象

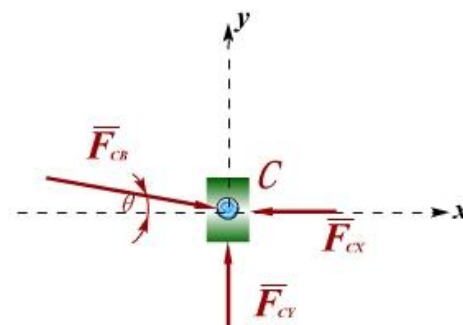
$$\sum F_x = 0 \quad F_{CB} \cos \theta - F_{Cx} = 0$$

解得

$$F_{Cx} = \frac{F}{2} \cot \theta = \frac{Fl}{2h} = 11.25 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \quad -F_{CB} \sin \theta + F_{Cy} = 0$$

解得  $F_{Cy} = 1.5 \text{ kN}$



[例]如图所示，重物 $G=20\text{kN}$ ，用钢丝绳挂在支架的滑轮 $B$ 上，钢丝绳的另一端绕在铰车 $D$ 上。杆 $AB$ 与 $BC$ 铰接，并以铰链 $A$ ， $C$ 与墙连接。如两杆与滑轮的自重不计并忽略摩擦和滑轮的大小，试求平衡时杆 $AB$ 和 $BC$ 所受的力。

解：取滑轮 $B$ 为研究对象，  
忽略滑轮的大小，画受力图。

列平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad -F_{BA} + F_1 \cos 60^\circ - F_2 \cos 30^\circ = 0$$

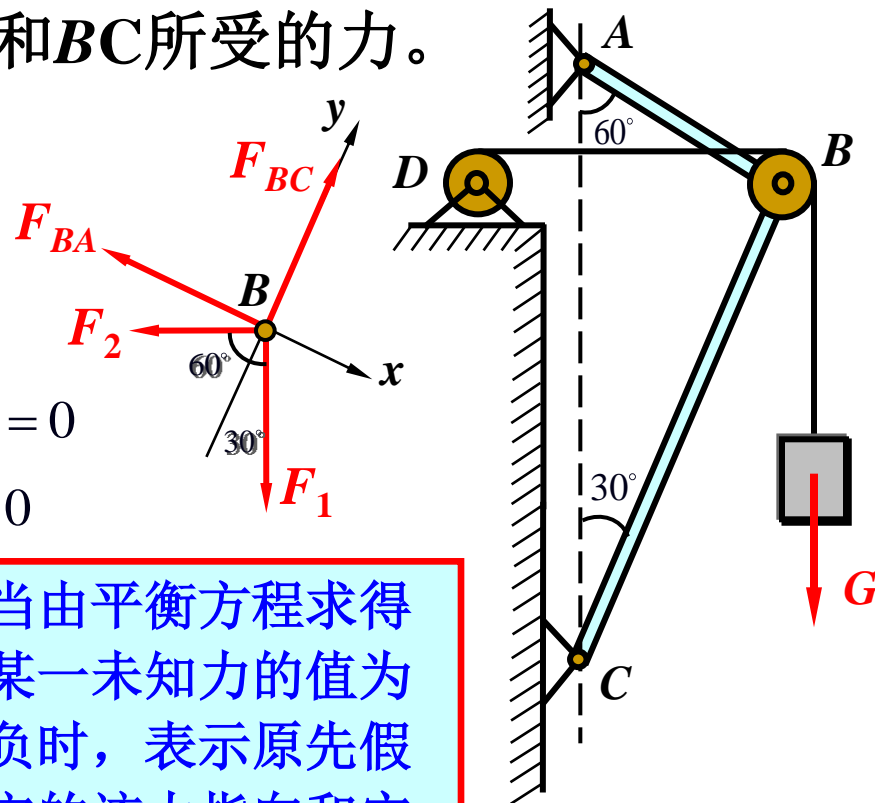
$$\sum F_y = 0, \quad F_{BC} - F_1 \cos 30^\circ - F_2 \cos 60^\circ = 0$$

解方程得杆 $AB$ 和 $BC$ 所受的力：

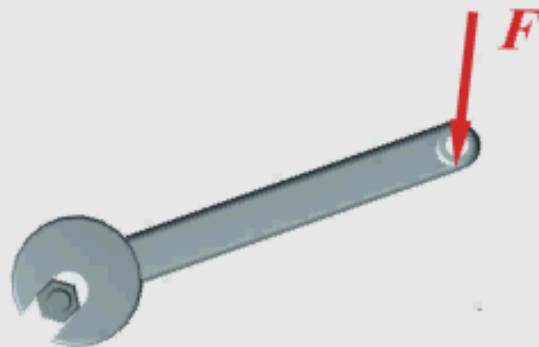
$$F_{BA} = -0.366G = -7.321 \text{ kN}$$

$$F_{BC} = 1.366G = 27.32 \text{ kN}$$

当由平衡方程求得某一未知力的值为负时，表示原先假定的该力指向和实际指向相反。



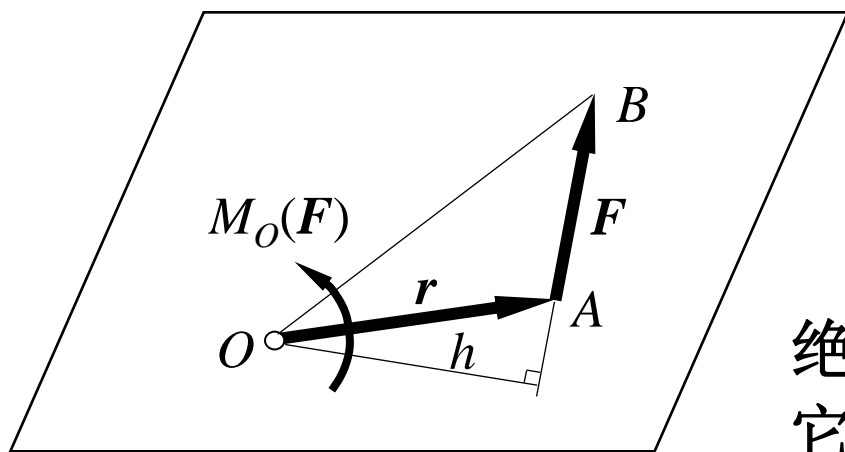
## 力对点之矩



## § 2-2 平面力对点之矩 平面力偶

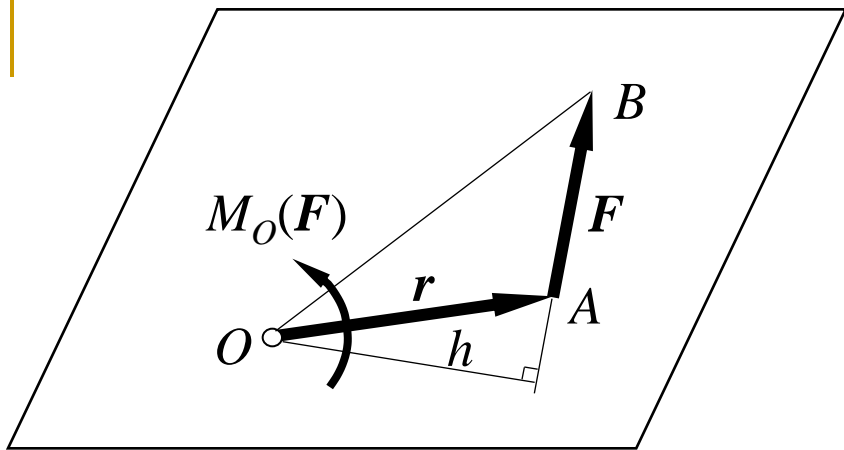
力对物体可以产生 { 移动效应——取决于力的大小、方向  
转动效应——取决于力矩的大小、转向

### 一、力对点之矩（力矩）



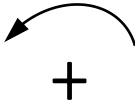
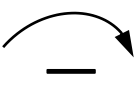
力 $F$ 与点 $O$ 位于同一平面内，称为力矩作用面。点 $O$ 称为**矩心**，点 $O$ 到力作用线的垂直距离 $h$ 称为**力臂**。

力对点之矩是一个**代数量**，它的绝对值等于**力的大小与力臂的乘积**，它的正负可按下法确定：力使物体绕矩心**逆时针转动时为正，反之为负**。



## 力对点之矩

$$M_O(\vec{F}) = \pm F \cdot h$$

- ①  $M_O(\vec{F})$ 是代数量。
- ②  $M_O(\vec{F})$ 是影响转动的独立因素。  
当 $F=0$ 或 $h=0$ 时,  $M_O(\vec{F})=0$ 。
- ③ 单位N·m或kN·m。
- ④  $M_O(\vec{F})=2\triangle AOB=F \cdot h$ , 2倍△形面积。

## 二、合力矩定理与力矩的解析表达式

合力对某点之矩，等于所有各分力对同一点之矩的代数和。

$$M_O(\vec{F}_R) = \sum_{i=1}^n M_O(\vec{F}_i) = \sum M_O(\vec{F}_i)$$

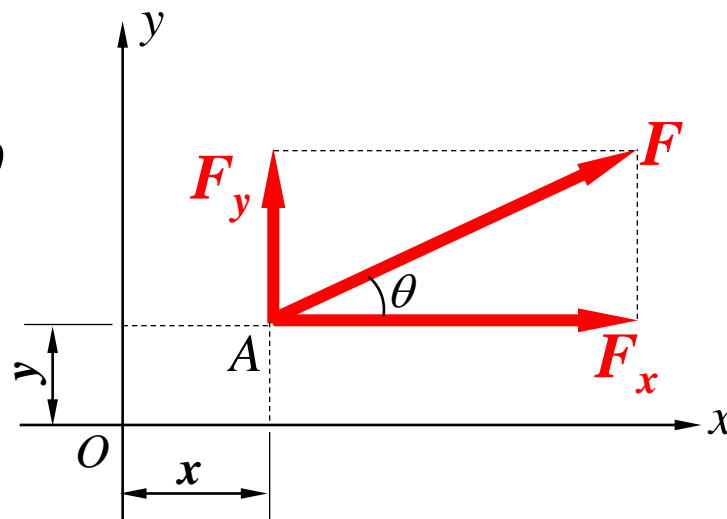
按力系等效概念，上式必然成立，且适用于任何有合力存在的力系。

力矩的解析表达式

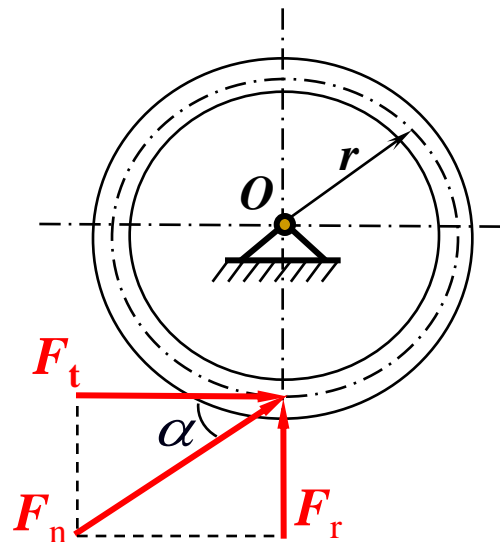
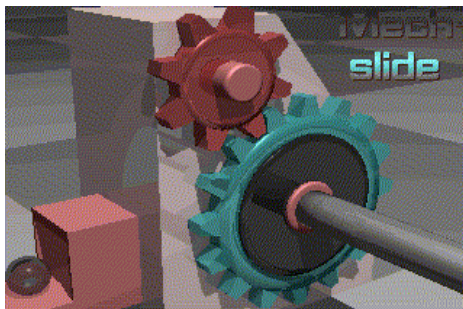
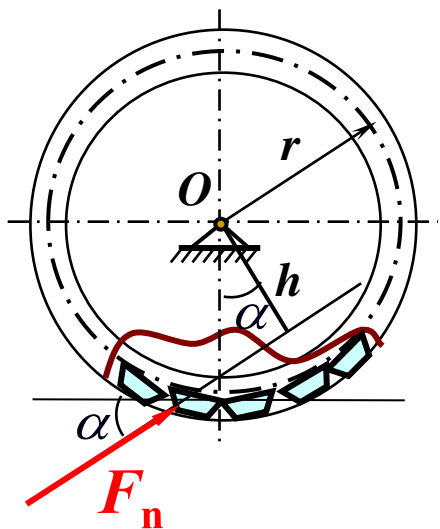
$$\begin{aligned} M_O(\vec{F}) &= xF\sin\theta - yF\cos\theta \\ &= xF_y - yF_x \end{aligned}$$

合力对坐标原点之矩

$$M_O(\vec{F}_R) = \sum (x_i F_{iy} - y_i F_{ix})$$



[例]已知 $F_n=1400\text{N}$ , 齿轮的节圆（啮合圆）的半径 $r=60\text{mm}$ , 压力角 $\alpha=20^\circ$ , 求力 $F_n$ 对 $O$ 点的矩。



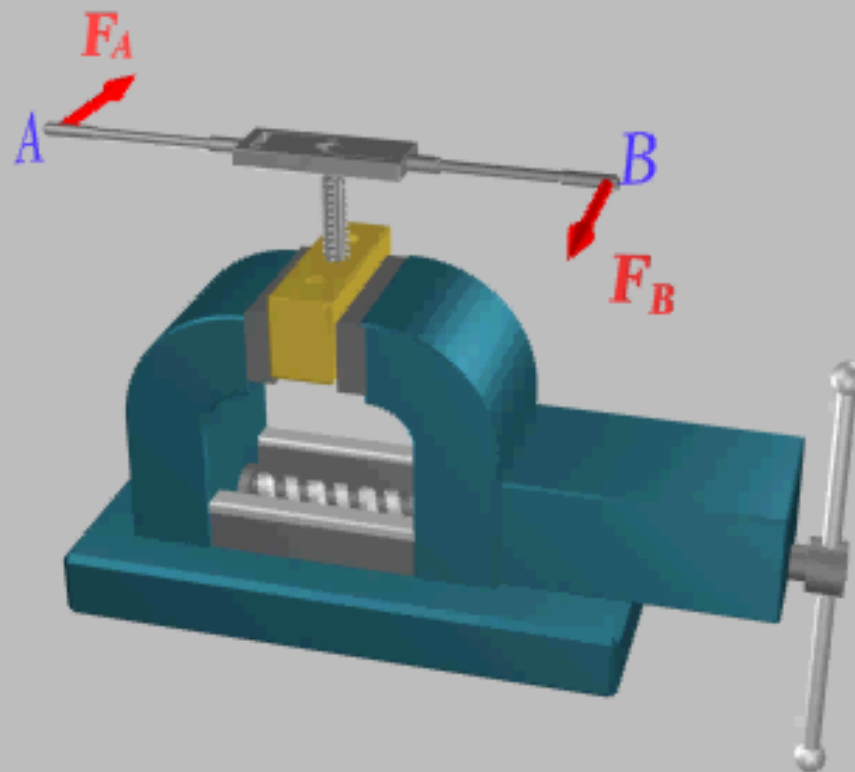
按力矩的定义得  $M_O(F_n) = F_n \cdot h = F_n r \cos \alpha = 78.93 \text{ N} \cdot \text{m}$

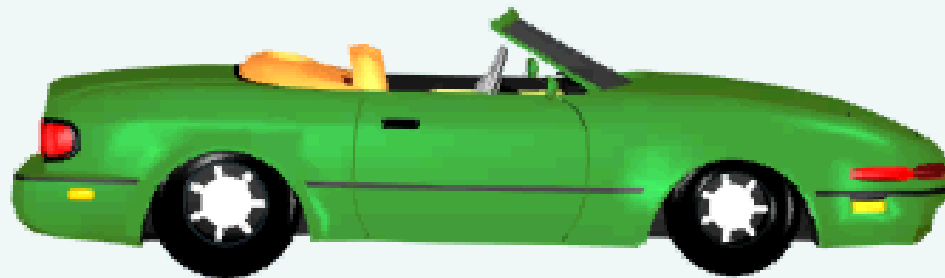
根据合力矩定理，将力 $F_n$ 分解为圆周力 $F_t$ 和径向力 $F_r$ ,

$$\begin{aligned} M_O(F_n) &= M_O(F_r) + M_O(F_t) \\ &= M_O(F_t) = F_n \cos \alpha \cdot r \end{aligned}$$



## 钳工用丝锥攻螺纹

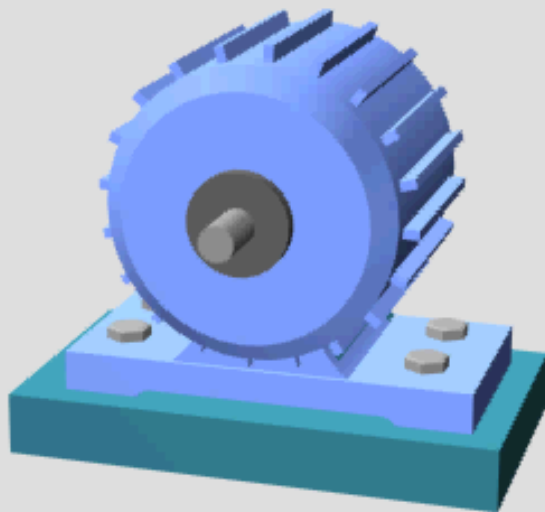




## 力偶实例

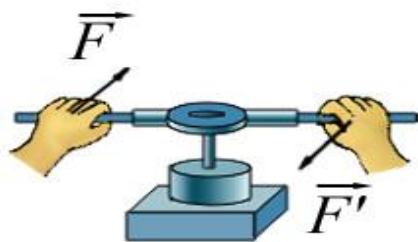
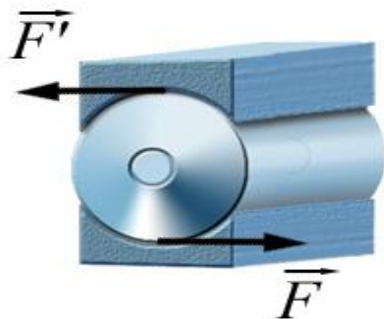
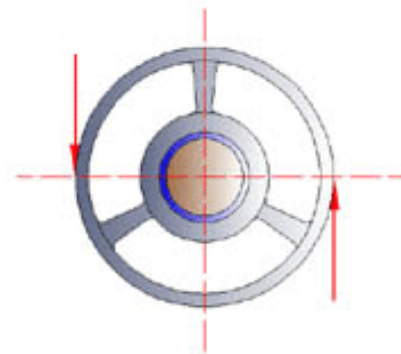
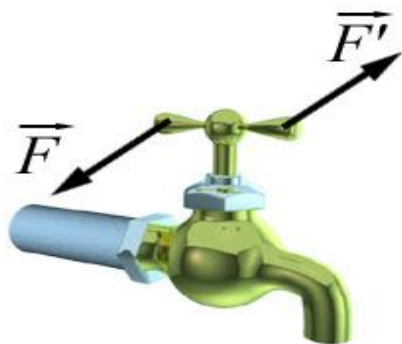


# 力偶实例



### 三、平面力偶及其性质

由两个大小相等、方向相反且不共线的平行力组成的力系，称为力偶，记为 $(F, F')$ 。力偶的两力之间的垂直距离 $d$ 称为力偶臂，力偶所在的平面称为力偶作用面。



性质1：力偶没有合力，本身又不平衡，是一个基本力学量。

①两个同向平行力的合力

大小： $F_R = F_1 + F_2$

方向：平行于  $F_1$ 、 $F_2$  且指向一致

作用点：C处

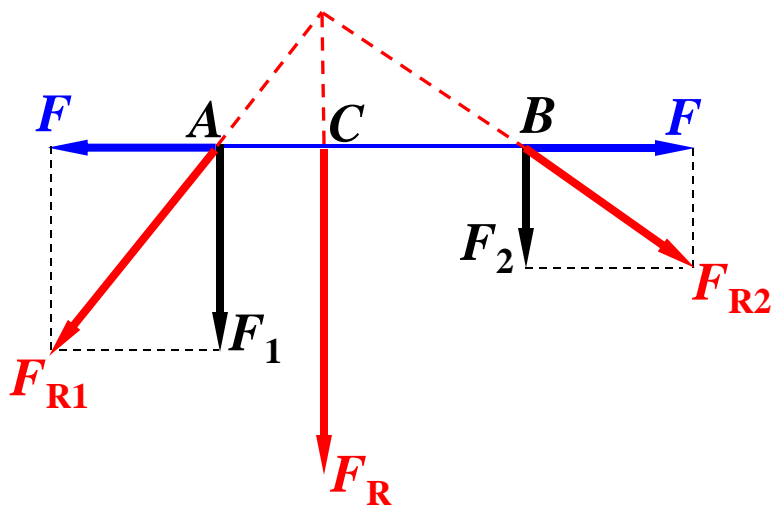
确定C点，由合力矩定理

$$M_B(F_R) = M_B(F_1)$$

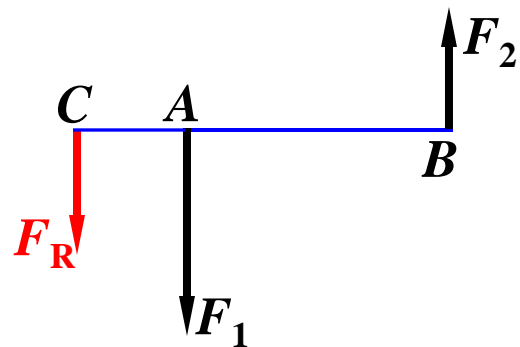
$$\therefore F_R = F_1 + F_2$$

$$\therefore F_R \cdot CB = F_1 \cdot AB$$

$$AB = AC + CB \quad \text{代入} \quad \frac{AC}{CB} = \frac{F_2}{F_1}$$



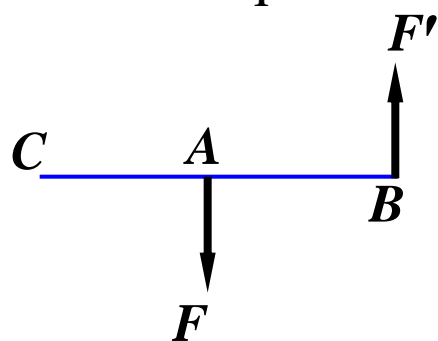
②两个反向平行力的合力 大小:  $F_R = F_1 - F_2$



方向: 平行两力且与较大的相同

作用点: C处  $\frac{CB}{CA} = \frac{F_1}{F_2}$

力偶无合力  $F_R = F' - F = 0$

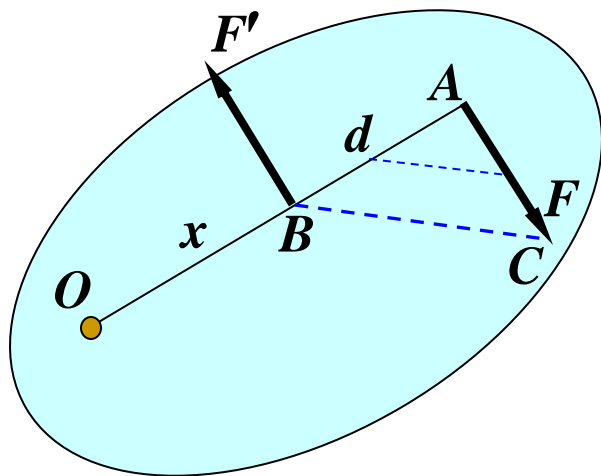


$$\therefore \frac{CB}{CA} = \frac{F'}{F} = 1 \quad \therefore CB = CA$$

若  $CB = CA = CB + d$  成立, 且  $d \neq 0$ , 必有  $CB \rightarrow \infty$

即合力作用点在无穷远处, 不存在合力。

性质2：力偶对其所在平面内任一点的矩恒等于力偶矩，而与矩心的位置无关，因此力偶对刚体的效应用力偶矩度量。



$$\begin{aligned}\because M_O(F) + M_O(F') &= -F(x+d) + F' \cdot x \\ &= -Fd\end{aligned}$$

由于O点是任取的

$$\therefore M = \pm F \cdot d \quad \curvearrowleft + \quad \curvearrowright -$$

说明：①  $M$  是代数量，有+、-；

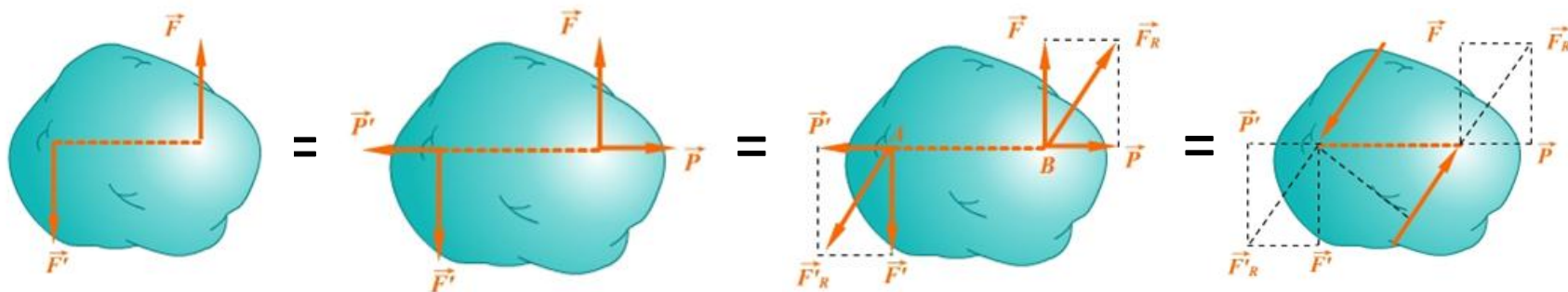
②  $F$ 、 $d$  都不独立，只有力偶矩  $M = \pm Fd$  是独立量；

③  $M$  的值  $M = \pm 2\triangle ABC$ ；

④ 单位：N·m

### 性质3：平面力偶等效定理

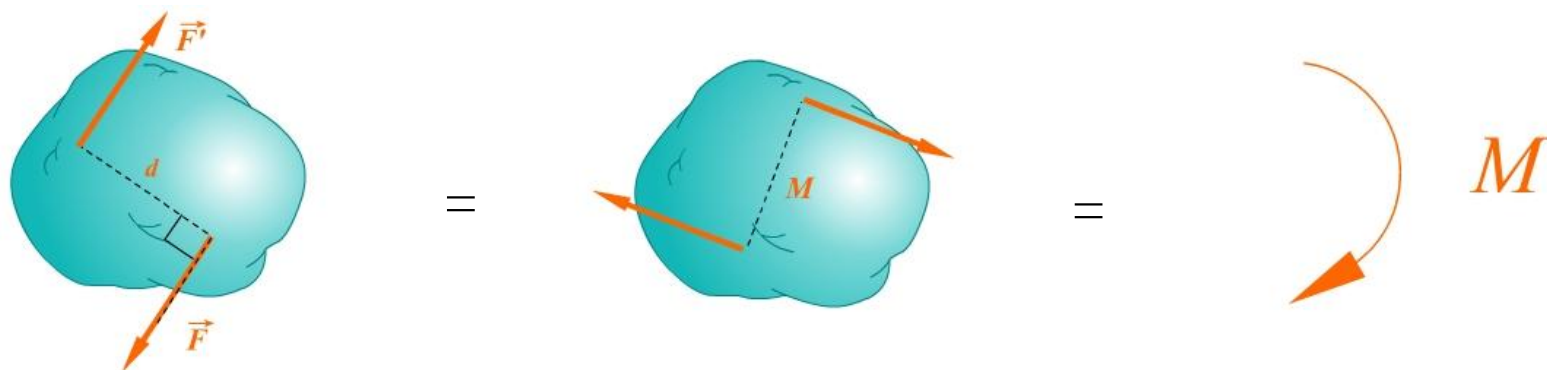
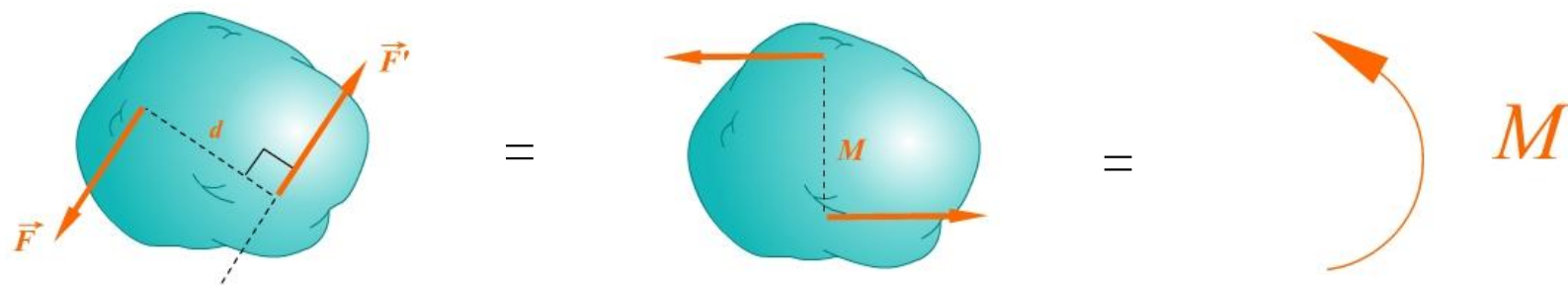
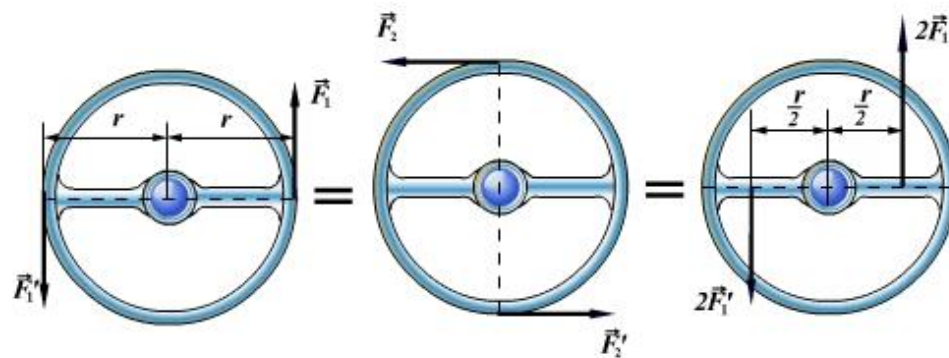
作用在同一平面内的两个力偶，只要它的力偶矩的大小相等，转向相同，则该两个力偶彼此等效。



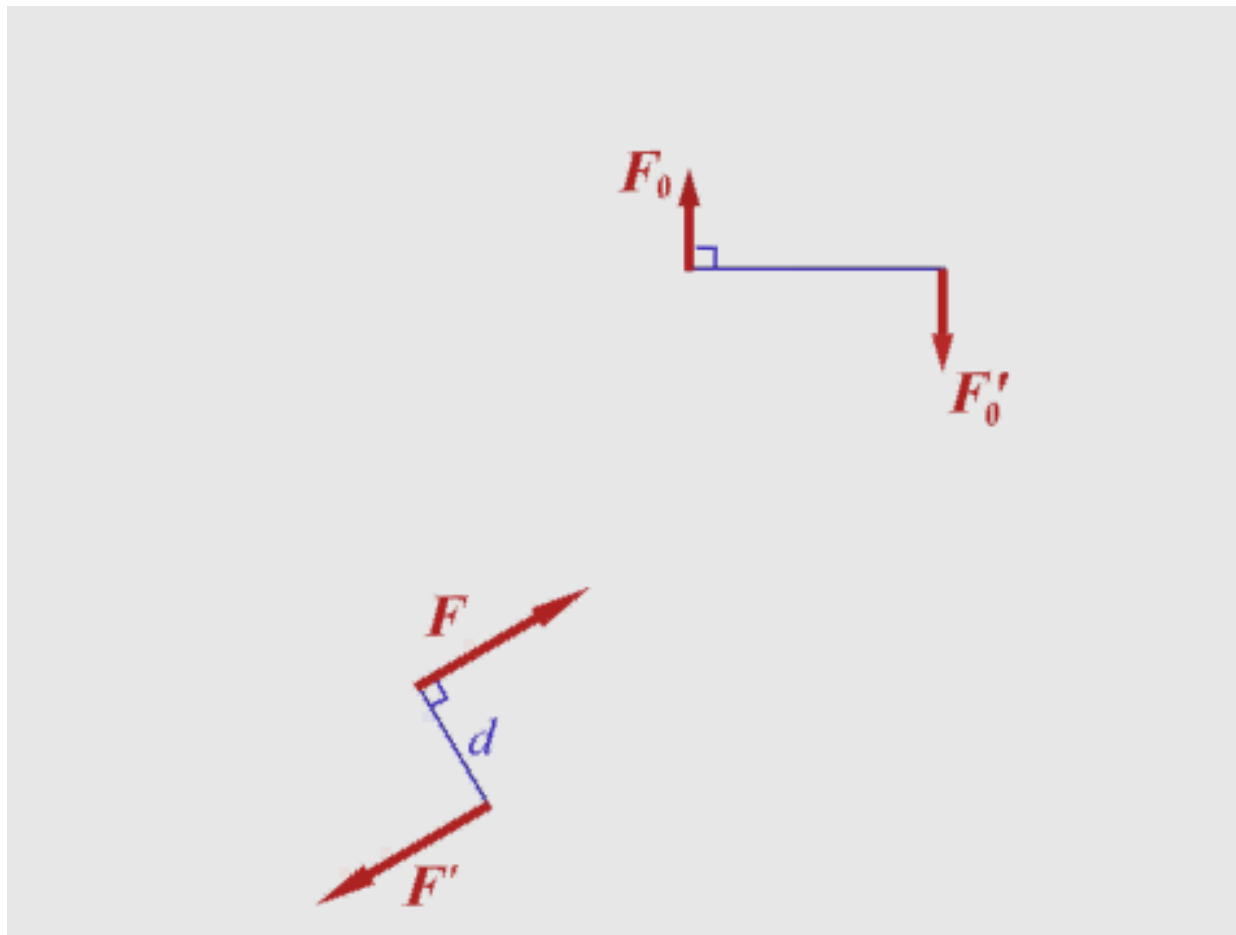
由上述证明可得下列两个推论：

- ①力偶可以在其作用面内任意移动，而不影响它对刚体的作用效应。
- ②只要保持力偶矩大小和转向不变，可以任意改变力偶中力的大小和相应力偶臂的长短，而不改变它对刚体的作用效应。

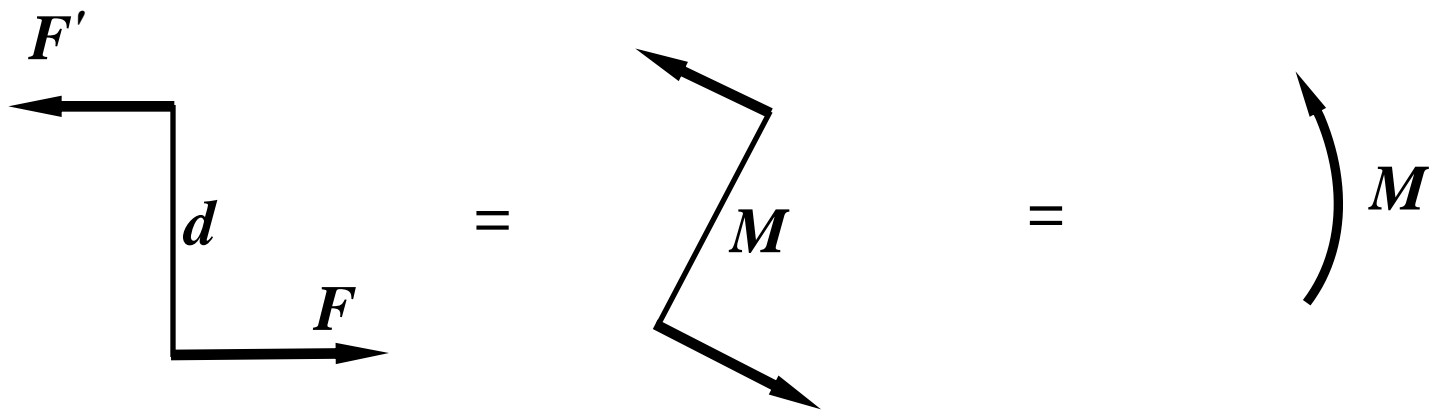




# 同平面内力偶等效定理证明

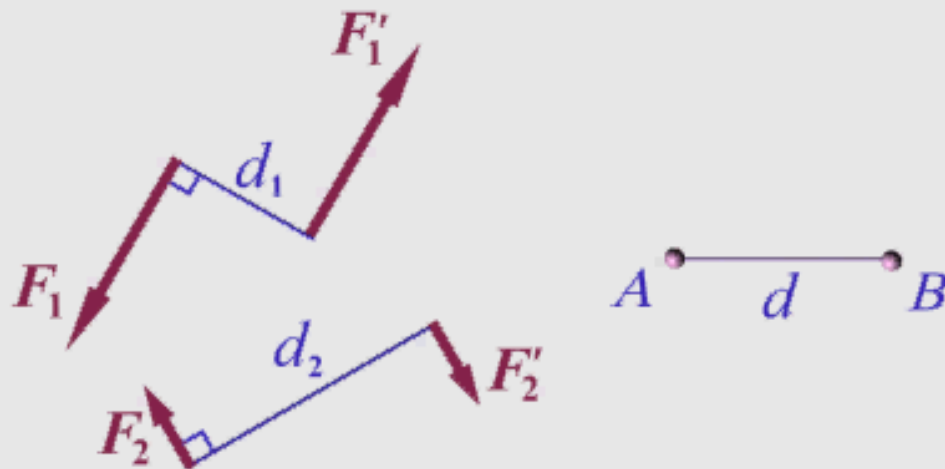


力偶的臂和力的大小都不是力偶的特征量，只有力偶矩才是力偶作用的唯一量度。今后常用如图所示的符号表示力偶。 $M$ 为力偶的矩。

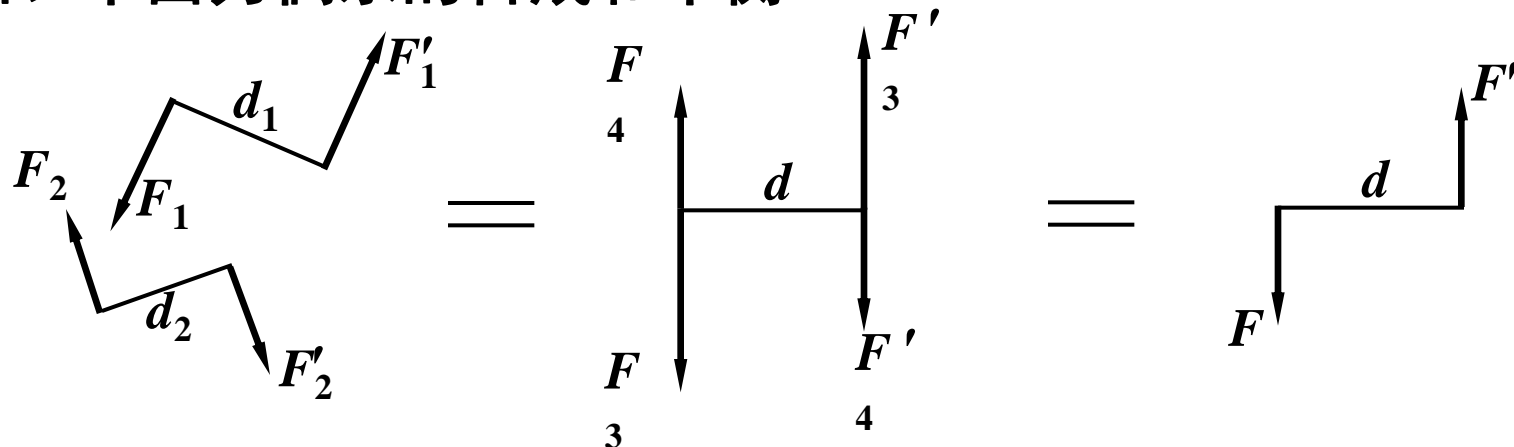


## 平面力偶的合成

$$M_1 = F_1 d_1 \quad M_2 = F_2 d_2$$



## 四、平面力偶系的合成和平衡



$$M_1 = F_1 d_1 = F_3 d \quad M_2 = -F_2 d_2 = -F_4 d$$

$$F = F_3 - F_4 \quad F' = F_3' - F_4' \quad M_1(F_1, F_1'), \quad M_2(F_2, F_2')$$

$$M = Fd = (F_3 - F_4)d = F_3 d - F_4 d = M_1 + M_2$$

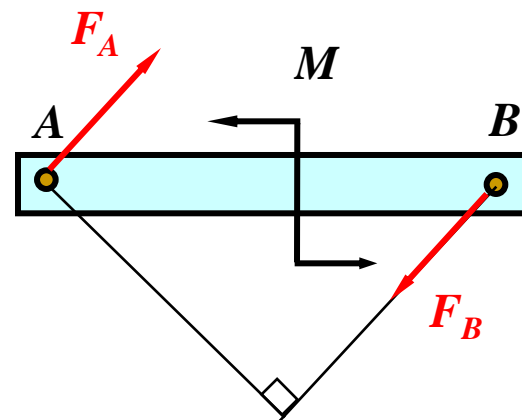
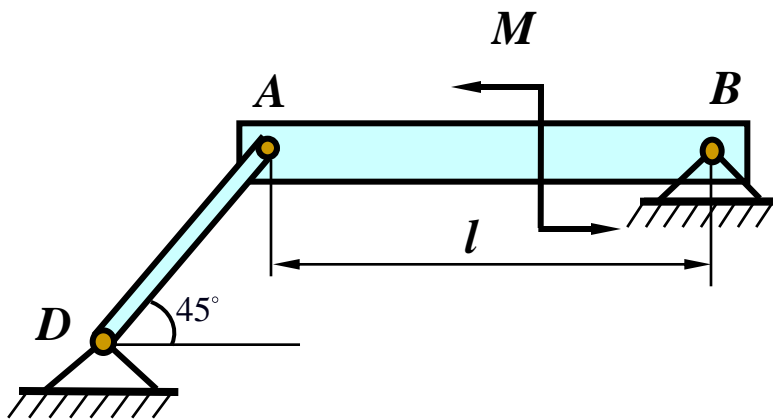
在同平面内的任意个力偶可以合成为一个合力偶，合力偶矩等于各个力偶矩的代数和。

即：  $M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \sum_{i=1}^n M_i = \sum M_i$

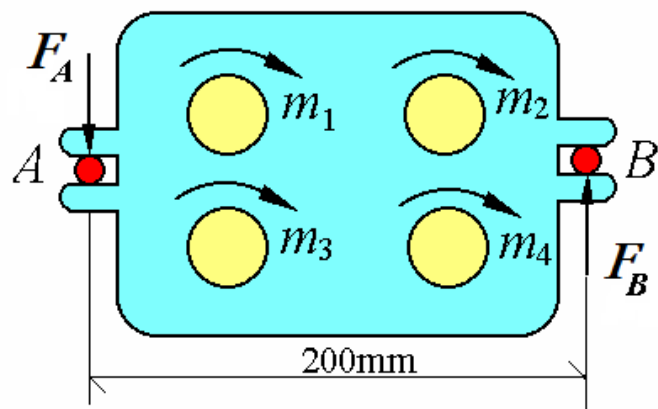
平面力偶系平衡的充要条件是：

所有各力偶矩的代数和等于零。(力偶只能和力偶平衡)

即  $\sum M_i = 0$



[例] 在一钻床上水平放置工件, 在工件上同时钻四个等直径的孔, 每个钻头的力偶矩为  $m_1=m_2=m_3=m_4=15\text{N}\cdot\text{m}$   
求工件的总切削力偶矩和A、B端水平约束力?



解: 各力偶的合力偶矩为

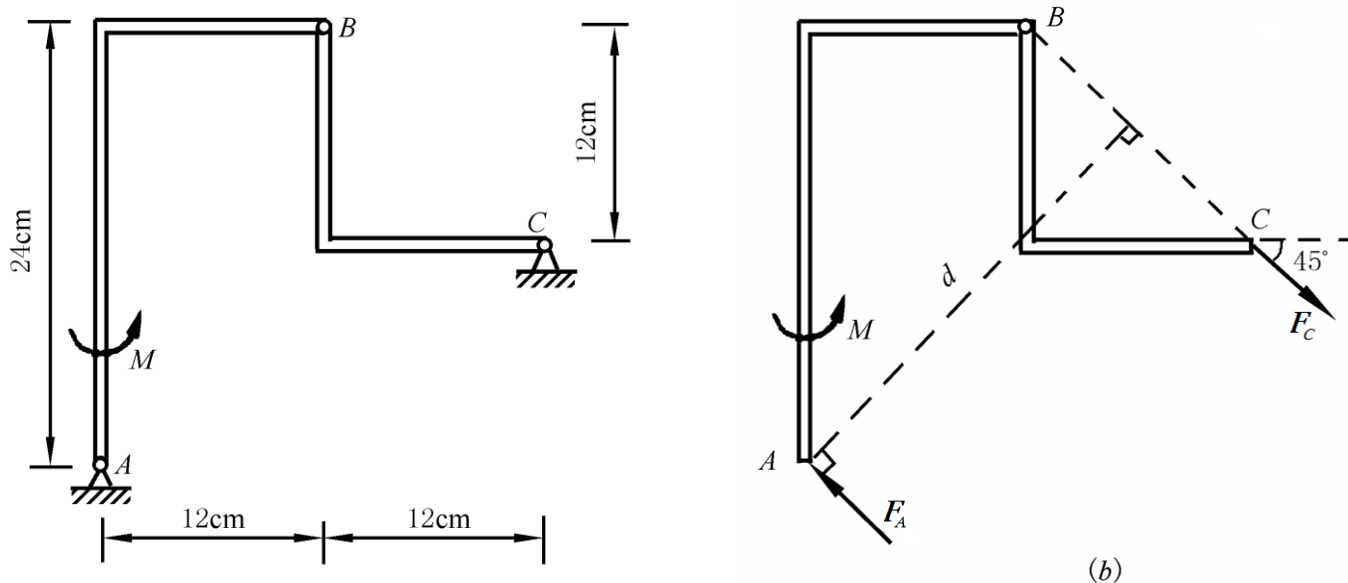
$$\begin{aligned} M &= m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \\ &= 4 \times (-15) = -60\text{N}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

由力偶只能与力偶平衡的性质,  
力 $F_A$ 与力 $F_B$ 组成一力偶。

根据平面力偶系平衡方程有:  $F_B \times 0.2 - m_1 - m_2 - m_3 - m_4 = 0$

$$\therefore F_B = \frac{60}{0.2} = 300\text{N} \quad \therefore F_A = F_B = 300\text{N}$$

[例] 图示结构，已知  $M=800\text{N}\cdot\text{m}$ ，求  $A$ 、 $C$  两点的约束力。



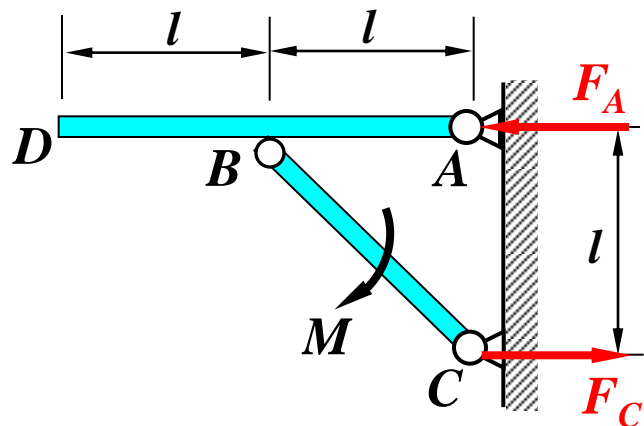
解：注意到  $CB$  为二力构件<sup>(a)</sup>，画受力图

$$M_{AC} = F_C d = F_C \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 12 + F_C \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 24 = 18\sqrt{2}F_C (\text{N}\cdot\text{cm}) = 0.255F_C (\text{N}\cdot\text{m})$$

$$\sum M_i = 0 \quad M_{AC} - M = 0 \quad F_C = 3137 \text{ N}$$



[例] 图示杆系，已知 $M$ ， $l$ ，求 $A$ 、 $B$ 处约束力。



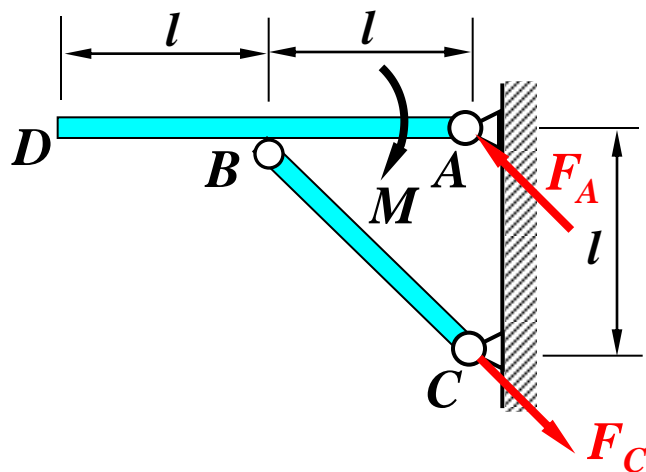
解：1、 $AD$ 为二力杆。

2、研究对象： 整体

$$F_A = F_C = \frac{M}{l}$$

$M$ 作用在 $AD$ 杆上又如何？

$BC$ 为二力杆



$$F_A = F_C = \frac{M}{l \sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}M}{l}$$

[例]不计自重的杆 $AB$ 与 $DC$ 在 $C$ 处为光滑接触,它们分别受力偶矩为 $M_1$ 与 $M_2$ 的力偶作用, 转向如图。问 $M_1$ 与 $M_2$ 的比值为多大, 结构才能平衡?

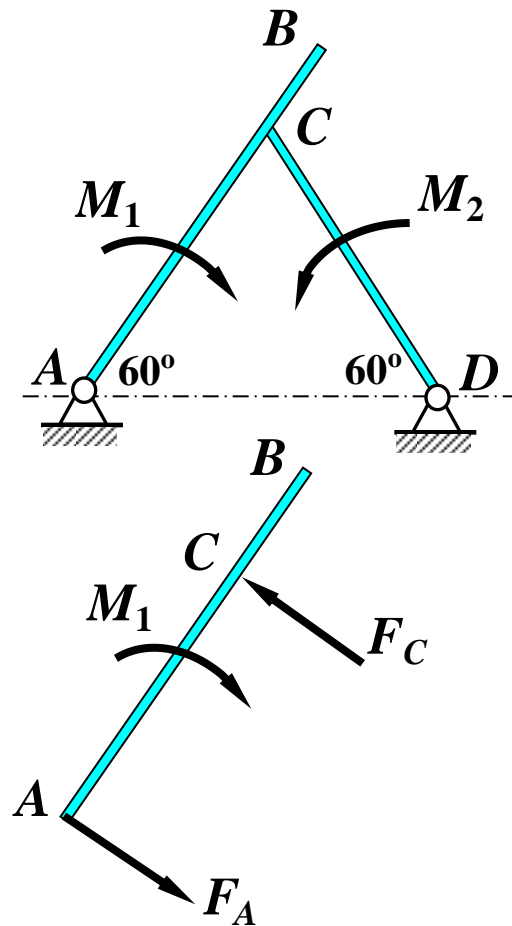
解:取杆 $AB$ 为研究对象画受力图。

杆 $AB$ 只受力偶的作用而平衡且 $C$ 处为光滑面约束, 则 $A$ 处约束力的方位可定。

$$F_A = F_C = F, \quad AC = a$$

$$\sum M_i = 0 \quad Fa - M_1 = 0$$

$$M_1 = Fa \quad (1)$$



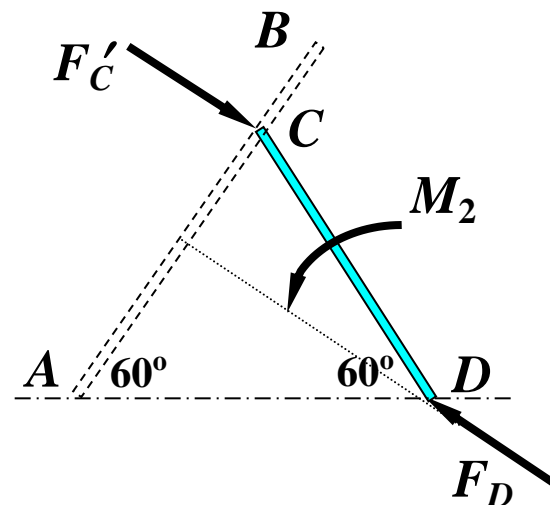
取杆 $CD$ 为研究对象。因 $C$ 点约束力方位已定，则 $D$ 点约束力方位亦可确定，画受力图。

$$F_D = F'_C = F$$

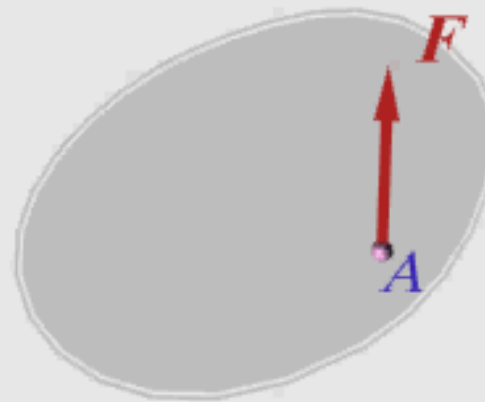
$$\sum M_i = 0 \quad -0.5aF + M_2 = 0$$

$$M_2 = 0.5 Fa \quad (2)$$

联立(1) (2)两式得： $M_1/M_2=2$



# 力线平移定理

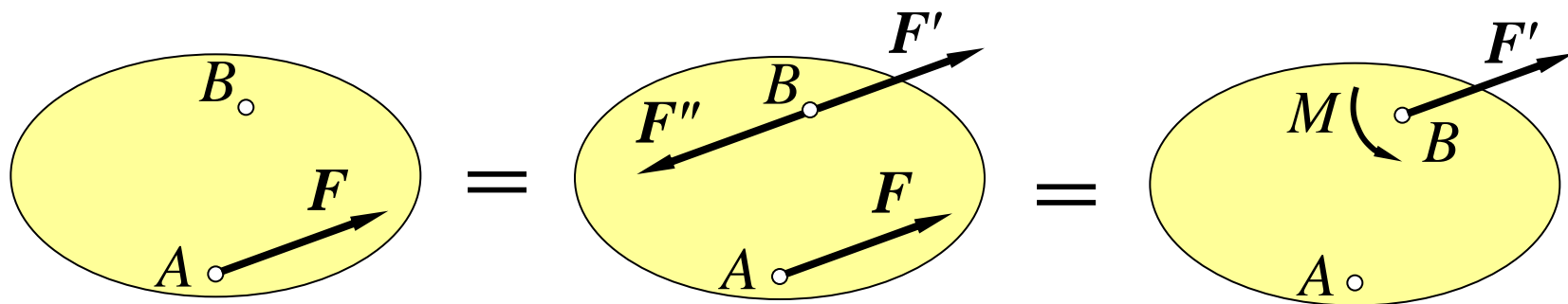


## § 2-3 平面任意力系的简化

### 一、力线平移定理

力线  
平移  
定理

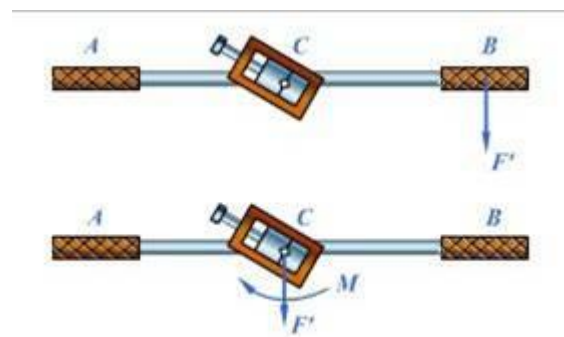
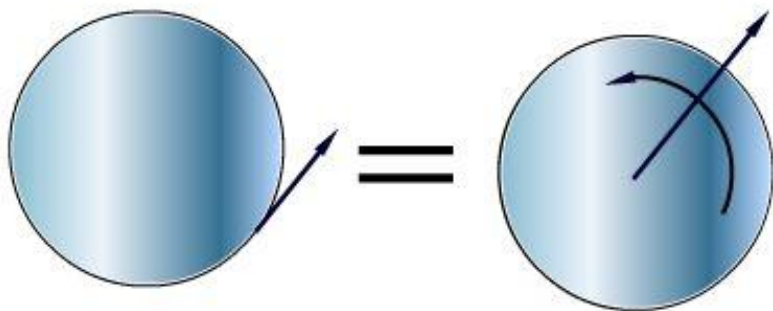
作用在刚体上的力可以平行移到**同一刚体**内任意一点，但同时必须附加一个力偶。附加力偶的力偶矩等于原来的力对新作用点的矩。



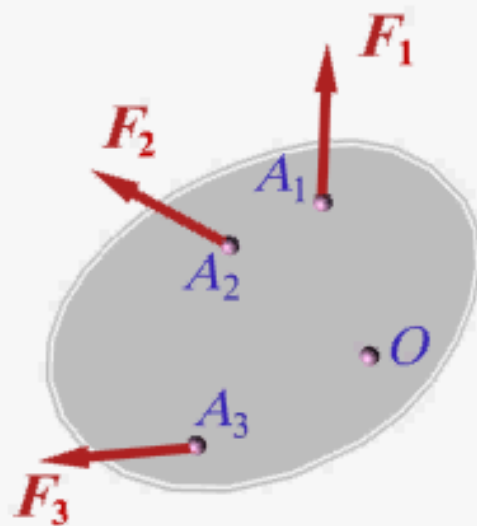
[证] 力 $F \longrightarrow$  力系  $F, F', F'' \longrightarrow$  力 $F' +$  力偶  $(F, F'')$

说明：

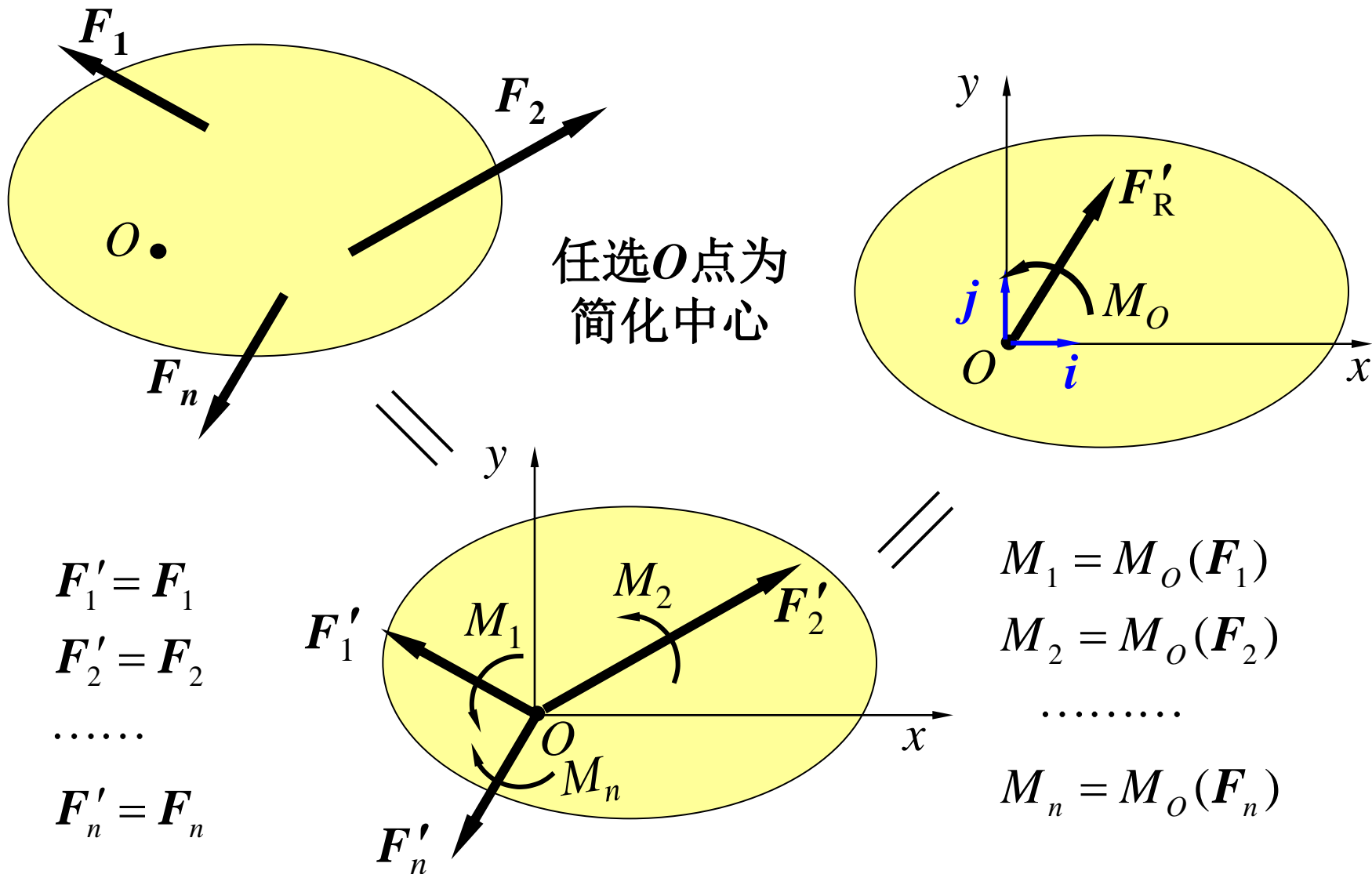
- ①力线平移定理揭示了力与力偶的关系：力 $\rightarrow$ 力+力偶；  
（例如一个力攻丝时容易攻坏螺纹或折断丝锥）
- ②力线平移的条件是附加一个力偶 $M$ ，且 $M=F \cdot d$ ；
- ③一个力和一个力偶也可合成为一个力，即力线平移定理的反定理同样成立：力+力偶 $\rightarrow$ 力；
- ④力线平移定理是力系简化的理论基础。



## 平面任意力系向平面内任一点的简化



## 二、平面任意力系向一点的简化





平面任意力系

向一点简化



平面汇交力系+平面力偶系

其中平面汇交力系的合力为

$$\vec{F}'_R = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \cdots + \vec{F}'_n = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_i$$

平面力偶系的合力偶为

$$\begin{aligned} M_O &= M_1 + M_2 + \cdots + M_n \\ &= M_O(\vec{F}_1) + M_O(\vec{F}_2) + \cdots + M_O(\vec{F}_n) = \sum M_O(\vec{F}_i) \end{aligned}$$

平面汇交力系的合力  $F'_R$ ，不是原来任意力系的合力。

平面力偶系的合力偶  $M_O$  也不是原来任意力系的合力偶。

原力系各力的矢量和，称为原力系的主矢。**(不是原力系的合力)**

**主矢**  $\vec{F}'_R = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \cdots + \vec{F}'_n = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_i$

原力系各力对简化中心的矩，称为原力系对简化中心的主矩。

**主矩**  $M_O = M_1 + M_2 + M_3 + \cdots$   
 $= M_O(\vec{F}_1) + M_O(\vec{F}_2) + \cdots = \sum M_O(\vec{F}_i)$

移动  
效应

主矢  $\vec{F}'_R$  {

大小:  $F'_R = \sqrt{F'^2_{Rx} + F'^2_{Ry}} = \sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2}$

方向:  $\cos(\vec{F}'_R, \vec{i}) = \frac{\sum F_{ix}}{F'_R}, \cos(\vec{F}'_R, \vec{j}) = \frac{\sum F_{iy}}{F'_R}$

主矢与简化中心位置无关  
(因主矢等于各力的矢量和)

转动  
效应

主矩 $M_o$

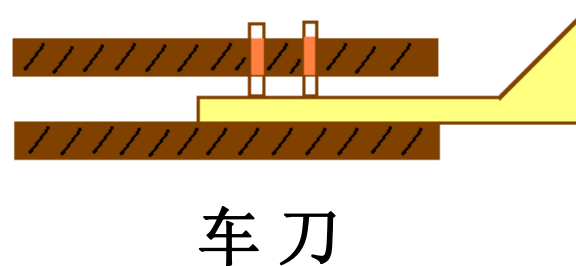
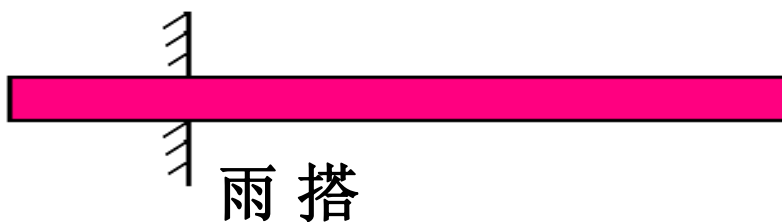
大小:  $M_o = \sum M_o(\vec{F}_i)$

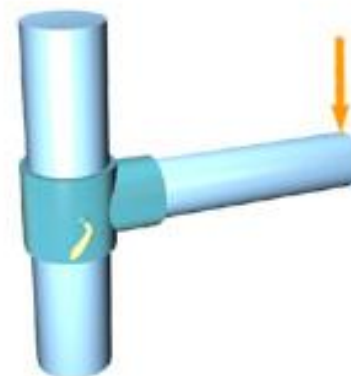
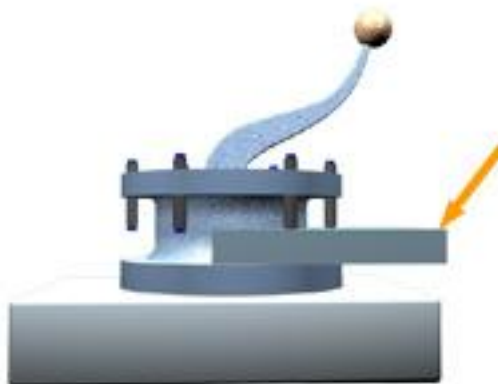
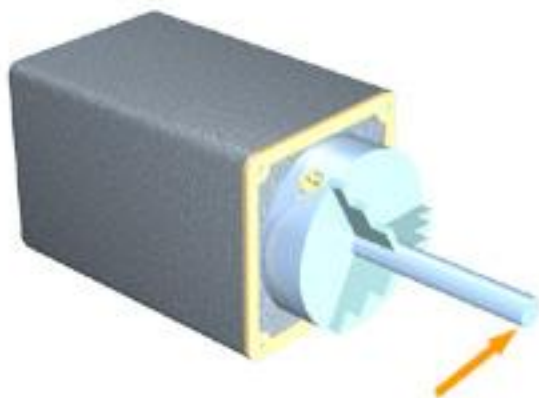
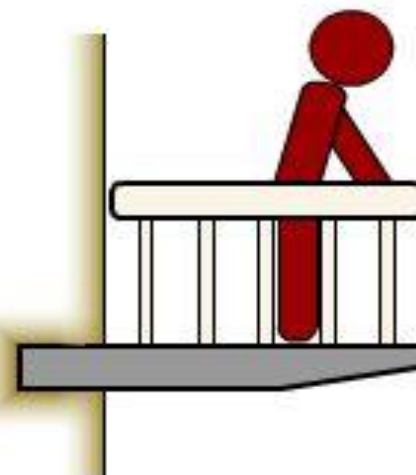
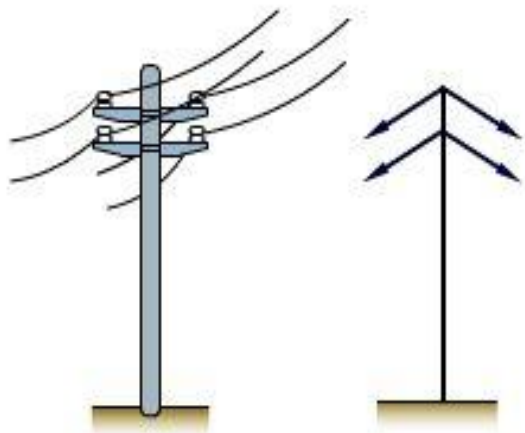
转向: 转向规定 +  - 

主矩一般与简化中心有关

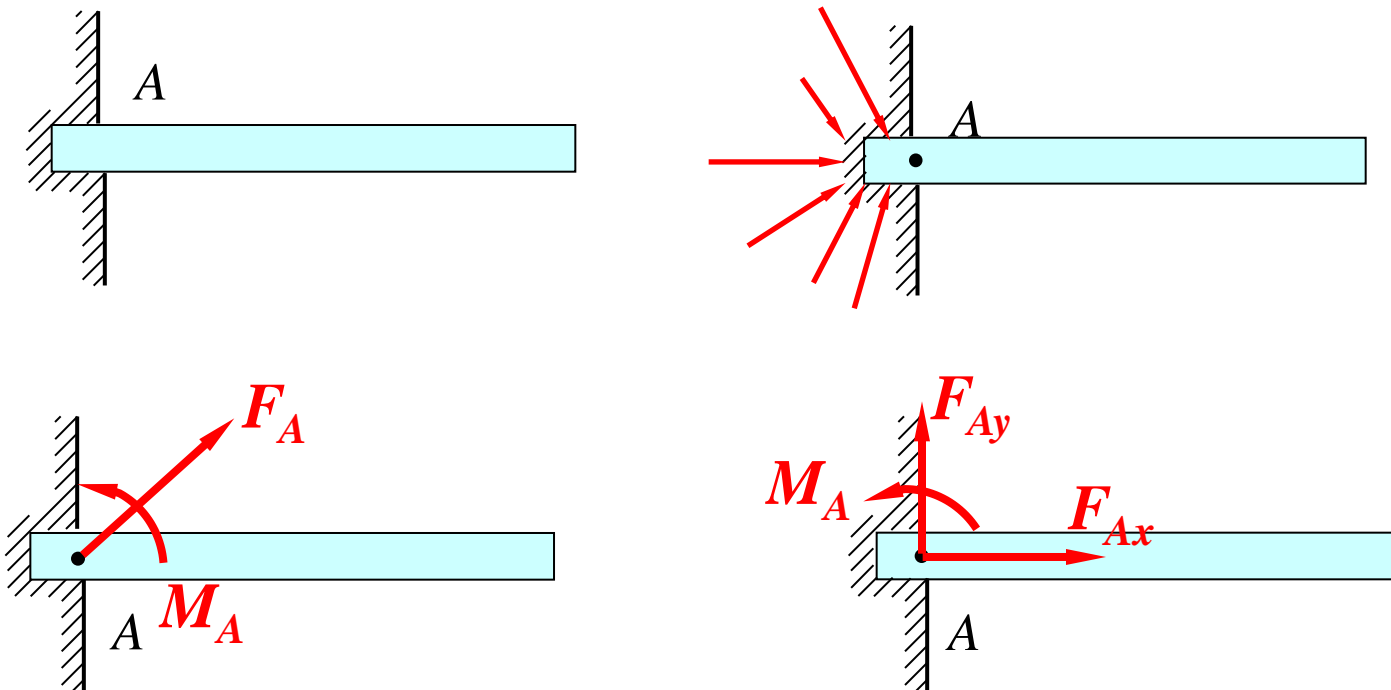
(因主矩等于各力对简化中心之矩的代数和)

固定端（插入端）约束



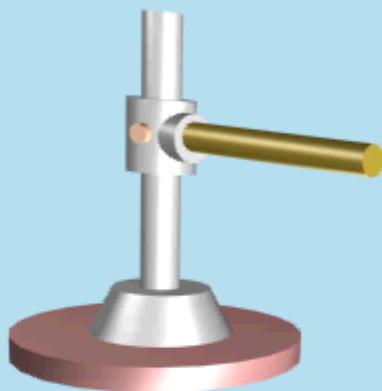


一物体的一端完全固定在另一物体上所构成的约束称为**固定端**约束。（与固定铰不同）

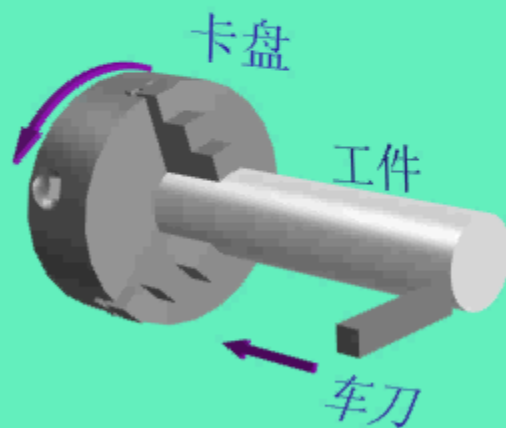


$F_{Ax}$ 、 $F_{Ay}$ 、 $M_A$ 为固定端的约束力；  
 $F_{Ax}$ 、 $F_{Ay}$ 限制物体移动， $M_A$ 限制物体转动。

## 插入端约束实例



# 插入端约束实例





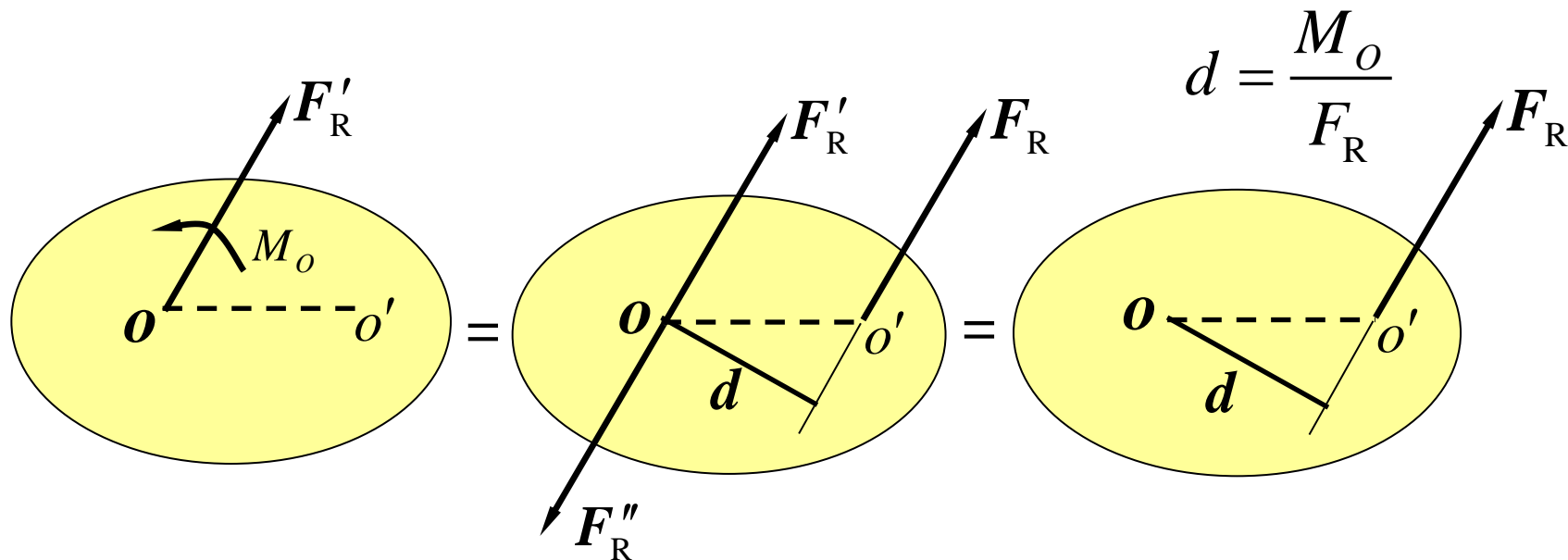


### 三、平面任意力系简化结果分析

平面任意力系向作用面内一点简化得一力和一力偶，该力等于原力系的主矢，力偶矩等原力系对简化中心的主矩。下面针对主矢、主矩的不同情况分别加以讨论。

- 1、若  $\vec{F}'_R = 0, M_O \neq 0$ ，则力系合成为**合力偶**，合力偶矩等于原力系对简化中心的主矩  $M_O$ ，**此时主矩与简化中心的位置无关。**
- 2、若  $\vec{F}'_R \neq 0, M_O = 0$ ，则力系合成为一个**合力**，主矢  $\vec{F}'_R$  等于原力系的合力矢  $\vec{F}_R$ ，合力  $\vec{F}_R$  通过简化中心  $O$  点。**（合力与简化中心位置有关，换个简化中心，主矩不为零）**

3、若  $\vec{F}'_R \neq 0, M_O \neq 0$ ，则力系仍合成为一个**合力**，合力等于原力系的主矢。作用点不在简化中心。



$$M_O(\vec{F}_R) = F_R d = M_O = \sum M_O(\vec{F}_i) \quad \text{合力矩定理}$$

4、若  $\vec{F}'_R = 0, M_O = 0$ ，则该力系平衡，下节专门讨论。

## 四、平行分布载荷的简化

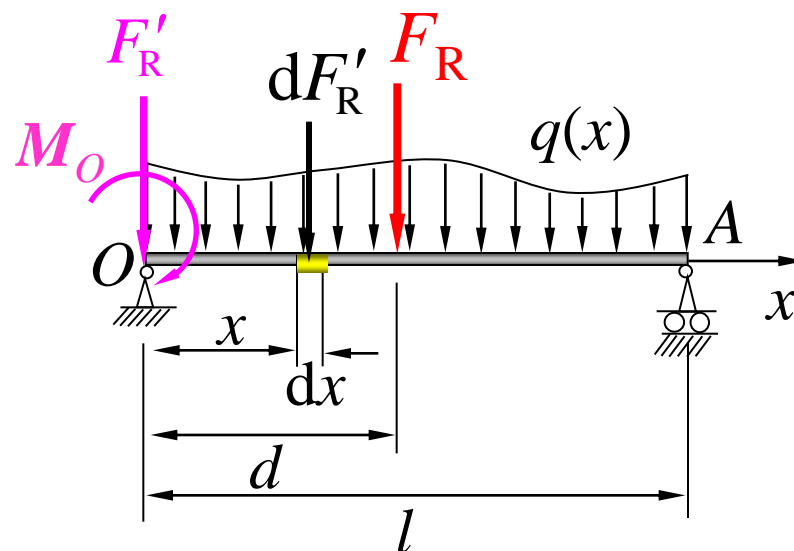
取 $O$ 点为简化中心，将力系向 $O$ 点简化。

$$dF'_R = q(x)dx$$

$$\text{主矢: } F'_R = \int_0^l q(x)dx \quad \text{主矩: } M_O = \int_0^l xq(x)dx$$

力系可进一步简化为一合力，其作用线距 $O$ 点的距离为：

$$\begin{aligned} d &= \frac{M_O}{F'_R} \\ &= \frac{\int_0^l xq(x)dx}{\int_0^l q(x)dx} \end{aligned}$$



# 平行分布载荷简化的特例

1、均布荷载  $F = ql$

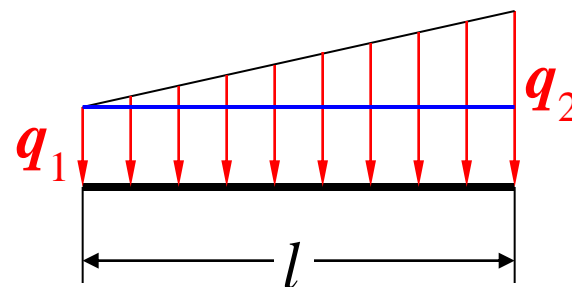
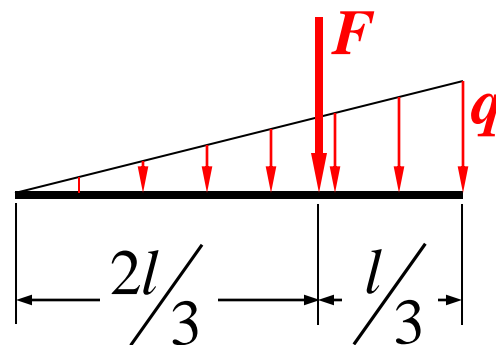
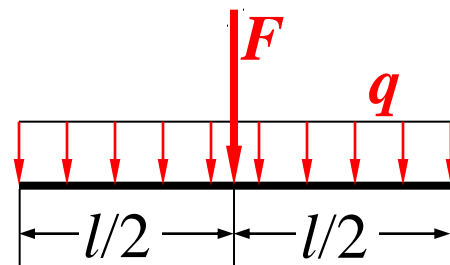
2、三角形荷载  $F = \frac{1}{2} ql$

3、梯形荷载

可以看作一个三角形荷载和一个均布荷载的叠加

结论：

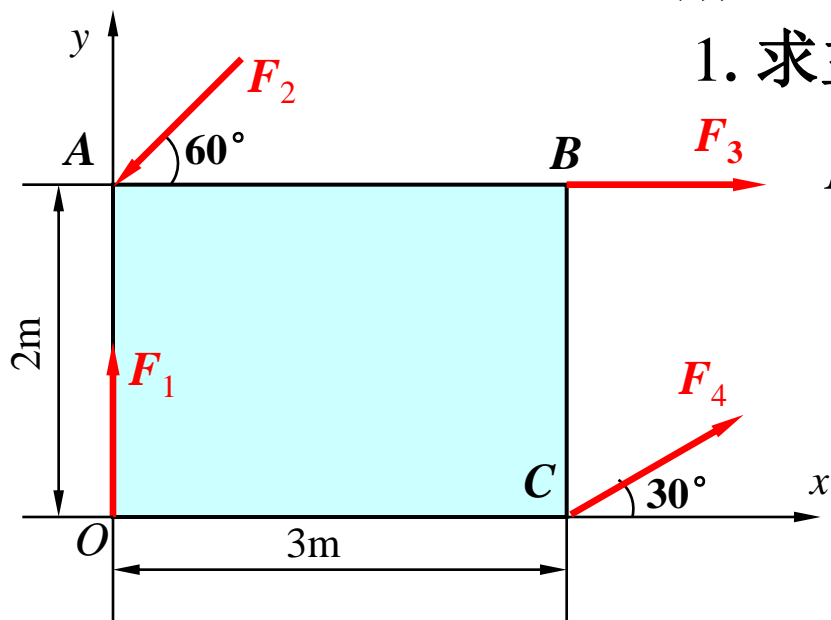
- ①合力的大小等于线荷载所组成几何图形的面积。
- ②合力的方向与线荷载的方向相同。
- ③合力的作用线通过荷载图的形心。



[例]在长方形平板的 $O$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ 点上分别作用着有四个力:  $F_1=1\text{kN}$ ,  $F_2=2\text{kN}$ ,  $F_3=F_4=3\text{kN}$  (如图), 试求以上四个力构成的力系对 $O$ 点的简化结果, 以及该力系的最后合成结果。

解: 求向 $O$ 点简化结果

1. 求主矢  $F'_R$ , 建立如图坐标系 $Oxy$ 。



$$F'_{Rx} = \sum F_x$$

$$= -F_2 \cos 60^\circ + F_3 + F_4 \cos 30^\circ$$

$$= 0.598 \text{ kN}$$

$$F'_{Ry} = \sum F_y$$

$$= F_1 - F_2 \sin 60^\circ + F_4 \sin 30^\circ$$

$$= 0.768 \text{ kN}$$

所以, 主矢的大小

$$F'_R = \sqrt{F'^2_{Rx} + F'^2_{Ry}} = 0.794 \text{ kN}$$

主矢的方向:  $\cos(\mathbf{F}'_R, \mathbf{i}) = \frac{F'_{Rx}}{F'_R} = 0.614 \quad \angle(\mathbf{F}'_R, \mathbf{i}) = 52.1^\circ$

$\cos(\mathbf{F}'_R, \mathbf{j}) = \frac{F'_{Ry}}{F'_R} = 0.789 \quad \angle(\mathbf{F}'_R, \mathbf{j}) = 37.9^\circ$

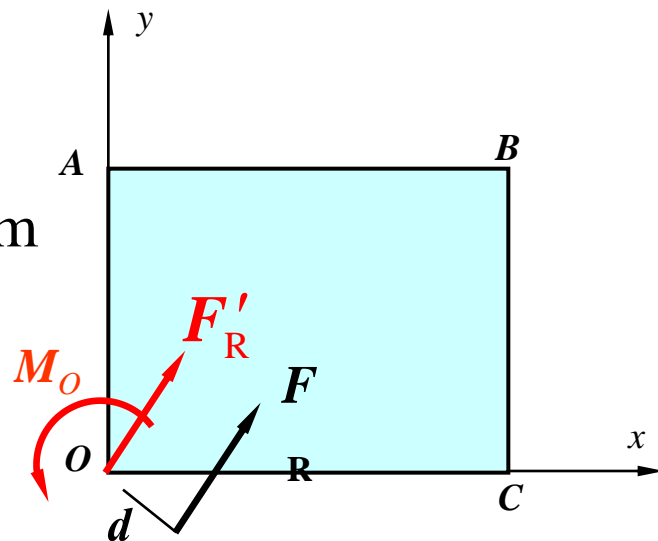
## 2. 求主矩 $M_O$

$$M_O = \sum M_O(\mathbf{F})$$

$$= 2F_2 \cos 60^\circ - 2F_3 + 3F_4 \sin 30^\circ = 0.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

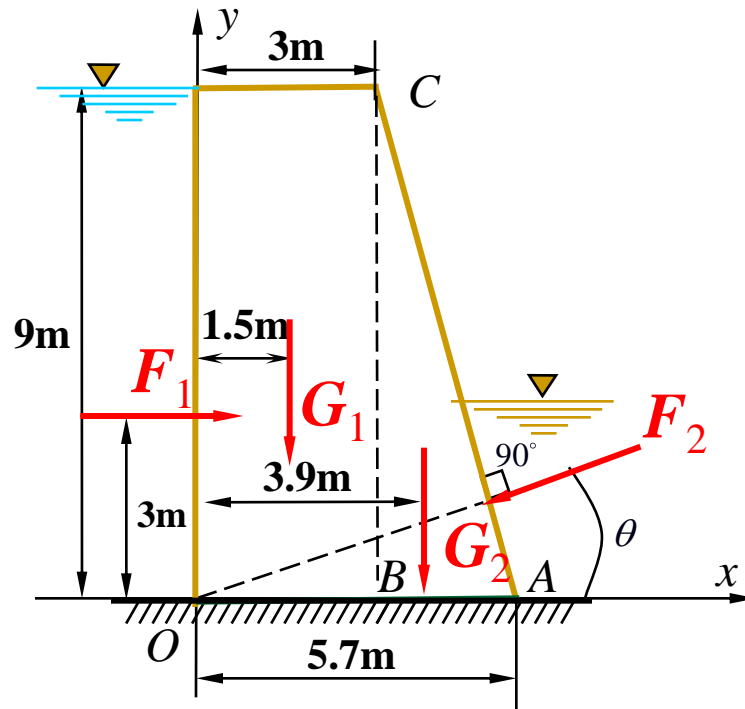
## 最后合成结果

由于主矢和主矩都不为零，所以最后合成结果是一个合力 $F_R$ 。如右图所示。



$F_R = F'_R$  合力 $F_R$ 到 $O$ 点的距离  $d = \frac{M_O}{F'_R} = 0.51 \text{ m}$

[例]重力坝受力如图所示。  
 设 $G_1=450\text{kN}$ ,  $G_2=200\text{kN}$ ,  
 $F_1=300\text{ kN}$ ,  $F_2=70\text{ kN}$ 。  
 求力系的合力 $F_R$ 的大小  
 和方向余弦,合力与基线  
 $OA$ 的交点到 $O$ 点的距离 $x$ ,  
 以及合力作用线方程。



解： 1、 求力系的合力 $F_R$ 的大小和方向余弦。

将力系向 $O$ 点简化,  $\theta = \angle ACB = \arctan \frac{AB}{CB} = 16.7^\circ$   
 主矢的投影

$$F'_{Rx} = \sum F_x = F_1 - F_2 \cos \theta = 232.9 \text{ kN}$$

$$F'_{Ry} = \sum F_y = -G_1 - G_2 - F_2 \sin \theta = -670.1 \text{ kN}$$

所以力系合力 $F_R$ 的大小

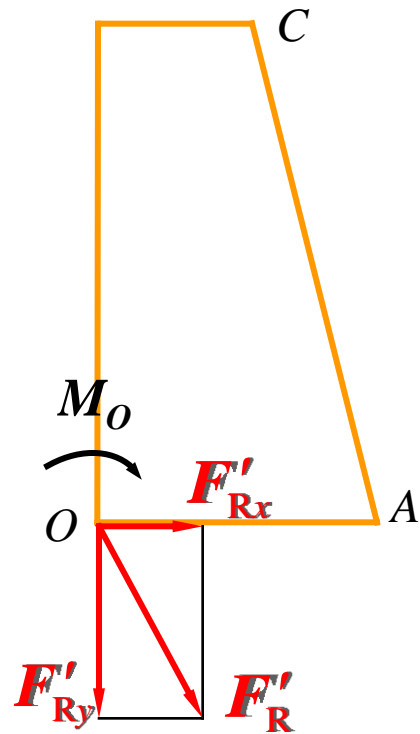
$$F_R = F'_R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} = 709.4 \text{ kN}$$

方向余弦

$$\begin{cases} \cos(F'_R, i) = \frac{\sum F_x}{F'_R} = 0.328 \\ \cos(F'_R, j) = \frac{\sum F_y}{F'_R} = -0.945 \end{cases}$$

则有

$$\begin{aligned} \angle(F'_R, i) &= \pm 70.84^\circ \\ \angle(F'_R, j) &= 180^\circ \pm 19.16^\circ \end{aligned}$$



力系对 $O$ 点的主矩为

$$\begin{aligned} M_O &= \sum M_O(F) \\ &= -F_1 \times 3 \text{ m} - G_1 \times 1.5 \text{ m} - G_2 \times 3.9 \text{ m} = -2\,355 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$



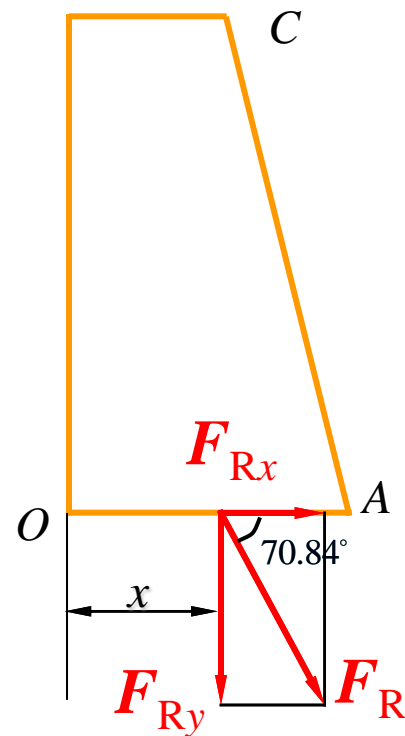
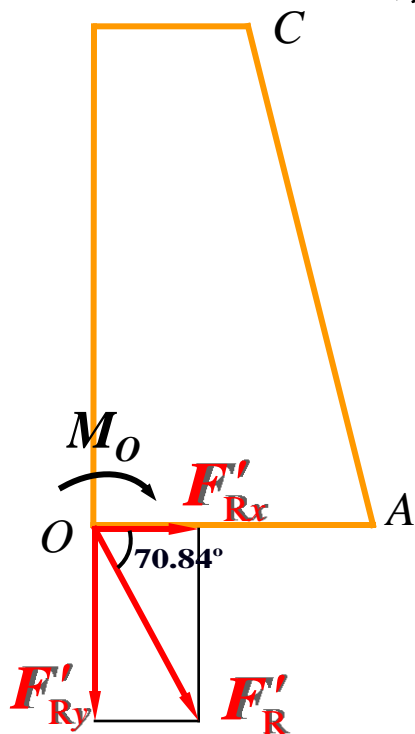
## 2、求合力与基线OA的交点到O点的距离 $x$ 。

由合力矩定理得

$$M_O = M_O(\mathbf{F}_R) = M_O(\mathbf{F}_{Rx}) + M_O(\mathbf{F}_{Ry}) \quad \text{其中} \quad M_O(\mathbf{F}_{Rx}) = 0$$

$$\text{故} \quad M_O = M_O(\mathbf{F}_{Ry}) = F_{Ry} \cdot x$$

$$\text{解得} \quad x = \frac{M_O}{F_{Ry}} = 3.514 \text{ m}$$



### 3、求合力作用线方程。

设合力作用线上任一点的坐标为  $(x, y)$ ，  
将合力作用于此点，则

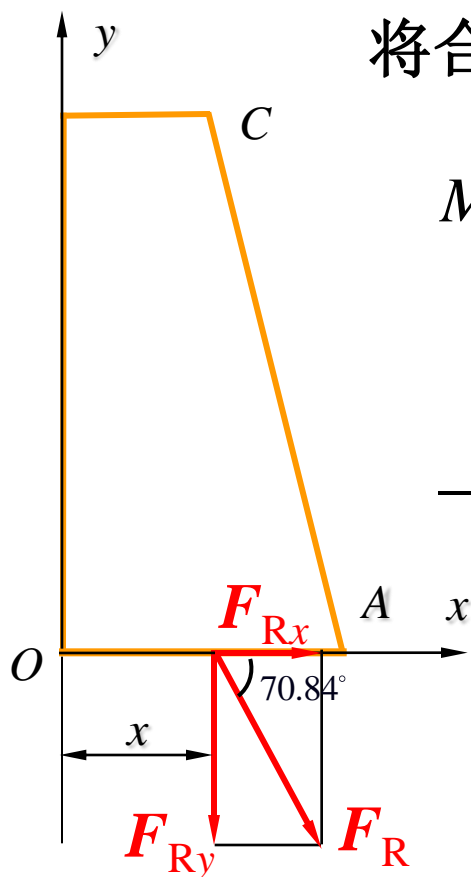
$$M_O = M_O(\mathbf{F}_R) = xF_{Ry} - yF_{Rx} = x\sum F_x - y\sum F_y$$

可得合力作用线方程

$$-2355 \text{ kN}\cdot\text{m} = (-670.1 \text{ kN}) \times x - (232.9 \text{ kN}) \times y$$

即

$$670.1 \text{ kN}\cdot x + 232.9 \text{ kN}\cdot y - 2355 \text{ kN}\cdot\text{m} = 0$$



## § 2-4 平面任意力系的平衡条件及方程

### 一、平面任意力系的平衡条件

平面任意力系平衡的必要和充分条件为：

力系的主矢  $F'_R$  和对任一点的主矩  $M_O$  都等于零，

即：

$$F'_R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2}$$

$$M_O = \sum M_O(F_i)$$

## 二、平面任意力系的平衡方程

### ①基本式

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0 \\ \sum F_{iy} = 0 \\ \sum M_O(\mathbf{F}_i) = 0 \end{cases}$$

### ②二矩式

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum M_A(\mathbf{F}) = 0 \\ \sum M_B(\mathbf{F}) = 0 \end{cases}$$

条件： $x$  轴不  
垂直  $AB$  连线

### ③三矩式

$$\begin{cases} \sum M_A(\mathbf{F}) = 0 \\ \sum M_B(\mathbf{F}) = 0 \\ \sum M_C(\mathbf{F}) = 0 \end{cases}$$

条件： $A, B, C$   
三点不共线

上式只有三个独立方程，只能求出三个未知数。

[例] 求图示刚架的约束力。

解：以刚架为研究对象，受力如图。

$$\sum F_x = 0: F_{Ax} - qb = 0$$

$$\sum F_y = 0: F_{Ay} - F = 0$$

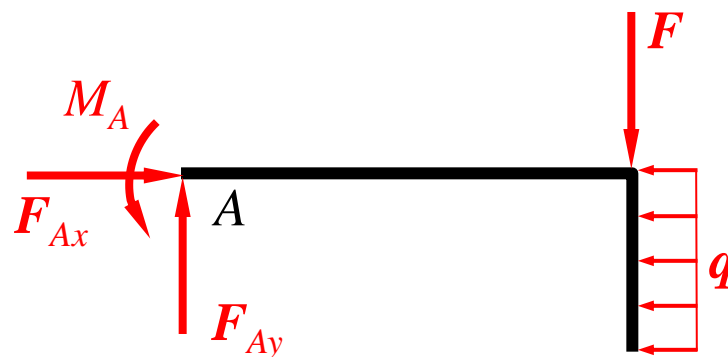
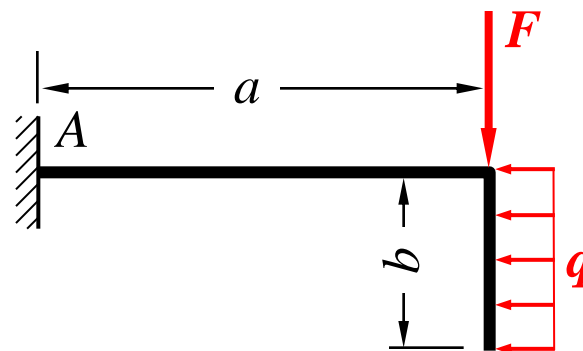
$$\sum M_A(F) = 0:$$

$$M_A - Fa - \frac{1}{2}qb^2 = 0$$

解之得：  $F_{Ax} = qb$

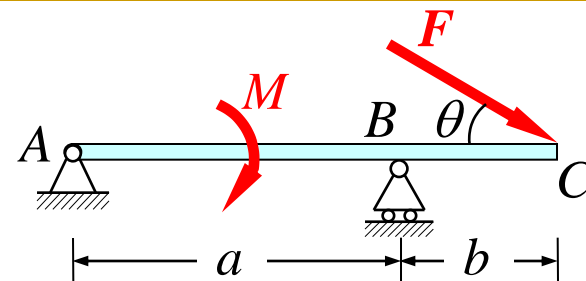
$$F_{Ay} = F$$

$$M_A = Fa + \frac{1}{2}qb^2$$



[例] 求图示梁的支座约束力。

解：以梁为研究对象，受力如图。



$$\sum F_x = 0: F_{Ax} + F \cos \theta = 0$$

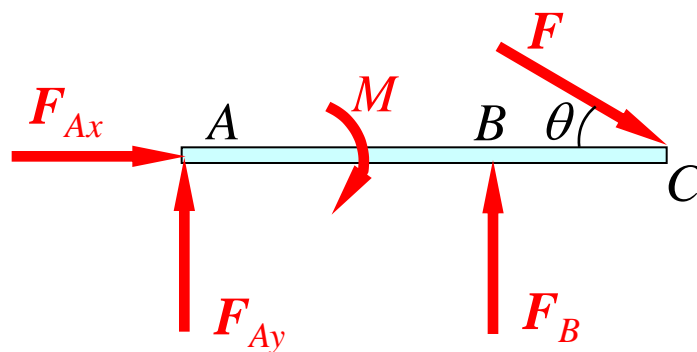
$$\sum F_y = 0: F_{Ay} + F_B - F \sin \theta = 0$$

$$\sum M_A(F) = 0: F_B a - F \sin \theta \cdot (a + b) - M = 0$$

解之得：  $F_{Ax} = -F \cos \theta$

$$F_{Ay} = -\frac{M + Fb \sin \theta}{a}$$

$$F_B = \frac{M + F \sin \theta (a + b)}{a}$$



[例] 外伸梁的尺寸及载荷如图所示,  $F_1=2\text{ kN}$ ,  $F_2=1.5\text{ kN}$ ,  $M=1.2\text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $l_1=1.5\text{ m}$ ,  $l_2=2.5\text{ m}$ , 试求铰支座A及支座B的约束力。

解: 1、取梁为研究对象, 受力分析如图

2、列平衡方程

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} - F_2 \cos 60^\circ = 0$$

$$\sum M_A(F) = 0$$

$$F_B l_2 - M - F_1 l_1 - F_2 (l_1 + l_2) \sin 60^\circ = 0$$

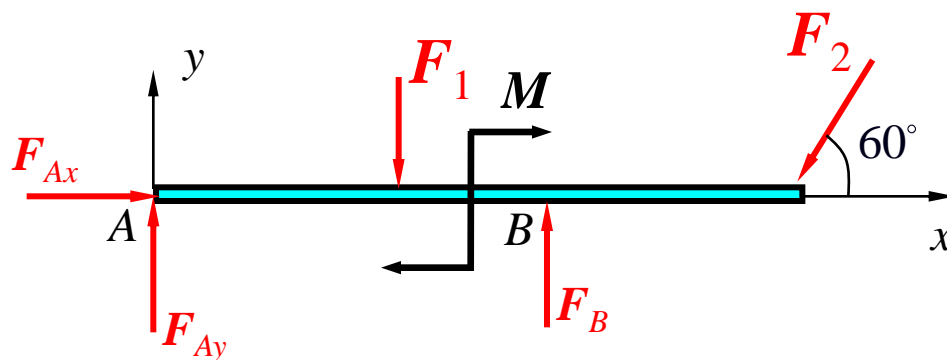
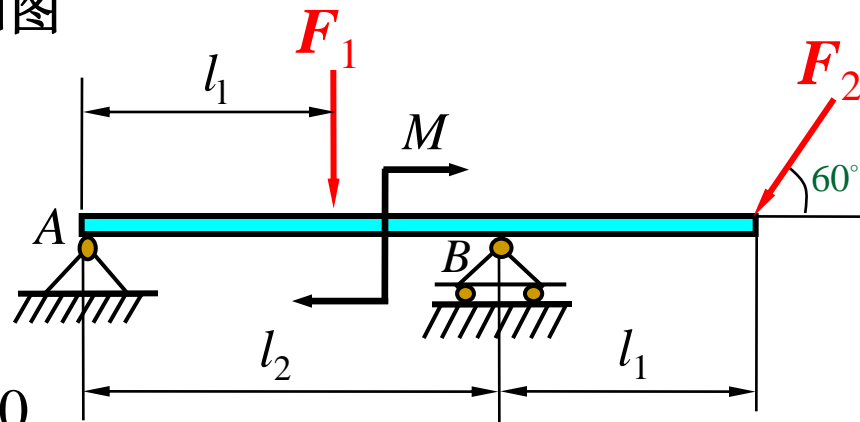
$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} + F_B - F_1 - F_2 \sin 60^\circ = 0$$

3、解方程

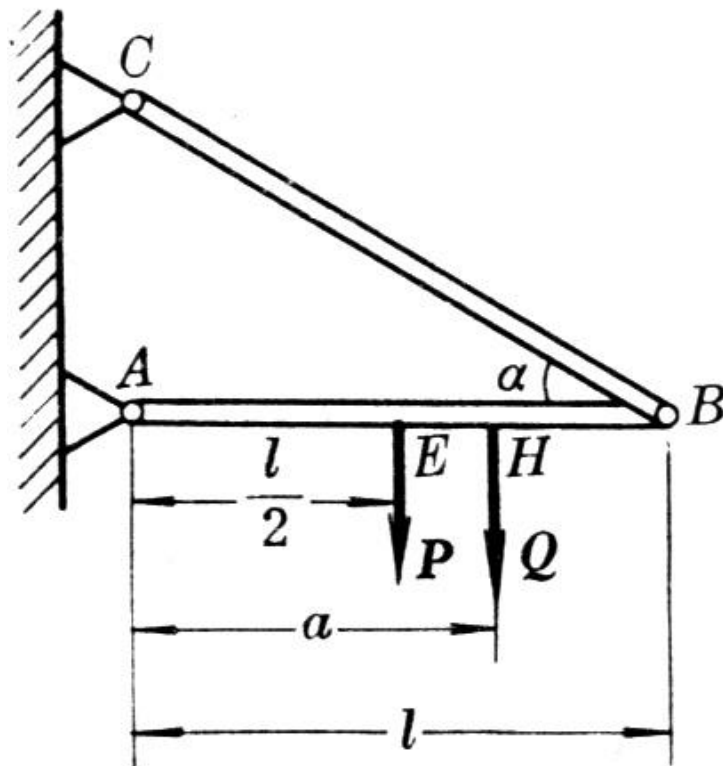
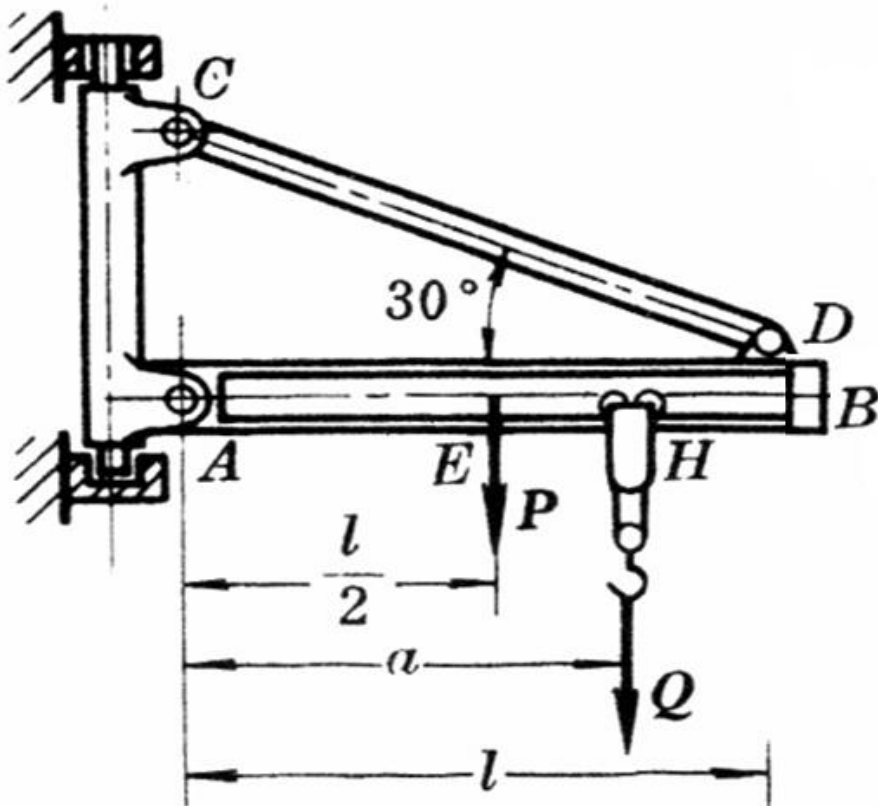
$$F_{Ax} = 0.75\text{ kN}$$

$$F_B = 3.56\text{ kN}$$

$$F_{Ay} = -0.261\text{ kN}$$



[例] 悬臂吊车如图所示。横梁  $AB$  长  $l=2.5\text{ m}$ ，重量  $P=1.2\text{ kN}$ ，拉杆  $CB$  的倾角  $\alpha=30^\circ$ ，质量不计，载荷  $Q=7.5\text{ kN}$ 。求图示位置  $a=2\text{ m}$  时拉杆的拉力和铰链  $A$  的约束力。





解：取横梁AB为研究对象, 受力如图

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} - F_T \cos \alpha = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} + F_T \sin \alpha - P - Q = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_A(F) = 0$$

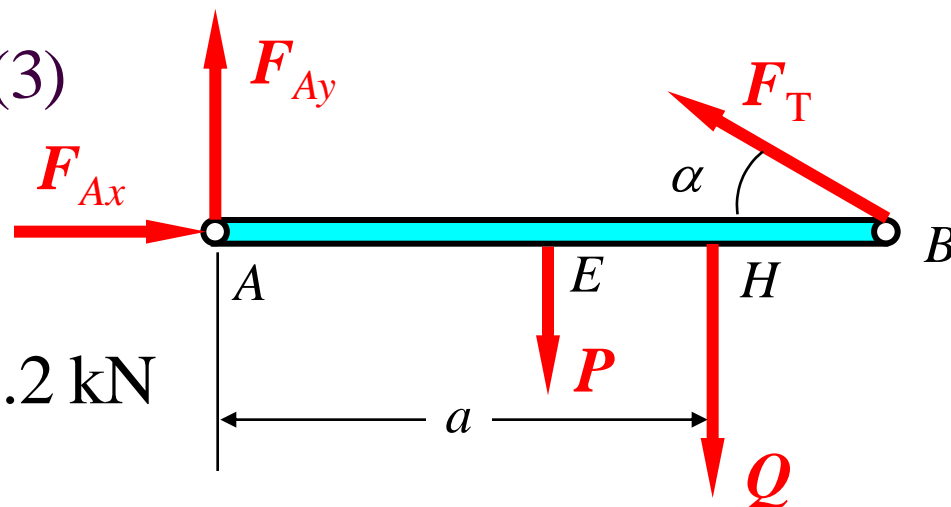
$$F_T \sin \alpha \cdot l - P \cdot \frac{l}{2} - Qa = 0 \quad (3)$$

解得

$$F_T = \frac{1}{\sin \alpha \cdot l} (P \cdot \frac{l}{2} + Qa) = 13.2 \text{ kN}$$

$$F_{Ax} = F_T \cos \alpha = 11.43 \text{ kN}$$

$$F_{Ay} = Q + P - F_T \sin \alpha = 2.1 \text{ kN}$$



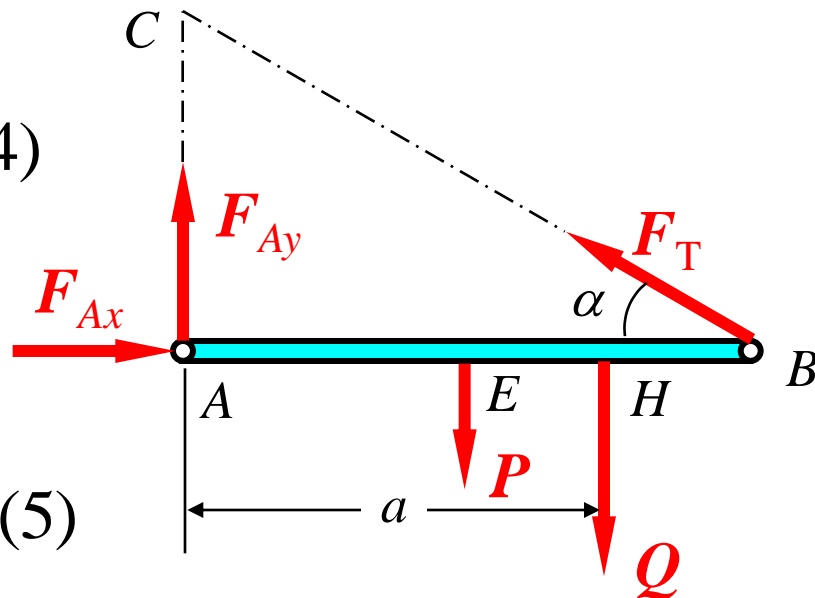
或分别取 $B$ 和 $C$ 为矩心列平衡方程  
得

$$\sum M_B(F) = 0$$

$$P \cdot \frac{l}{2} + Q \cdot (l - a) - F_{Ay} \cdot l = 0 \quad (4)$$

$$\sum M_C(F) = 0$$

$$F_{Ax} \tan \alpha \cdot l - P \cdot \frac{l}{2} - Qa = 0 \quad (5)$$



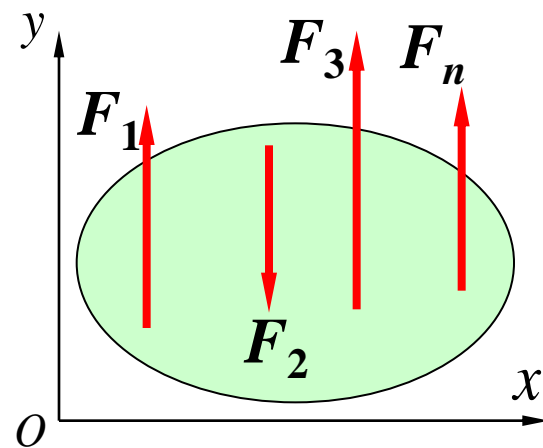
注意每个对象独立的平衡方程只有3个。

### 三、平面平行力系平衡方程

力的作用线在同一平面且相互平行的力系称平面平行力系。

平面平行力系为平面任意力系的特殊情况，当它平衡时，也应满足平面任意力系的平衡方程，选如图的坐标，则 $\sum F_x = 0$ 自然满足。于是平面平行力系的平衡方程为：

$$\sum F_y = 0; \quad \sum M_O(F) = 0$$

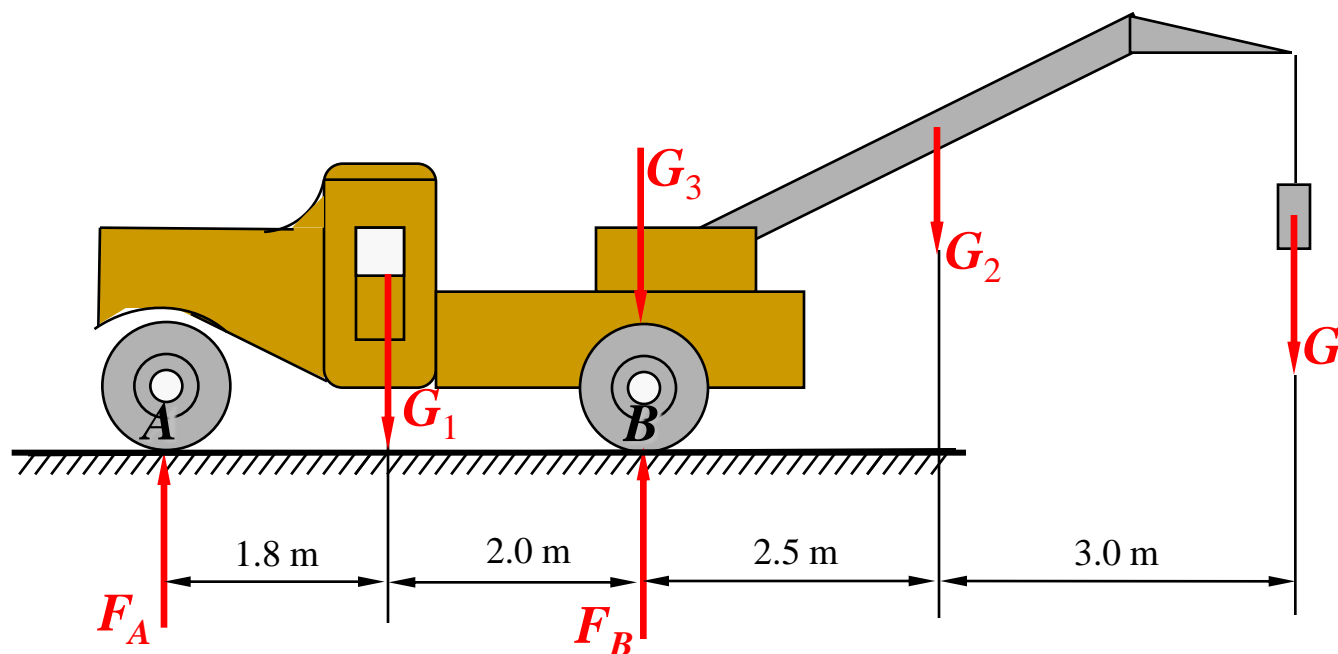


平面平行力系的平衡方程也可表示为二矩式：

$$\sum M_A(F) = 0; \quad \sum M_B(F) = 0$$

其中 $AB$ 连线不能与各力的作用线平行。

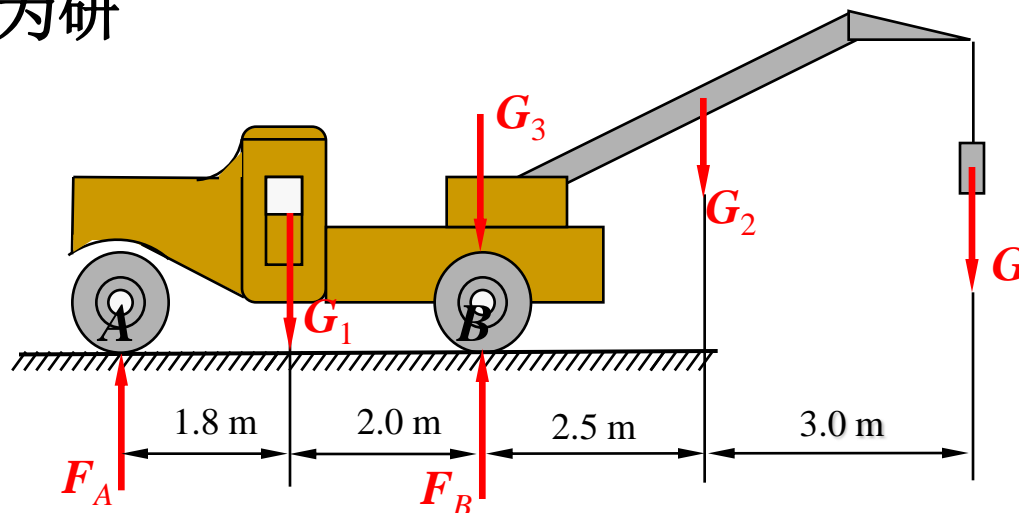
[例] 一种车载式起重机，车重 $G_1 = 26\text{kN}$ ，起重机伸臂重 $G_2 = 4.5\text{kN}$ ，起重机的旋转与固定部分共重 $G_3 = 31\text{kN}$ 。尺寸如图所示。设伸臂在起重机对称面内，且放在图示位置，试求车子不致翻倒的最大起吊重量 $G_{\max}$ 。



解： 1、取汽车及起重机为研究对象，受力分析如图。

2、列平衡方程

$$\sum F = 0$$



$$F_A + F_B - G - G_1 - G_2 - G_3 = 0$$

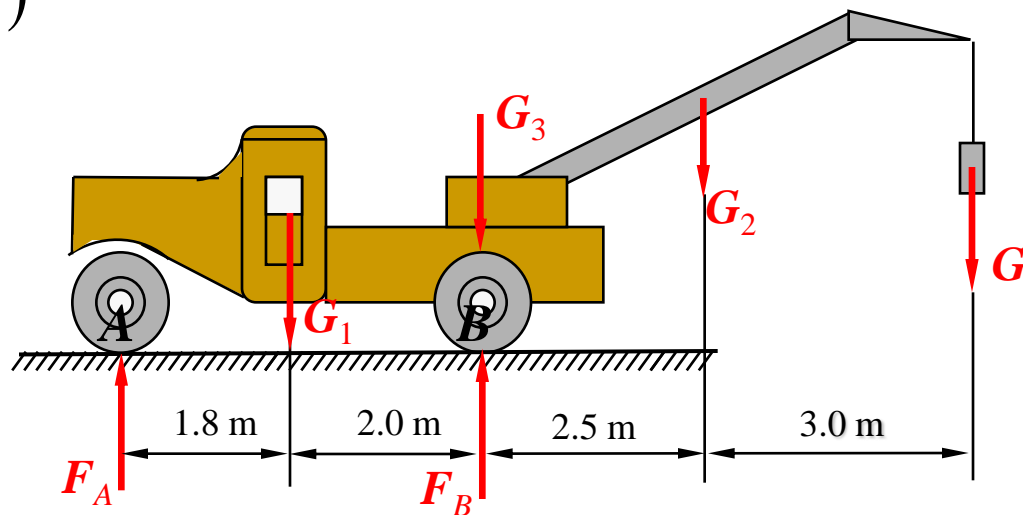
$$\sum M_B(F) = 0$$

$$-G(2.5\text{ m} + 3\text{ m}) - G_2 \times 2.5\text{ m} + G_1 \times 2\text{ m} - F_A(1.8\text{ m} + 2\text{ m}) = 0$$

### 3、联立求解

$$F_A = \frac{1}{3.8}(2G_1 - 2.5G_2 - 5.5G)$$

4、不翻倒的条件是：  $F_A \geq 0$ ，  
所以由上式可得



$$G \leq \frac{1}{5.5}(2G_1 - 2.5G_2) = 7.5 \text{ kN}$$

故最大起吊重量为  $G_{\max} = 7.5 \text{ kN}$

## § 2-5 静定与静不定 物系的平衡

### 一、静定与静不定问题的概念

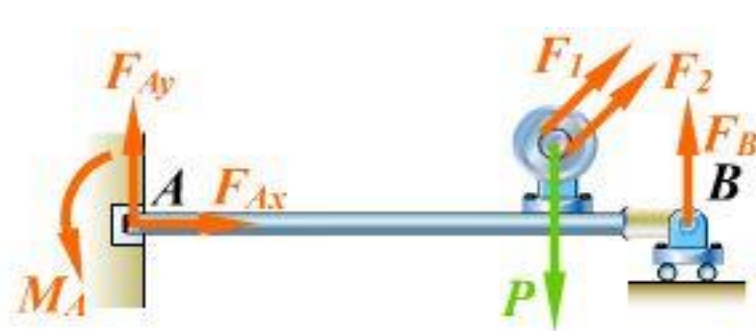
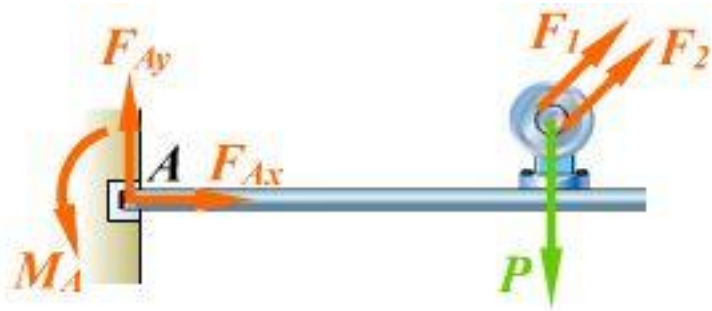
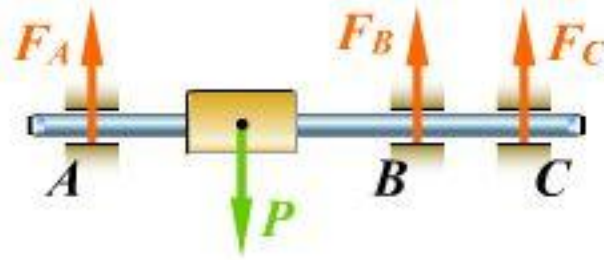
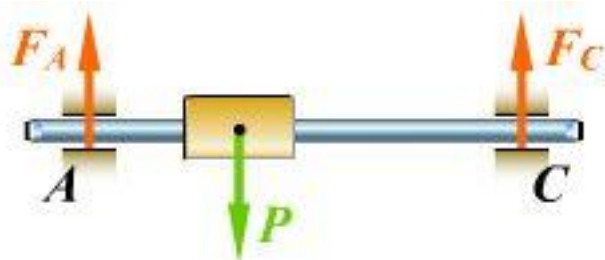
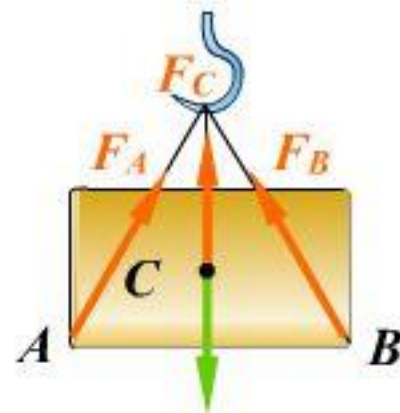
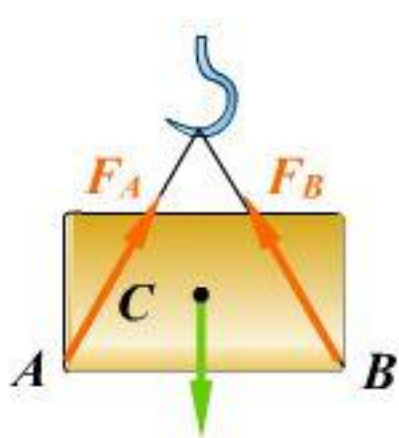
平面汇交力系  $\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$  两个独立方程，只能求两个独立未知数。

平面力偶系  $\sum M_i = 0$  一个独立方程，只能求一个独立未知数。

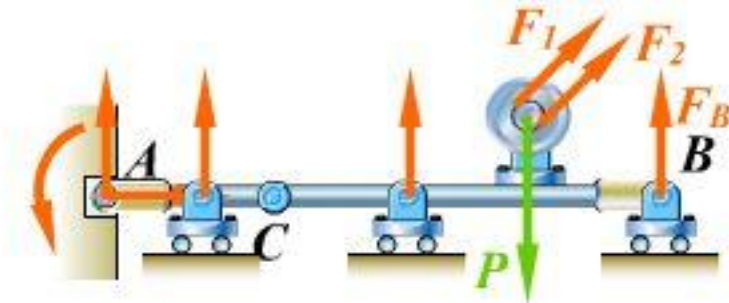
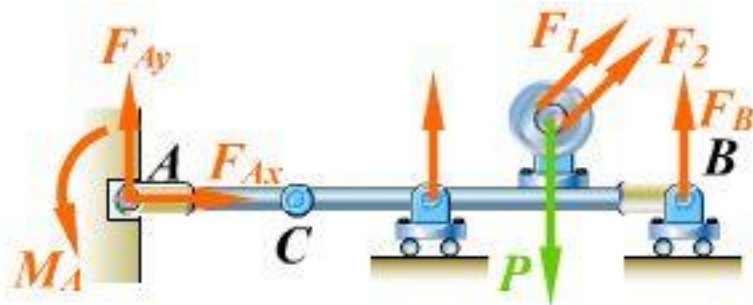
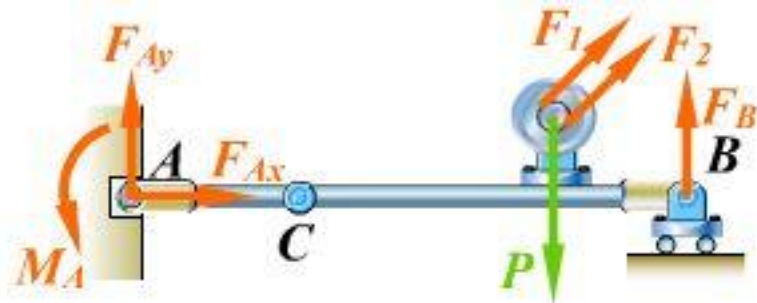
平面任意力系  $\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_O(F_i) = 0 \end{cases}$  三个独立方程，只能求三个独立未知数。

当：独立方程数目  $\geq$  未知数数目时，是静定问题（可求解）

独立方程数目  $<$  未知数数目时，是静不定问题（超静定问题）



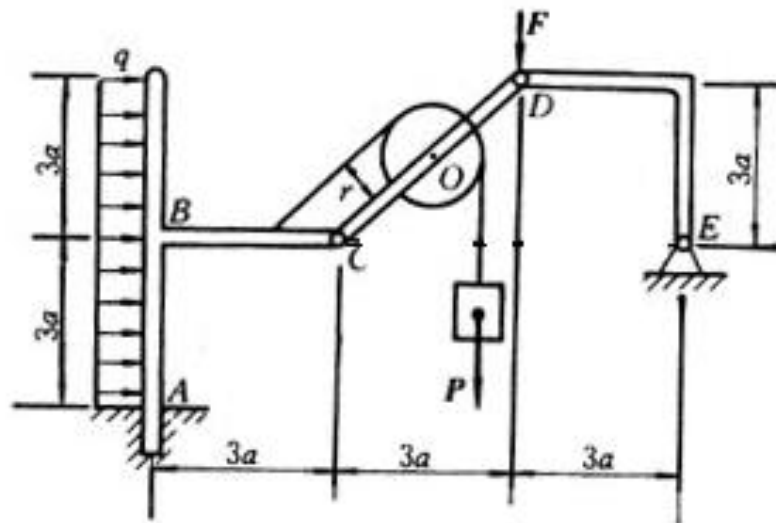




静不定问题在变形体力学（材力, 结力, 弹力）  
中用位移谐调条件来求解。

## 二、物体系统的平衡问题

物体系统（物系）：由若干个物体通过约束所组成的系统。



外力：外界物体作用于系统上的力叫外力。

内力：系统内部各物体之间的相互作用力叫内力。

外力、内力都是某研究对象而言的，  
对不同的研究对象而言，可转换。

## 物系平衡的特点：

- ①物系静止，物系中每个单体也是平衡的；
- ②每个单体可列3个平衡方程，整个系统可列  $3n$  个方程（设物系中有  $n$  个物体）

## 解物系问题的一般方法：

由整体  $\longrightarrow$  局部                  由局部  $\longrightarrow$  整体

由问题性质决定

## 三、解题步骤与技巧

### 解题步骤

①选研究对象

②画受力图（受力分析）

③选坐标、取矩点、列

平衡方程。

④解方程求出未知数

### 解题技巧

①选坐标轴最好是未知力⊥投影轴；

②取矩点最好选在未知力的交叉点上；

③充分发挥二力杆的直观性；

④灵活使用合力矩定理。

## 四、注意问题

力偶在坐标轴上的投影不存在；

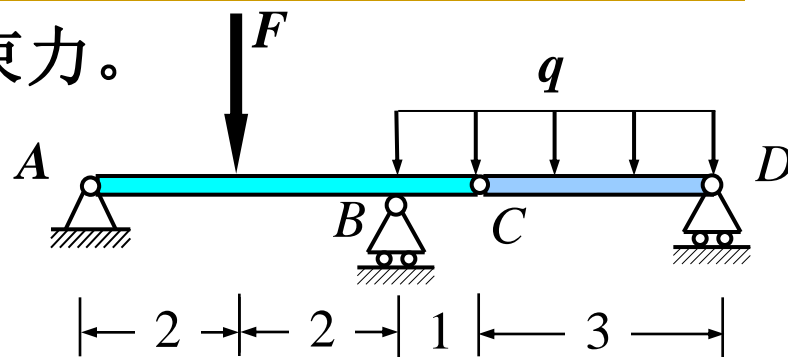
力偶矩 $M$  = 常数，它与坐标轴和取矩点的选择无关。

[例] 求图示多跨静定梁的支座约束力。

解：先以CD为研究对象，受力如图。

$$\sum M_C(F) = 0: 3F_D - 3q \cdot \frac{3}{2} = 0$$

$$F_D = \frac{3}{2}q$$



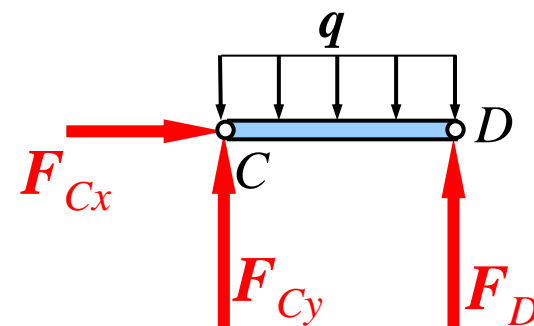
再以整体为研究对象，受力如图。

$$\sum F_x = 0: F_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0: F_{Ay} + F_B + F_D - F - 4q = 0$$

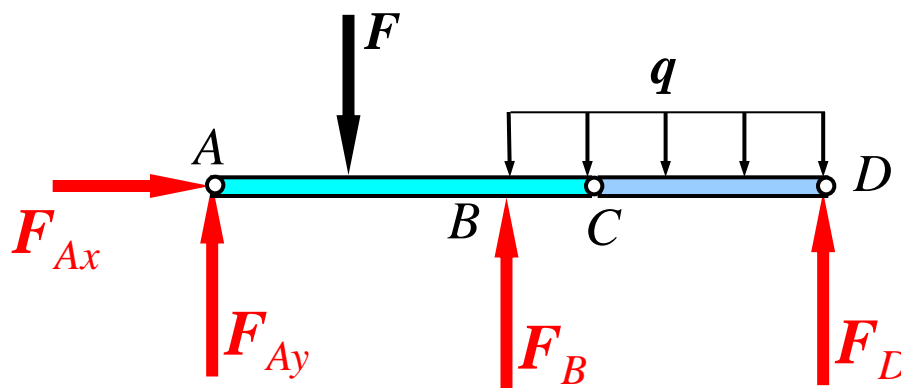
$$\sum M_A(F) = 0:$$

$$8F_D + 4F_B - 2F - 4q \cdot 6 = 0$$



解得  $F_B = \frac{1}{2}F + 3q$

$$F_{Ay} = \frac{1}{2}F - \frac{1}{2}q$$



[例] 组合梁AC和CE用铰链C相连，A端为固定端，E端为活动铰链支座。受力如图所示。已知：  $l=8\text{ m}$ ， $F=5\text{ kN}$ ，均布载荷集度 $q=2.5\text{ kN/m}$ ，力偶矩的大小 $M=5\text{ kN}\cdot\text{m}$ ，试求固端A，铰链C和支座E的约束力。

解:1.取CE段为研究对象

2.受力分析如图

3.列平衡方程

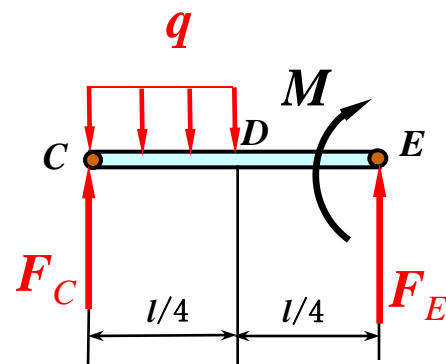
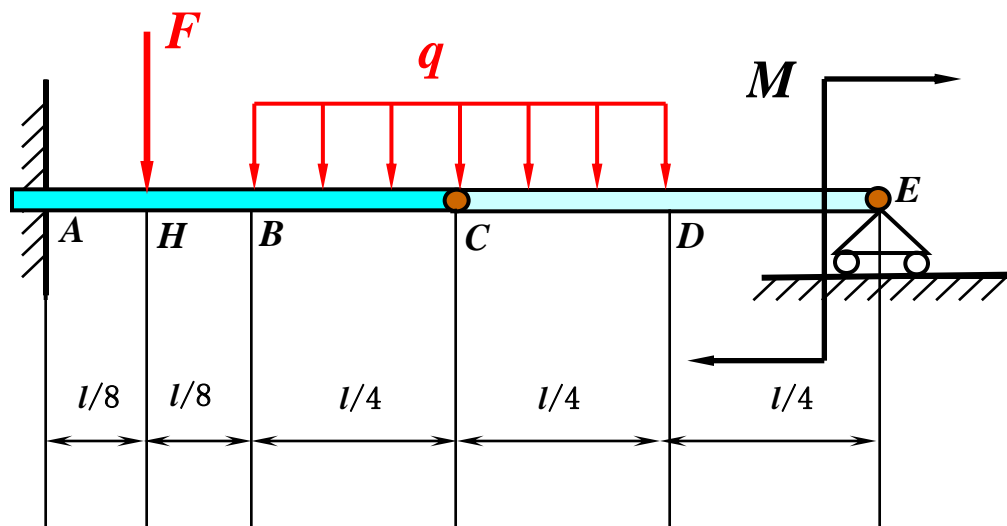
$$\sum F_y = 0 \quad F_C - q \times \frac{l}{4} + F_E = 0$$

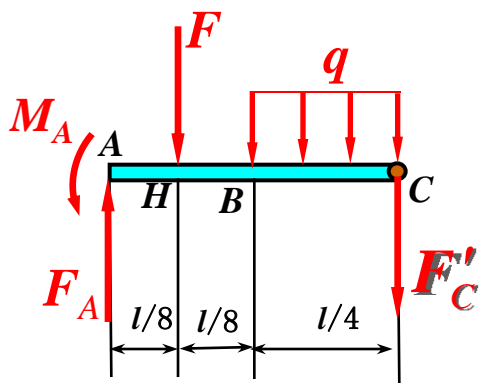
$$\sum M_C(F) = 0$$

$$-q \times \frac{l}{4} \times \frac{l}{8} - M + F_E \times \frac{l}{2} = 0$$

4. 联立求解

$$F_E = 2.5\text{ kN}, \quad F_C = 2.5\text{ kN}$$





5. 取AC段为研究对象，受力分析如图。

6. 列平衡方程。

$$\sum F_y = 0 \quad F_A - F'_C - F - q \times \frac{l}{4} = 0$$

$$\sum M_A(F) = 0$$

$$M_A - F \times \frac{l}{8} - q \times \frac{l}{4} \times \frac{3l}{8} - F'_C \times \frac{l}{2} = 0$$

7. 联立求解

$$F_A = 15 \text{ kN}, \quad M_A = -2.5 \text{ kN}$$

[例] 求图示三铰刚架的支座约束力。

解：以整体为研究对象，受力如图。

$$\sum F_x = 0: F_{Ax} + F_{Bx} + F = 0$$

$$\sum F_y = 0: F_{Ay} + F_{By} - qa = 0$$

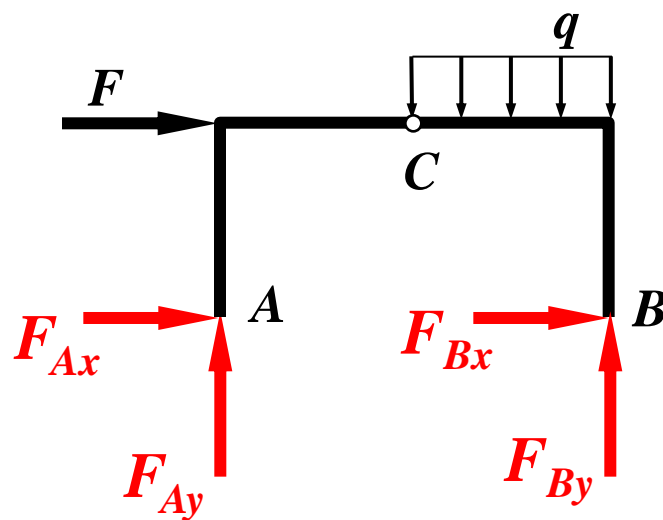
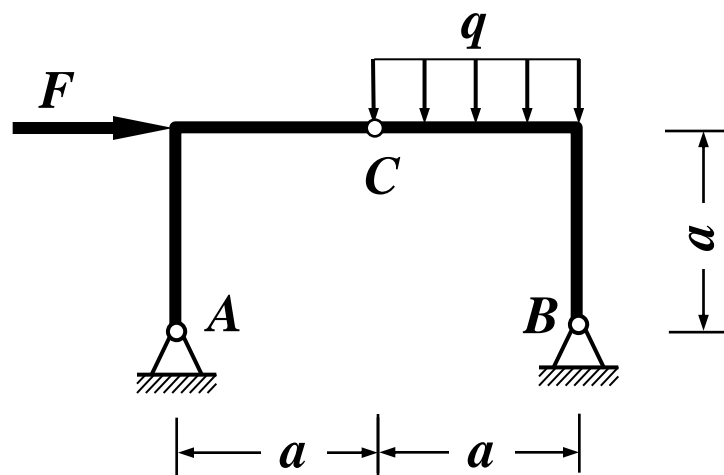
$$\sum M_A(F) = 0:$$

$$F_{By} \cdot 2a - Fa - qa \cdot \frac{3}{2}a = 0$$

解得：

$$F_{Ay} = \frac{1}{4}qa - \frac{1}{2}F$$

$$F_{By} = \frac{1}{2}F + \frac{3}{4}qa$$





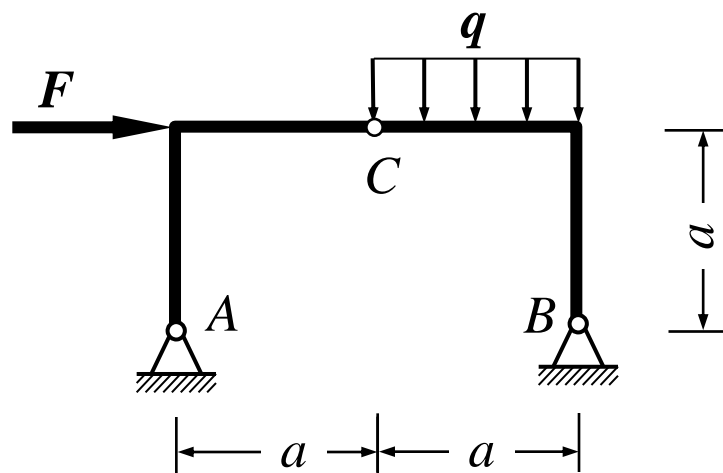
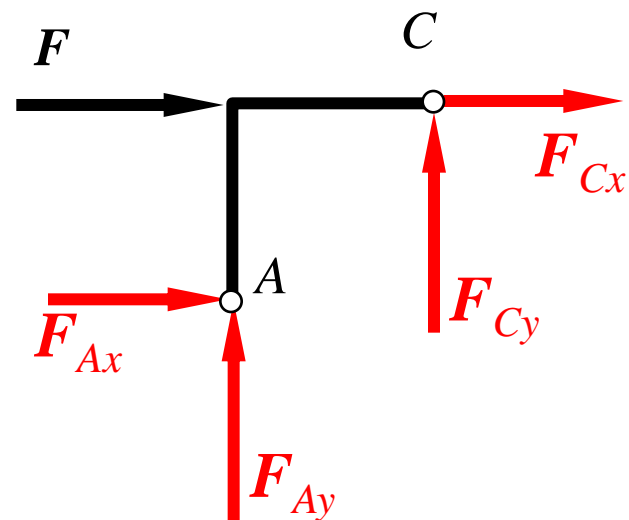
再以AC为研究对象，受力如图。

$$\sum M_C(F) = 0: F_{Ax}a - F_{Ay}a = 0$$

解得：

$$F_{Ax} = F_{Ay} = \frac{1}{4}qa - \frac{1}{2}F$$

$$F_{Bx} = -\frac{1}{2}F - \frac{1}{4}qa$$



[例]  $A, B, C, D$ 处均为光滑铰链，物块重为 $G$ ，通过绳子绕过滑轮水平地连接于杆 $AB$ 的 $E$ 点，各构件自重不计，试求 $B$ 处的约束力。

解、1.取整体为研究对象。

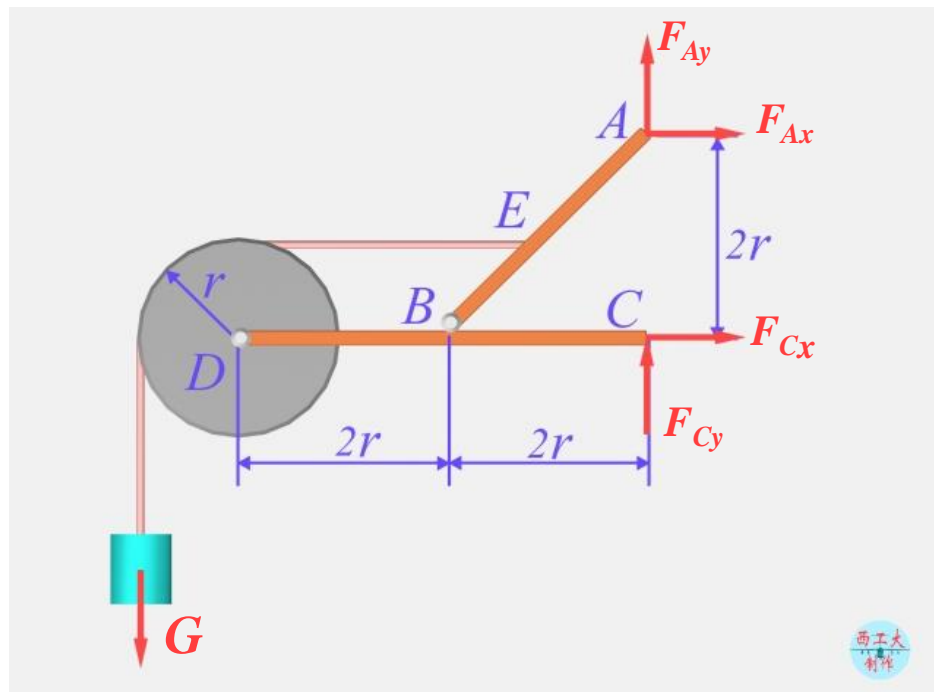
2.受力分析如图

3.列平衡方程

$$\sum M_A(F) = 0$$

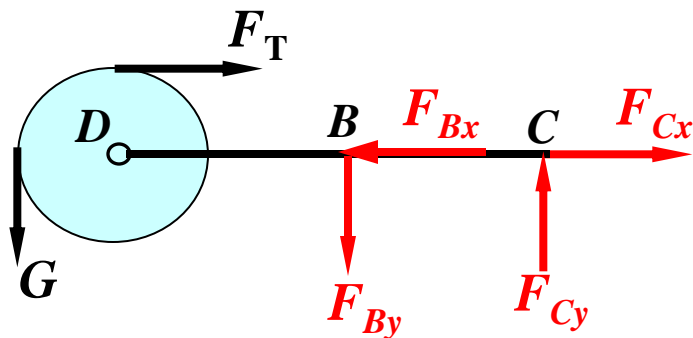
$$5rG + 2rF_{Cx} = 0$$

解得  $F_{Cx} = -2.5G$



若  $\sum M_C(F) = 0 \quad 5rG - 2rF_{Ax} = 0 \quad$  解得  $F_{Ax} = 2.5G$

4.取杆CD连滑轮为研究对象，受力分析如图。



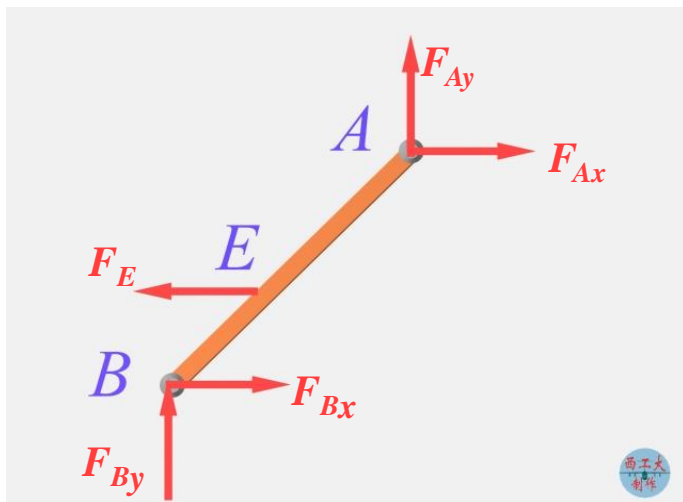
5.列平衡方程

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Cx} + F_T - F_{Bx} = 0$$

$$\sum M_C(F) = 0 \quad 2rF_{By} + 5rG - rF_T = 0$$

求解可得  $F_{Bx} = -1.5G, F_{By} = -2G$

若取杆AB为研究对象，受力分析如图。



$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} - F_{Bx} - F_E = 0$$

$$\sum M_A(F) = 0$$

$$2r \times F_{Bx} - 2r \times F_{By} - rF_E = 0$$

联立求解才得结果。

[例] 如图所示,  $DC=CE=AC=CB=2l$ ;  
定滑轮半径为 $R$ , 动滑轮半径为 $r$ ,  
且 $R=2r=l$ ,  $\theta=45^\circ$  已知重力 $P$ 。试求:  
 $A$ ,  $E$ 支座的约束力及 $BD$ 杆所受的力。

解、1. 选取整体研究对象, 受力分析如图所示。

2. 列平衡方程

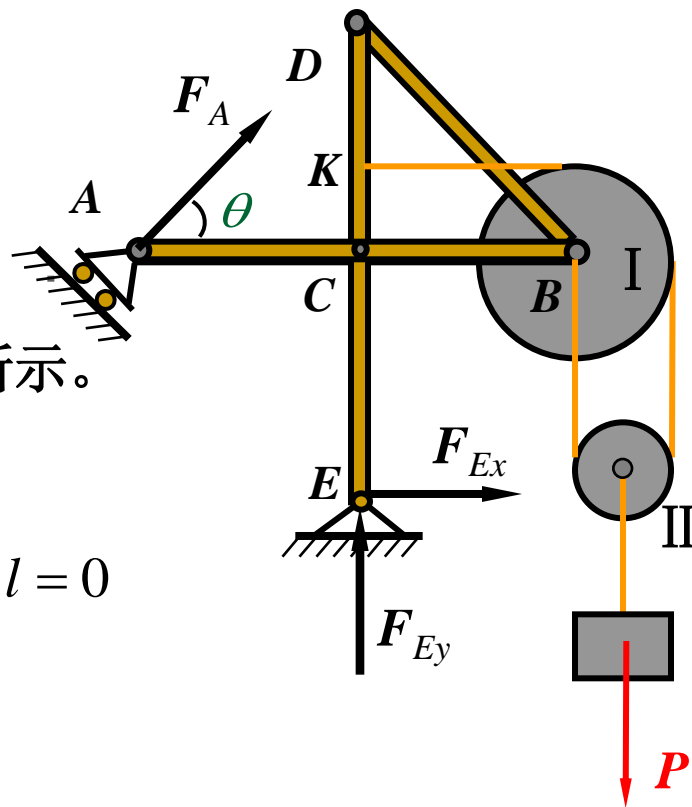
$$\sum M_E(\mathbf{F}) = 0 \quad F_A \times \sqrt{2} \times 2l + P \times \frac{5}{2}l = 0$$

$$\sum F_x = 0 \quad F_A \cos 45^\circ + F_{Ex} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_A \sin 45^\circ + F_{Ey} - P = 0$$

3. 解平衡方程得  $F_A = \frac{-5\sqrt{2}}{8}P$

$$F_{Ex} = \frac{5}{8}P, F_{Ey} = P - F_A \sin 45^\circ = \frac{13P}{8}$$



4. 选取DCE研究对象，受力分析如图所示。

5. 列平衡方程

$$\sum M_C(F) = 0 \quad \text{顺时针取正}$$

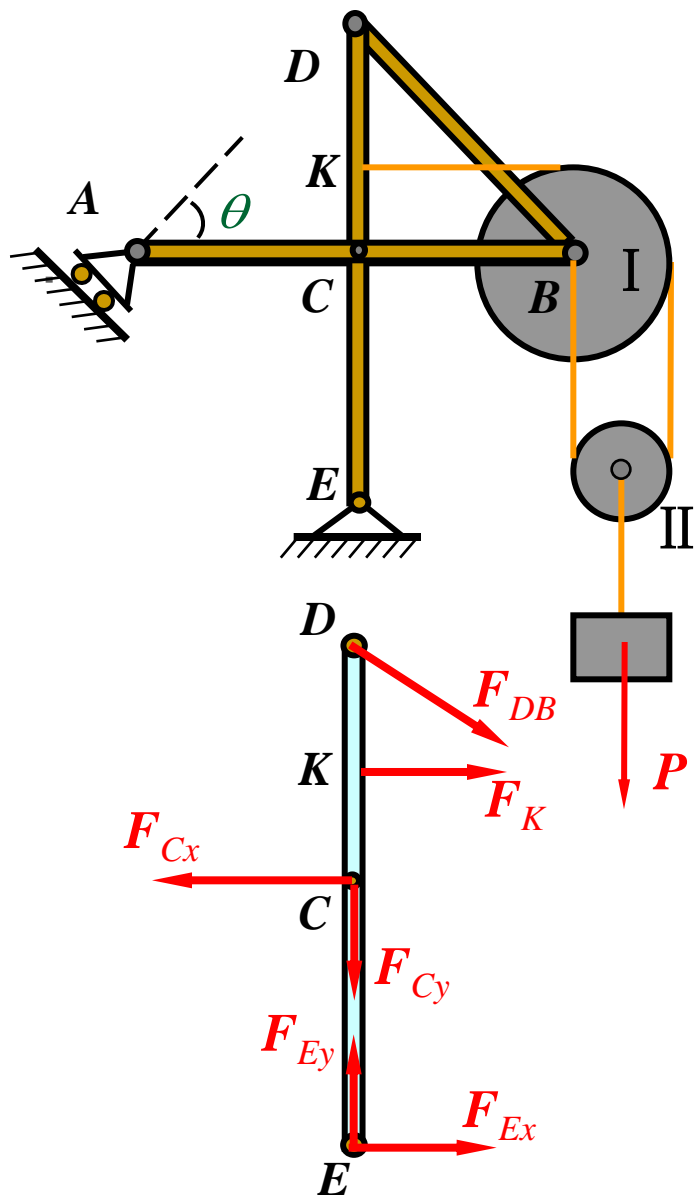
$$F_{DB} \cos 45^\circ \times 2l + F_K \times l - F_{Ex} \times 2l = 0$$

$$\text{式中} \quad F_K = \frac{P}{2}$$

6. 解平衡方程

$$F_{DB} = \frac{3\sqrt{2}P}{8}$$

若取AB为对象，如何画受力图？



[例] 求图示结构固定端的约束力。

解：先以 $BC$ 为研究对象，受力如图。

$$\sum M = 0: F_C b - M = 0$$

$$F_C = \frac{M}{b} = F_B$$

再以 $AB$ 部分为研究对象，受力如图。

$$\sum F_x = 0: F_{Ax} + F - F'_B = 0$$

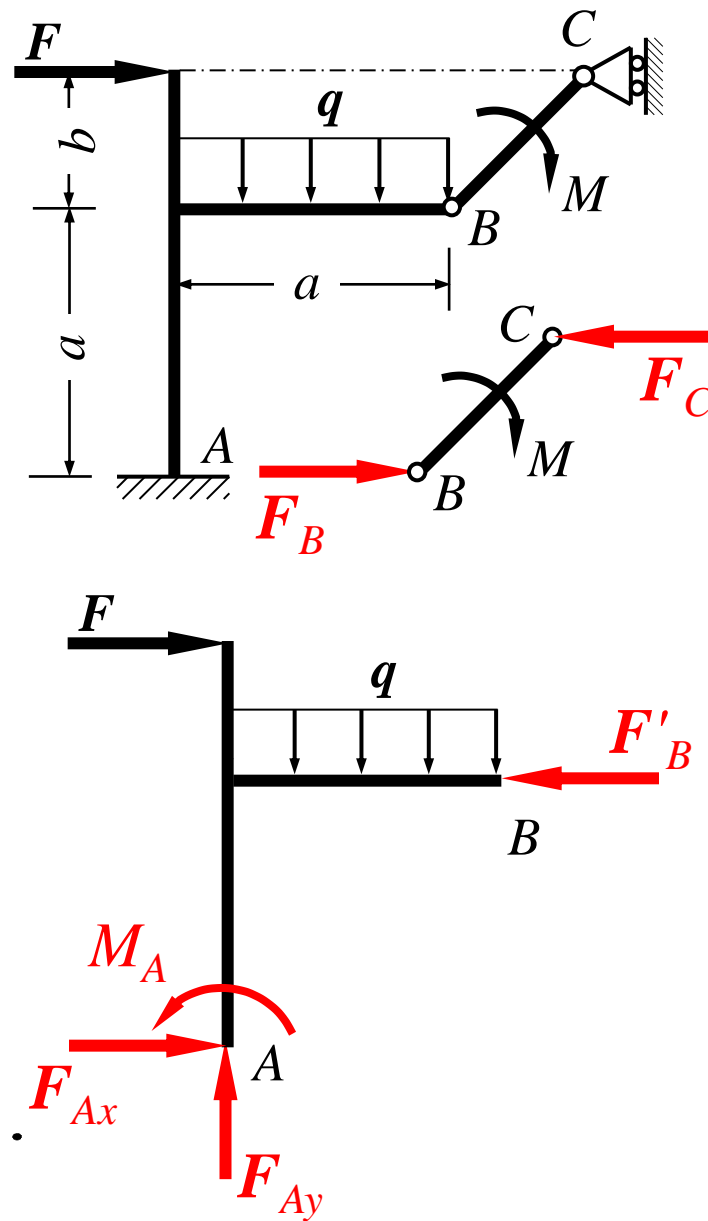
$$\sum F_y = 0: F_{Ay} - qa = 0$$

$$\sum M_A(F) = 0$$

$$M_A - F(a+b) - \frac{1}{2}qa^2 + F'_B a = 0$$

$$F'_B = F_B \quad \text{求得}$$

$$F_{Ax} = \frac{M}{b} - F, \quad F_{Ay} = qa, \quad M_A = \dots$$



[例] 组合结构如图所示，求支座约束力和各杆的内力。

解：先以整体为研究对象，受力如图。

$$\sum F_x = 0: F_{Ax} - F_D = 0$$

$$\sum F_y = 0: F_{Ay} - q(2a+b) = 0$$

$$\sum M_A(F) = 0$$

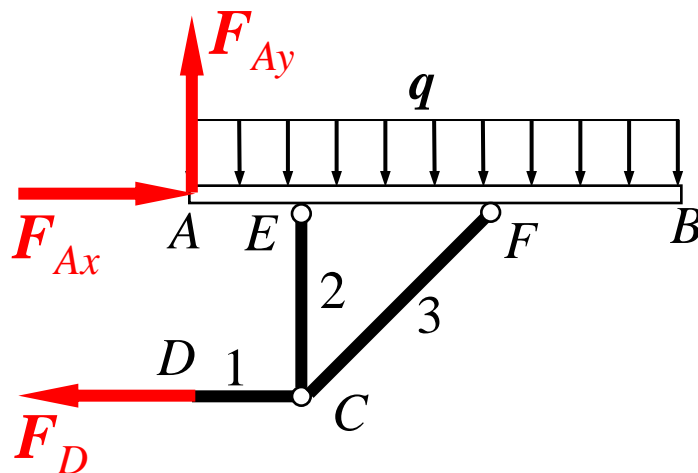
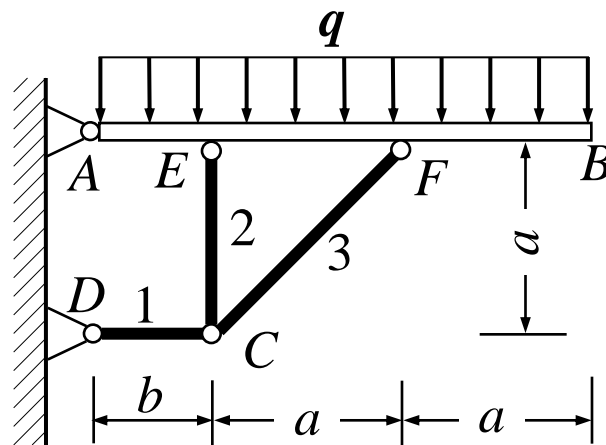
$$F_D a + \frac{1}{2} q(2a+b)^2 = 0$$

解之得：

$$F_D = -\frac{q(2a+b)^2}{2a}$$

$$F_{Ax} = -\frac{q(2a+b)^2}{2a}$$

$$F_{Ay} = q(2a+b)$$



再以铰C为研究对象，受力如图，建立如图坐标。

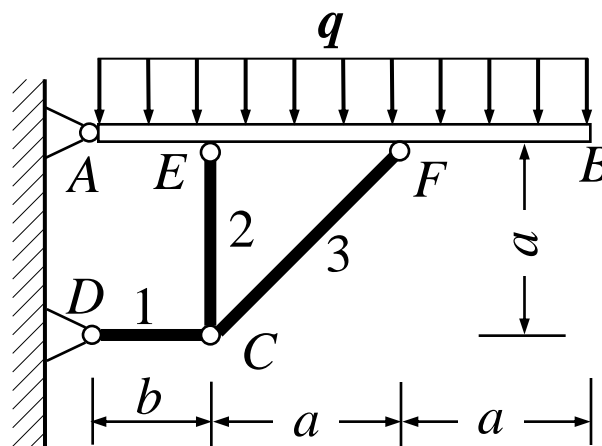
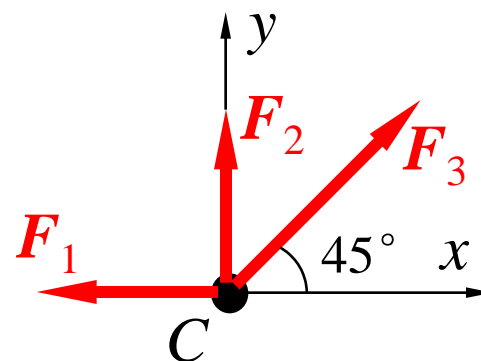
$$\sum F_x = 0: -F_1 + F_3 \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0: F_2 + F_3 \sin 45^\circ = 0$$

$$F_1 = F_D = -\frac{q(2a+b)^2}{2a}$$

$$F_3 = -\frac{q(2a+b)^2}{\sqrt{2}a}$$

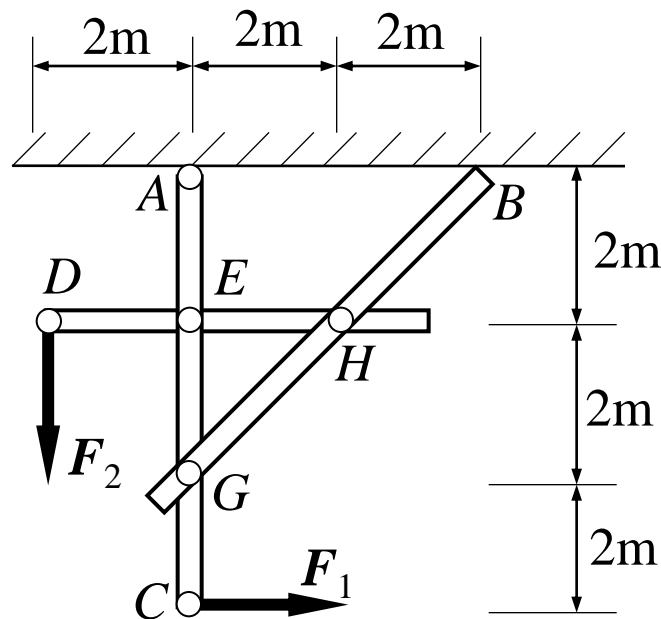
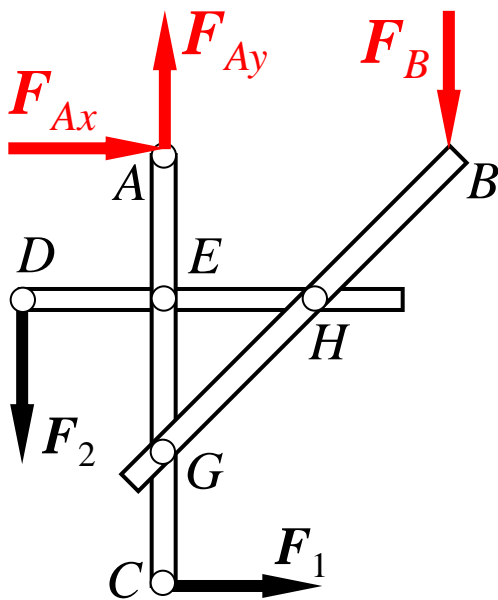
$$F_2 = \frac{q(2a+b)^2}{2a}$$





[例] 图示结构，各杆在A、E、F、G处均为铰接，B处为光滑接触。在C、D两处分别作用力 $F_1$ 和 $F_2$ ，且 $F_1 = F_2 = 500$  N，各杆自重不计，求H处的约束力。

解：先以整体为研究对象，受力如图。



$$\sum M_A(F) = 0:$$

$$-4F_B + 2F_2 + 6F_1 = 0$$

$$\text{解得: } F_B = 1000\text{N}$$

再以  $DH$  为研究对象，受力如图。

$$\sum M_E(F) = 0:$$

$$2F_2 + 2F_{Hy} = 0$$

解得：  $F_{Hy} = -F_2 = -500 \text{ N}$

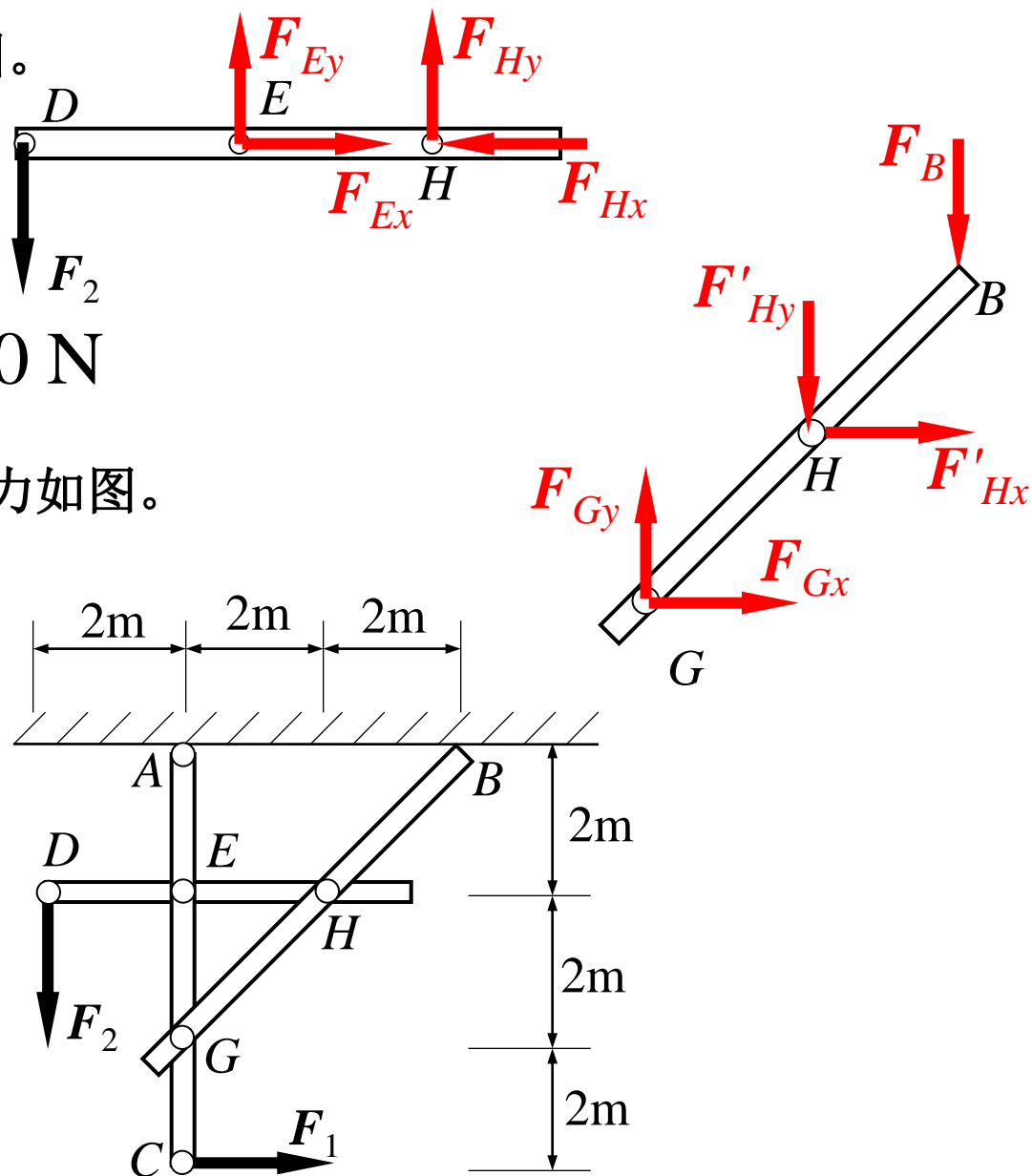
最后以杆  $BG$  为研究对象，受力如图。

$$\sum M_G(F) = 0:$$

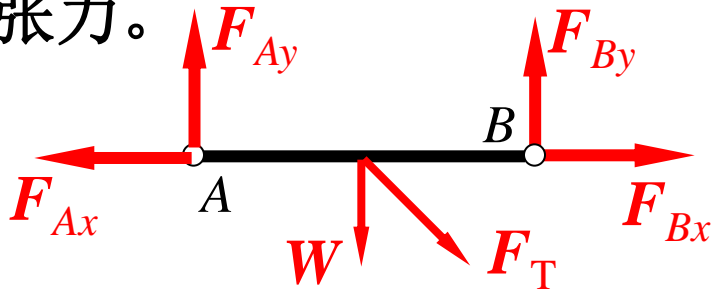
$$-4F_B - 2F'_{Hy} - 2F'_{Hx} = 0$$

解得：

$$F'_{Hx} = -1500 \text{ N}$$



[例] 三根等长同重均质杆(重 $W$ ) 在铅垂面内以铰链和绳 $EG$ 构成正方形。已知:  $E$ 、 $G$ 是 $AB$ 、 $BC$ 中点,  $AB$ 水平, 求绳 $EG$ 的张力。



解1: 取 $AB$ 分析, 受力如图。不妨设杆长为 $l$ 。

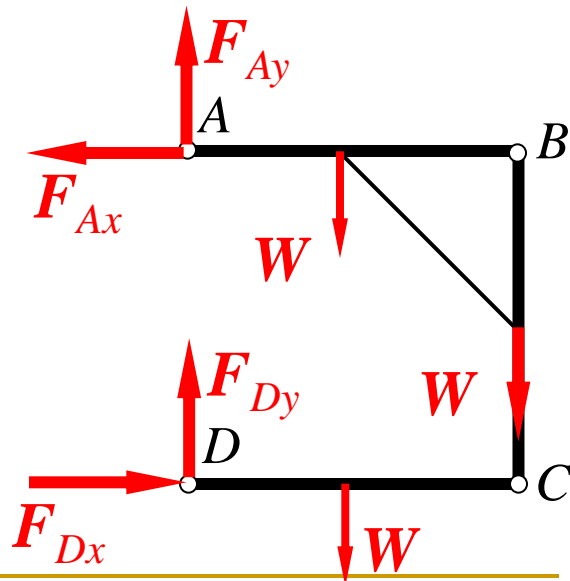
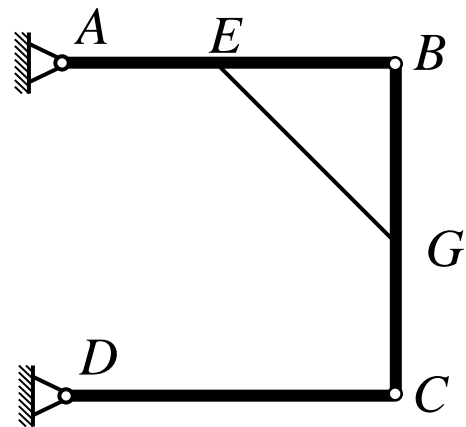
$$\sum M_B(F) = 0:$$

$$-F_{Ay}l + W \frac{l}{2} + F_T \sin 45^\circ \frac{l}{2} = 0 \quad (1)$$

再以整体为研究对象, 受力如图。

$$\sum F_y = 0:$$

$$F_{Ay} + F_{Dy} - 3W = 0 \quad (2)$$



最后以 $DC$ 为研究对象，受力如图。

$$\sum M_C(F) = 0:$$

$$-F_{Dy}l + W \frac{l}{2} = 0 \quad (3)$$

联立求解(1)、(2)、(3)得：  $F_T = 4\sqrt{2}W$

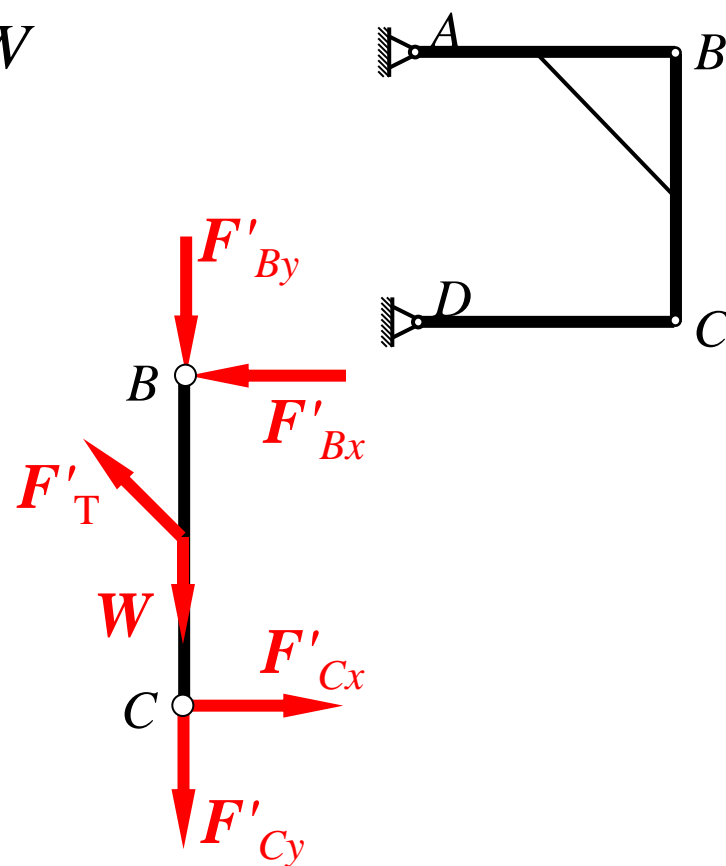
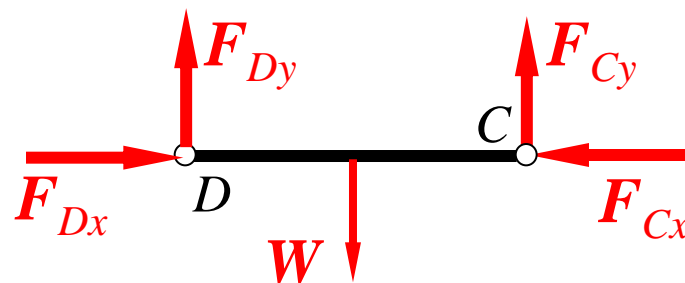
解2：先以 $BC$ 为研究对象，受力如图。

$$\sum M_B(F) = 0:$$

$$F'_{Cx} \cdot l - F'_T \sin 45^\circ \frac{l}{2} = 0 \quad (4)$$

再以 $DC$ 为研究对象，受力如上图。

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Dx} - F_{Cx} = 0 \quad (5)$$

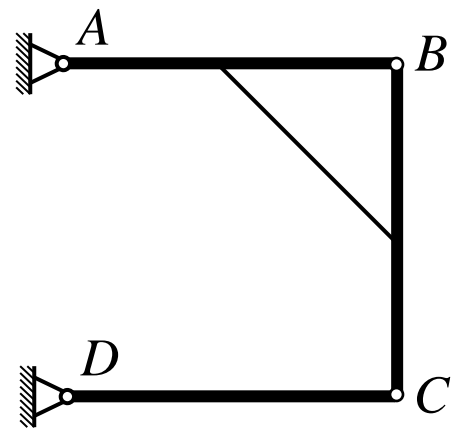
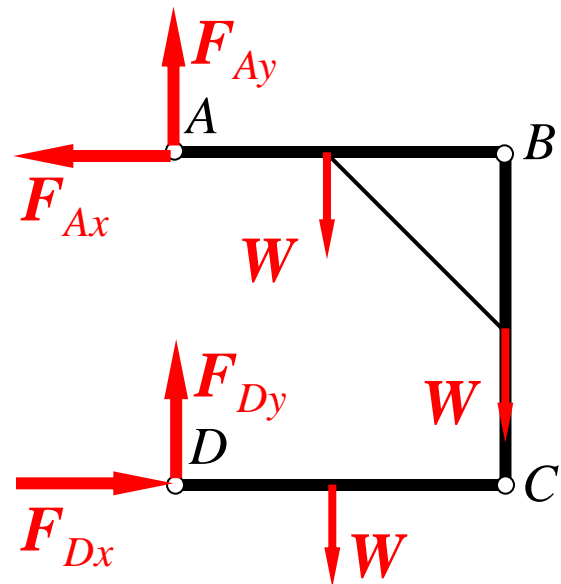


最后以整体为研究对象，受力如图。

$$\sum M_A(F) = 0:$$

$$F_{Dx}l - 2W\frac{l}{2} - Wl = 0 \quad (6)$$

联立求解 (4)、(5)、(6) 即可的同样结果。



[例] 三无重杆 $AC$ 、 $BD$ 、 $CD$ 如图铰接， $B$ 处为光滑接触， $ABCD$ 为正方形，在 $CD$ 杆距 $C$ 三分之一处作用一垂直力 $F$ ，求铰链 $E$ 处的约束力。

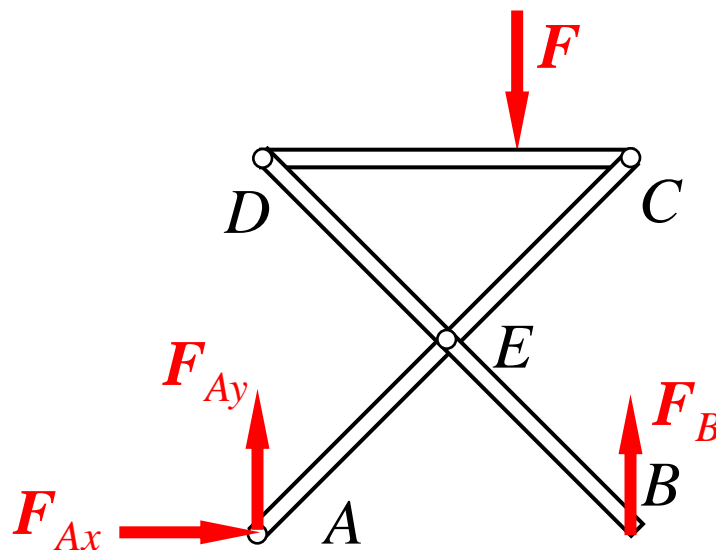
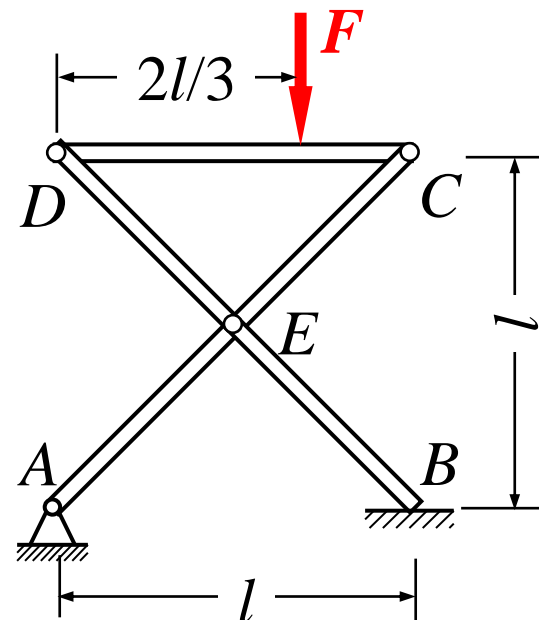
解：先以整体为研究对象，受力如图。

$$\sum F_x = 0: F_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0: F_{Ay} + F_B - F = 0$$

$$\sum M_A(F) = 0: F_B l - F \frac{2}{3} l = 0$$

解得：  $F_{Ay} = \frac{1}{3} F$        $F_B = \frac{2}{3} F$



下面用不同的方法求铰链  $E$  的受力。

方法1：先以  $DC$  为研究对象。

$$\sum M_D(F) = 0: F_{Cy} \cdot l - F \cdot \frac{2l}{3} = 0$$

$$F_{Cy} = \frac{2}{3} F$$

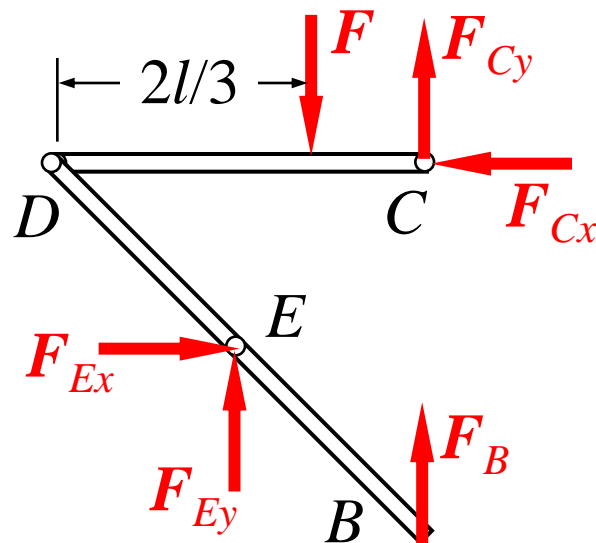
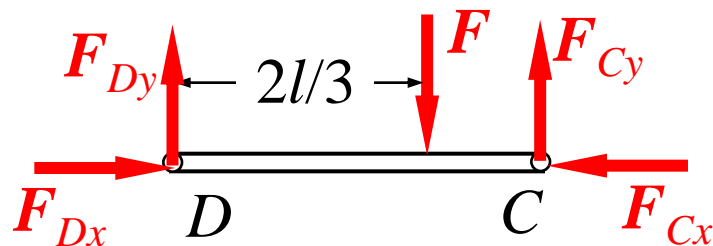
再以  $BDC$  为研究对象。

$$\sum F_y = 0: F_{Ey} + F_B + F_{Cy} - F = 0$$

$$F_{Ey} = -\frac{1}{3} F$$

$$\sum M_C(F) = 0: F_{Ex} \frac{l}{2} + F \frac{l}{3} - F_{Ey} \frac{l}{2} = 0$$

$$F_{Ex} = -F$$



类似地，亦可以  $DC$  为研究对象，求  $F_{Dy}$ ，再以  $ACD$  为研究对象求解。

方法2：分别以ACD和AC为研究对象。

ACD上  $\sum M_D(\mathbf{F}) = 0$ :

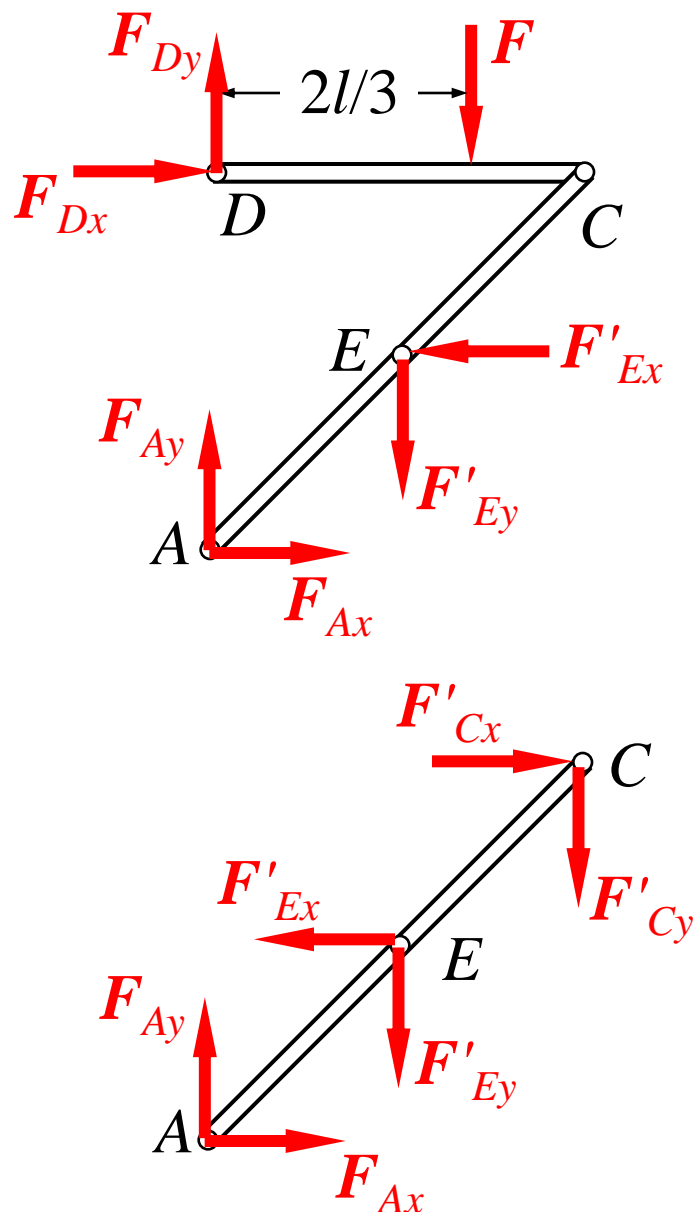
$$F_{Ax}l - F'_{Ex} \frac{l}{2} - F'_{Ey} \frac{l}{2} - F \frac{2l}{3} = 0$$

AC上  $\sum M_C(\mathbf{F}) = 0$ :

$$F_{Ax}l - F_{Ay}l - F'_{Ex} \frac{l}{2} + F'_{Ey} \frac{l}{2} = 0$$

联立求解以上两方程即得同样结果。

类似地，亦可以BDC和BD为研究对象，进行求解。





方法3：分别以 $BD$ 和 $AC$ 为研究对象，受力如图。

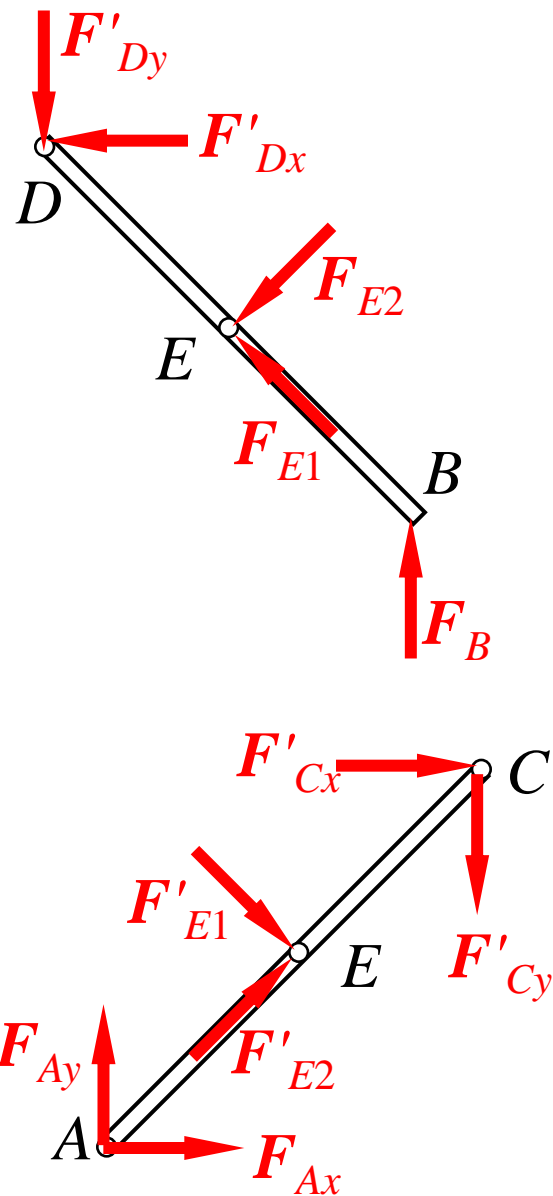
$$\sum M_D(F) = 0: \quad F_B l - F_{E1} \frac{\sqrt{2}}{2} l = 0$$

$$F_{E1} = \frac{2\sqrt{2}}{3} F$$

$$\sum M_C(F) = 0: \quad F_{Ax} l + F'_{E2} \frac{\sqrt{2}}{2} l - F_{Ay} l = 0$$

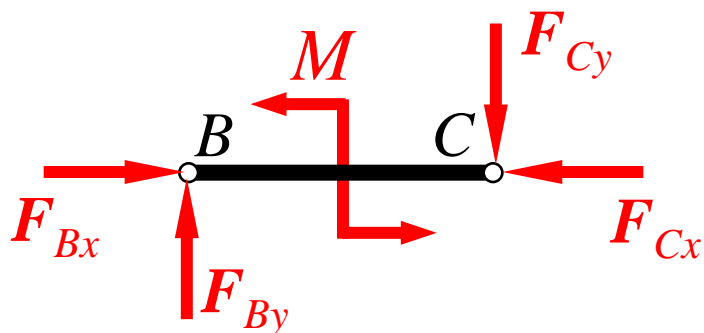
$$F'_{E2} = \frac{\sqrt{2}}{3} F = F_{E2}$$

用 $F_{E1}$ 、 $F_{E2}$ 表示的约束力和用 $F_{Ex}$ 、 $F_{Ey}$ 表示的约束力本质上是同一个力。



[例] 两根铅直梁 $AB$ 、 $CD$ 与水平梁 $BC$ 铰接， $B$ 、 $C$ 、 $D$ 均为光滑铰链， $A$ 为固定支座，各梁的长度均为 $l=2\text{ m}$ ，受力情况如图所示。已知水平力 $F=6\text{ kN}$ ， $M=4\text{ kN}\cdot\text{m}$ ， $q_0=3\text{ kN/m}$ 。求固定端 $A$ 及铰链 $C$ 的约束力。

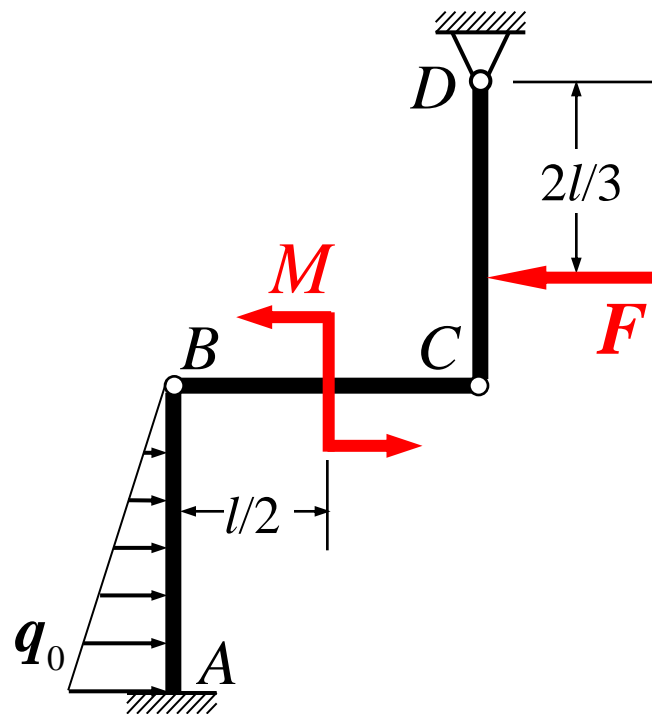
解: (1) 取 $BC$ 分析



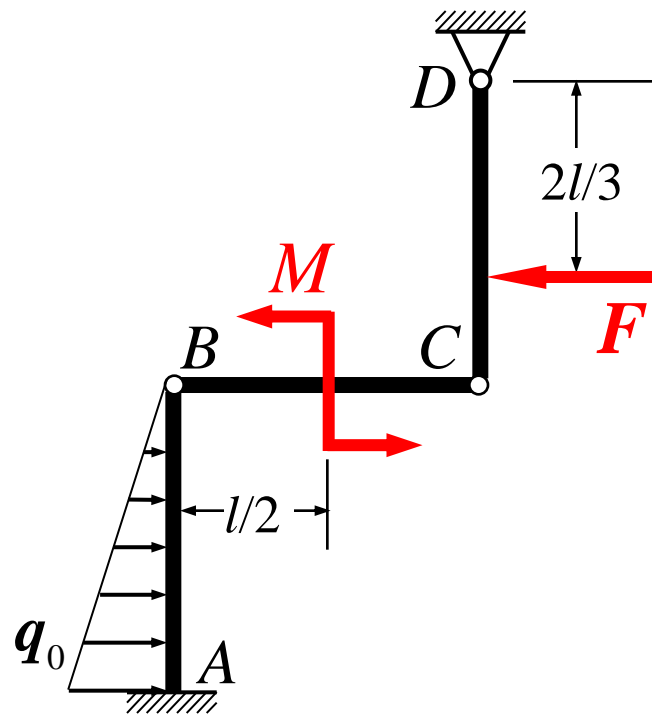
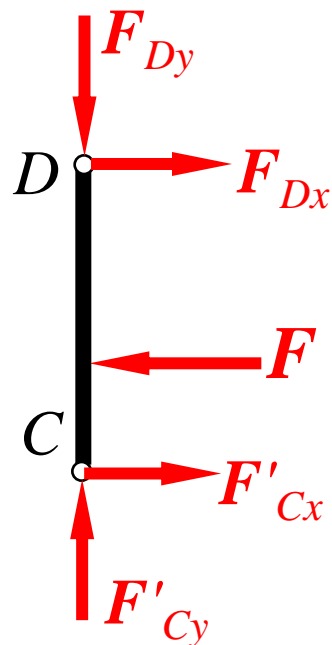
$$\sum M_B(F) = 0: M - F_{Cy} \cdot l = 0$$

$$F_{Cy} = \frac{M}{l} = 2\text{ kN}$$

求得结果为正说明与假设方向相同。



## (2) 取CD分析



$$\sum M_D(F) = 0: F'_{Cx} \cdot l - F \cdot \frac{2l}{3} = 0$$

$$F'_{Cx} = \frac{2}{3} F = 4 \text{ kN}$$

求得结果为正说明与假设方向相同。

### (3) 取AB、BC分析

$$\sum F_x = 0: F_{Ax} + \frac{1}{2} q_0 l - F_{Cx} = 0$$

$$F_{Ax} = F_{Cx} - \frac{1}{2} q_0 l = 4 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 1 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0: F_{Ay} - F_{Cy} = 0$$

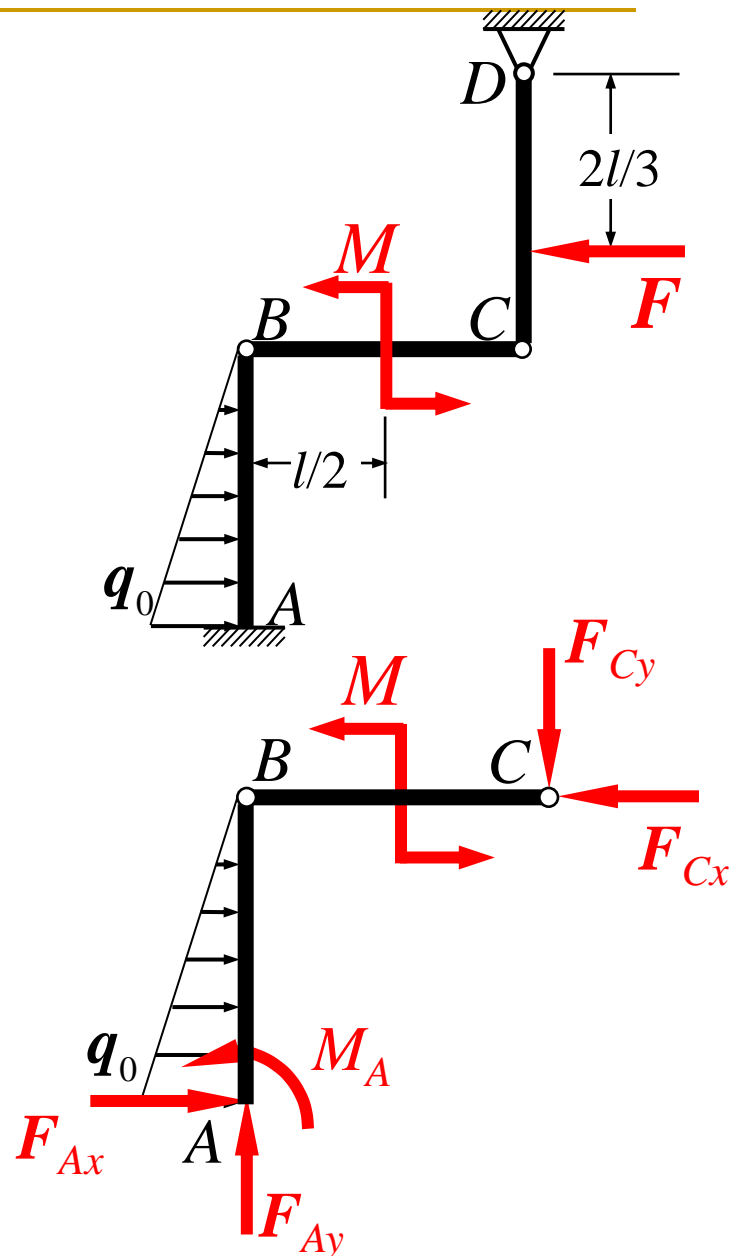
$$F_{Ay} = F_{Cy} = 2 \text{ kN}$$

$$\sum M_A(F) = 0:$$

$$M_A + M - \frac{1}{2} q_0 l \cdot \frac{1}{3} l - F_{Cy} \cdot l + F_{Cx} \cdot l = 0$$

$$M_A = -6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

求得结果为负说明与假设方向相反，即为顺时针方向。



[例] 编号为1、2、3、4的四根杆件组成平面结构，其中A、C、E为光滑铰链，B、D为光滑接触，E为中点，各杆自重不计。在水平杆2上作用一铅垂向下的力  $F$ ，试证明无论力  $F$  的位置  $x$  如何改变，其竖杆1总是受到大小等于  $F$  的压力。

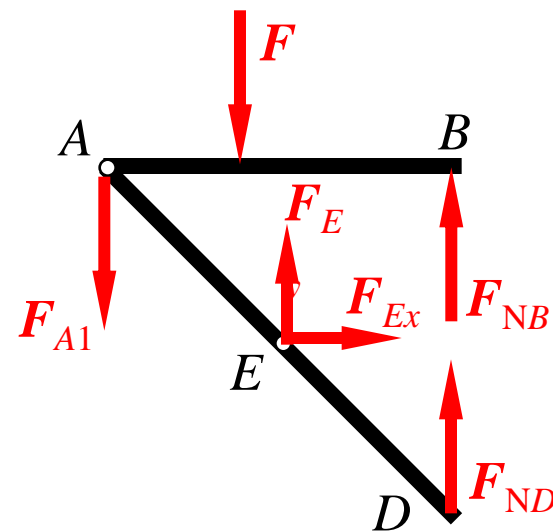
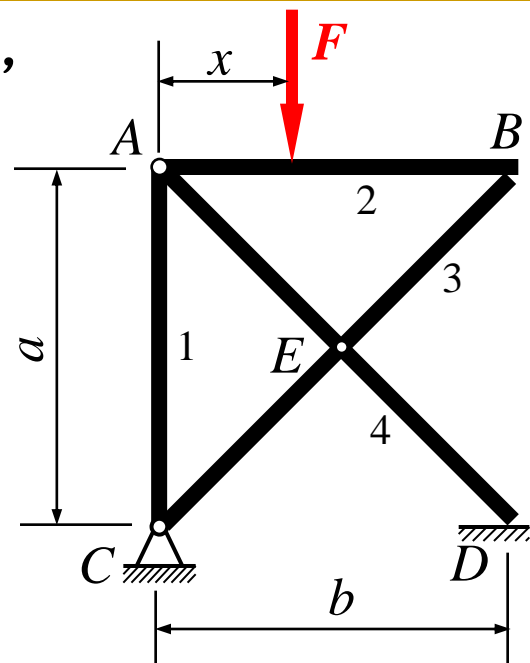
解：本题为求二力杆（杆1）的内力  $F_{A1}$  或  $F_{C1}$ 。为此先取杆2、4及销钉A为研究对象，受力如图。

$$\sum M_E(F) = 0:$$

$$F_{A1} \frac{b}{2} + F \left( \frac{b}{2} - x \right) + F_{NB} \frac{b}{2} + F_{ND} \frac{b}{2} = 0 \quad (a)$$

$$F_{A1} \frac{b}{2} - F \left( x - \frac{b}{2} \right) + F_{NB} \frac{b}{2} + F_{ND} \frac{b}{2} = 0 \quad (a1)$$

上式中  $F_{ND}$  和  $F_{NB}$  为未知量，必须先求得；为此再分别取整体和杆2为研究对象。



取整体为研究对象，受力如图。

$$\sum M_C(F) = 0: \quad F_{ND}b - Fx = 0$$

$$F_{ND} = \frac{Fx}{b}$$

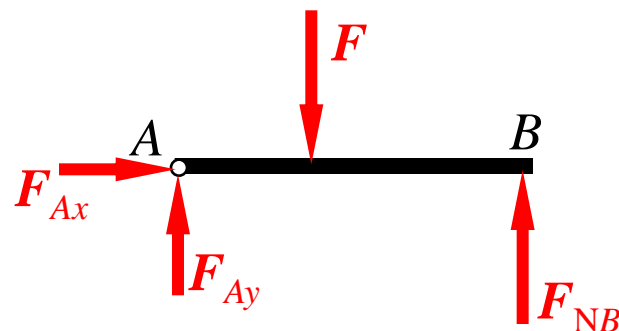
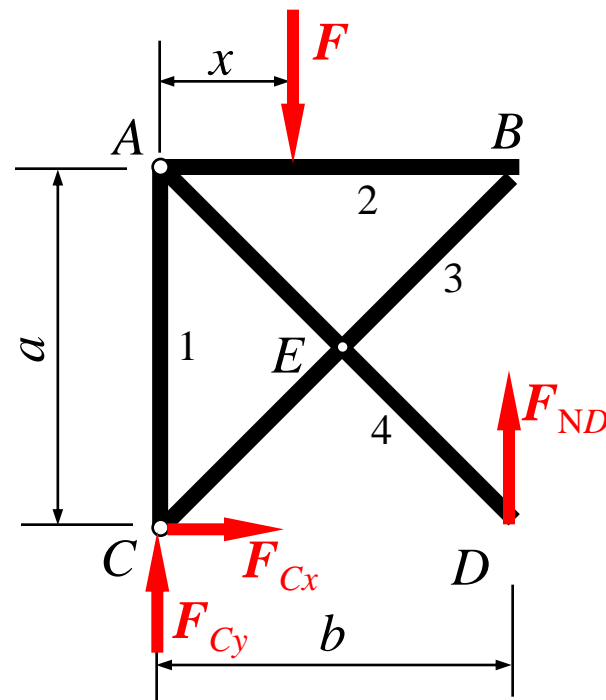
取水平杆2为研究对象，受力如图。

$$\sum M_A(F) = 0: \quad F_{NB}b - Fx = 0$$

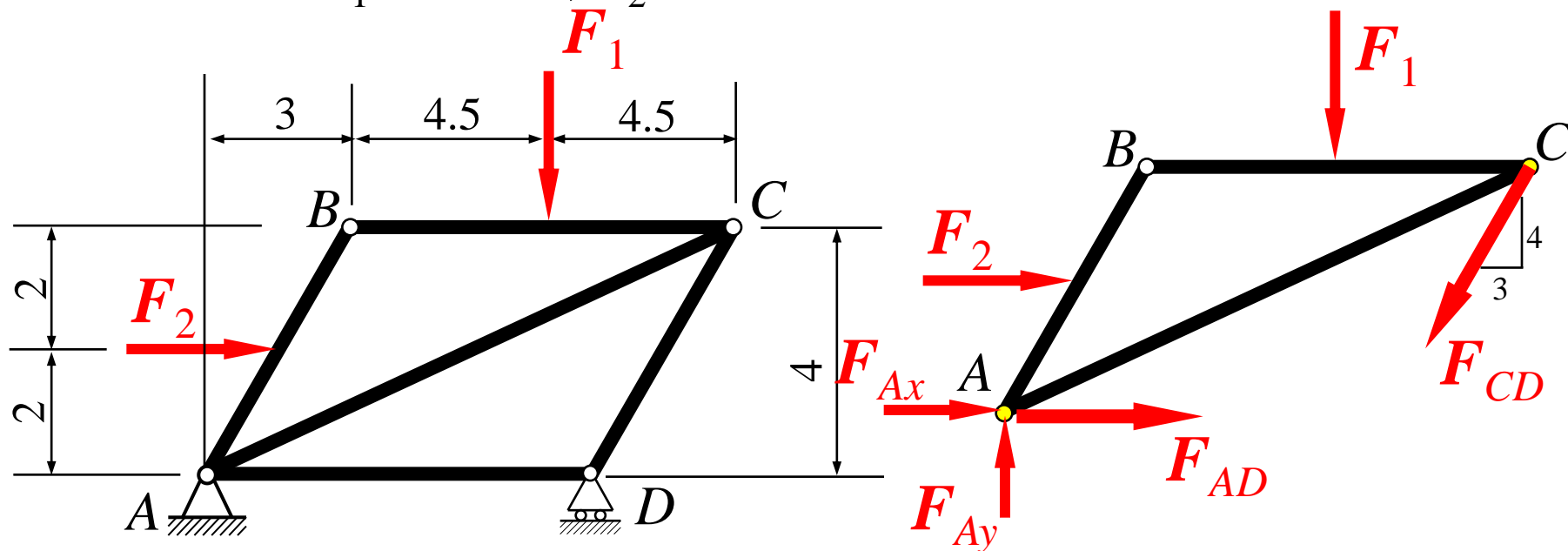
$$F_{NB} = \frac{Fx}{b}$$

代入 (a) 式得  $F_{A1} = -F$

$F_{A1}$  为负值，说明杆1受压，且与  $x$  无关。



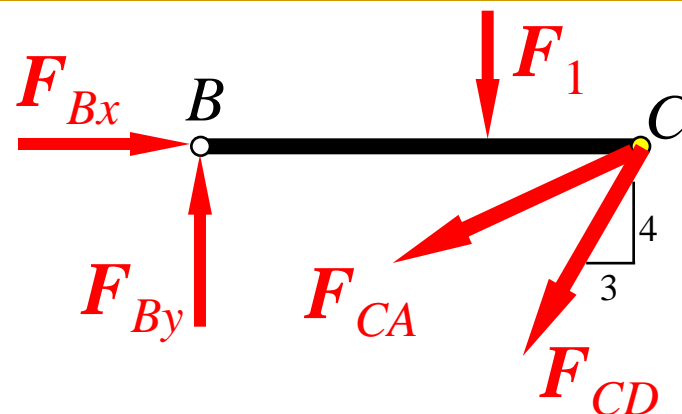
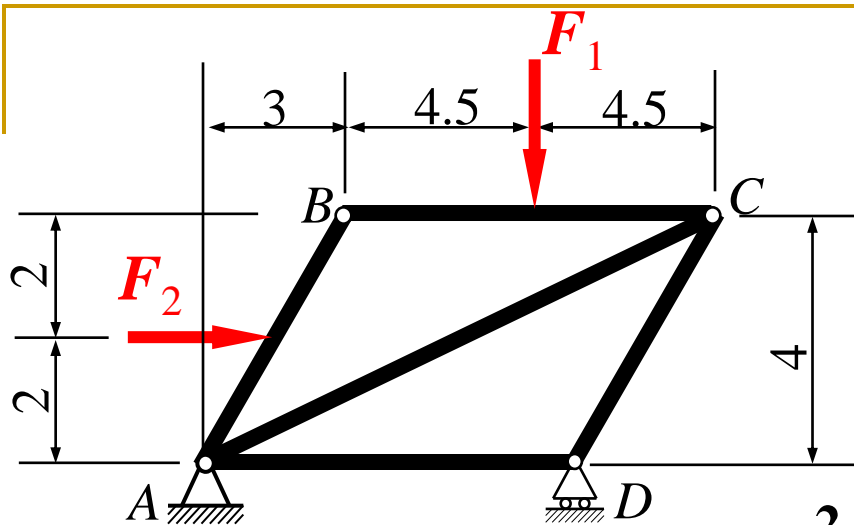
**[P75习题2-43]** 构架尺寸如图所示(尺寸单位为m)，不计各杆件自重，载荷  $F_1=120\text{ kN}$ ,  $F_2=75\text{ kN}$ 。求AC及AD两杆所受的力。



解：1、取三角形ABC分析，其中A、C处应带有销钉：

$$\sum M_A(F) = 0: -F_2 \cdot 2 - F_1 \cdot 7.5 - F_{CD} \cdot \frac{4}{5} \cdot 12 + F_{CD} \cdot \frac{3}{5} \cdot 4 = 0:$$

$$F_{CD} = -145.83\text{ kN} \quad CD\text{杆受压力。}$$



2、取BC分析，注意在C处应带有销钉。

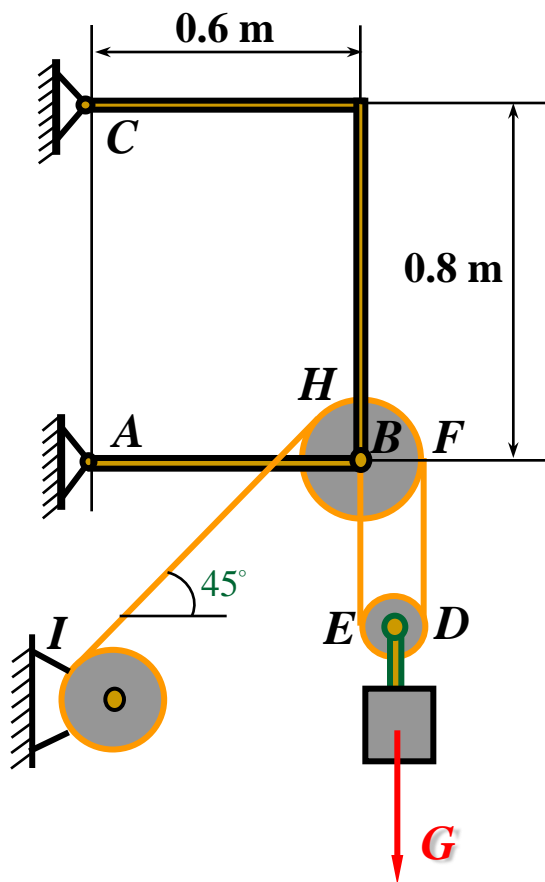
$$\sum M_B(F) = 0: \quad -F_1 \cdot 4.5 - F_{CD} \cdot \frac{4}{5} \cdot 9 - F_{CA} \cdot \frac{4}{\sqrt{12^2 + 4^2}} \cdot 9 = 0:$$

$$F_{CA} = 179.19 \text{ kN}$$

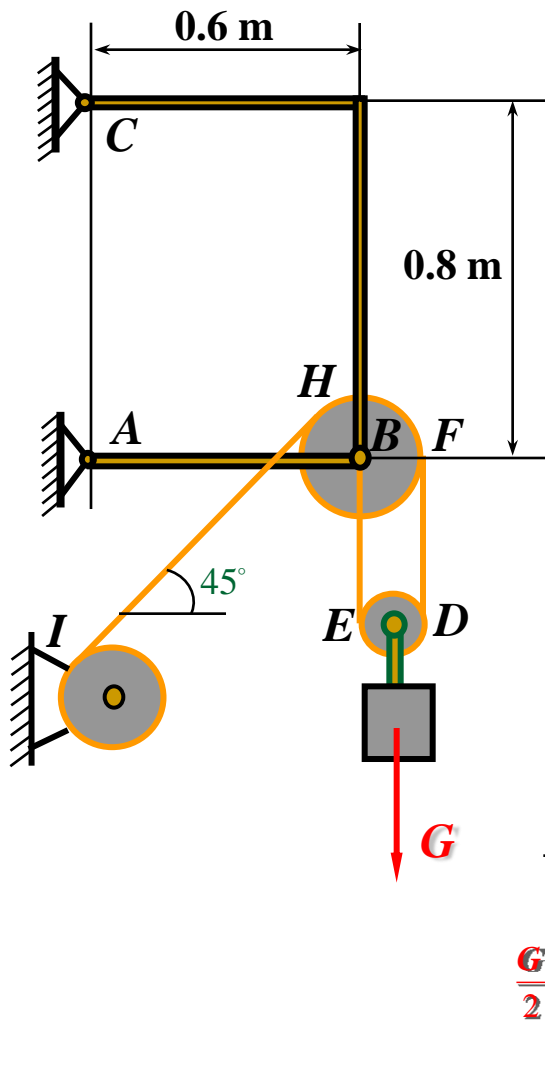
3、取销钉D分析，由 $\sum F_x = 0$ 可求得 $F_{DA}$ 。

$$F_{DA} = \frac{3}{5} F_{CD} = -87.5 \text{ kN}$$





[例]重为  $G = 980\text{N}$  的重物悬挂在滑轮支架系统上，如图所示。设滑轮的中心  $B$  与支架  $ABC$  相连接， $AB$  为直杆， $BC$  为曲杆， $B$  为销钉。若不计滑轮与支架的自重，求销钉  $B$  作用在与它相连接的每一构件上的约束力。



解、1. 取滑轮B为研究对象，受力分析如图。

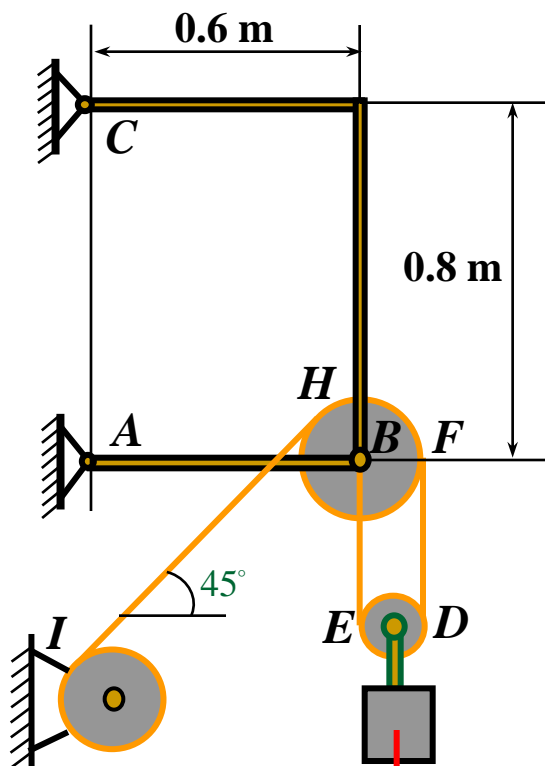
2. 列平衡方程

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Bx} - \frac{G}{2} \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{By} - \frac{G}{2} \sin 45^\circ - \frac{G}{2} = 0$$

解得  $F_{Bx} = \frac{G}{2} \cos 45^\circ = 347 \text{ N}$

$$F_{By} = \frac{G}{2} \sin 45^\circ + \frac{G}{2} = 847 \text{ N}$$



3. 再取销钉  $B$  为研究对象，受力分析如图所示。

4. 列平衡方程

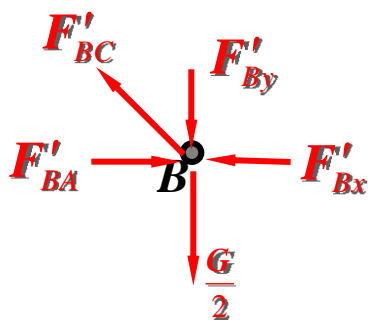
$$\sum F_x = 0 \quad -F'_{Bx} + F_{AB} - F_{CB} \times \frac{3}{5} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad -F'_{By} - \frac{G}{2} + F_{CB} \times \frac{4}{5} = 0$$

解得

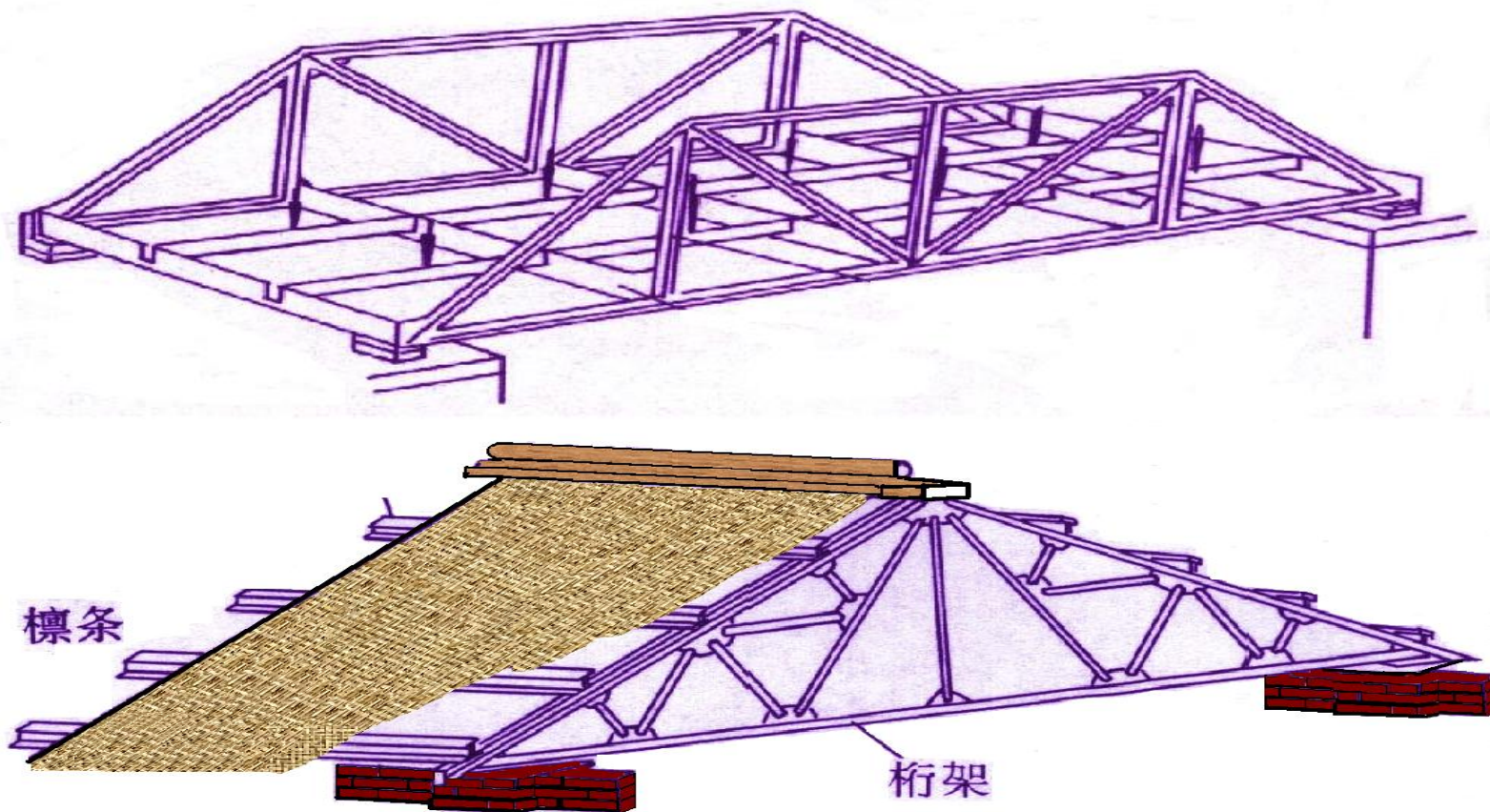
$$F_{AB} = 1\,340\text{ N}$$

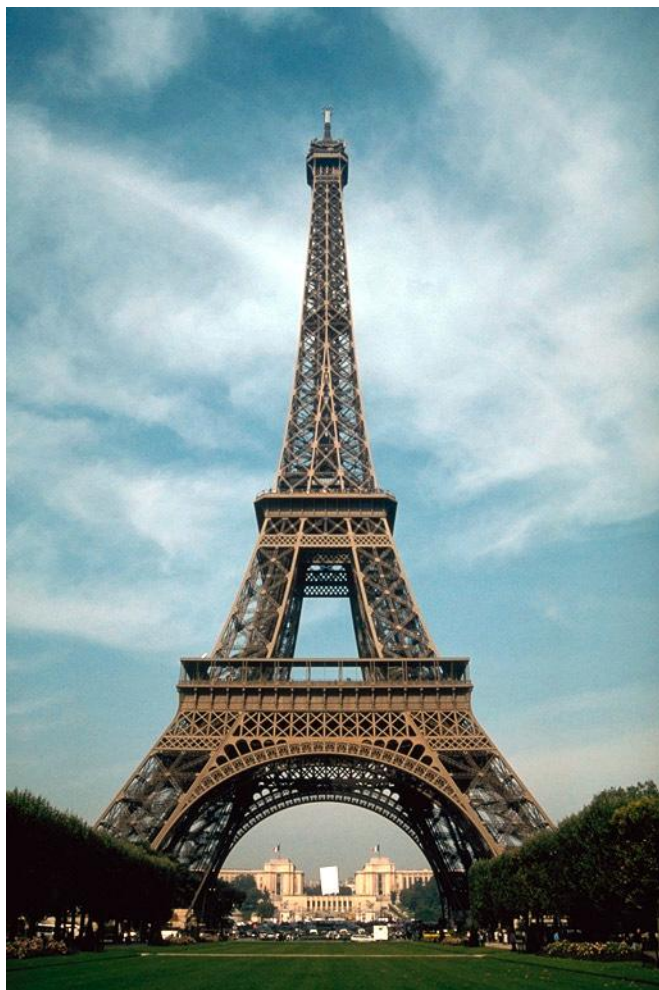
$$F_{CB} = 1\,660\text{ N}$$



由物系的多样化，引出仅由杆件组成的系统——桁架

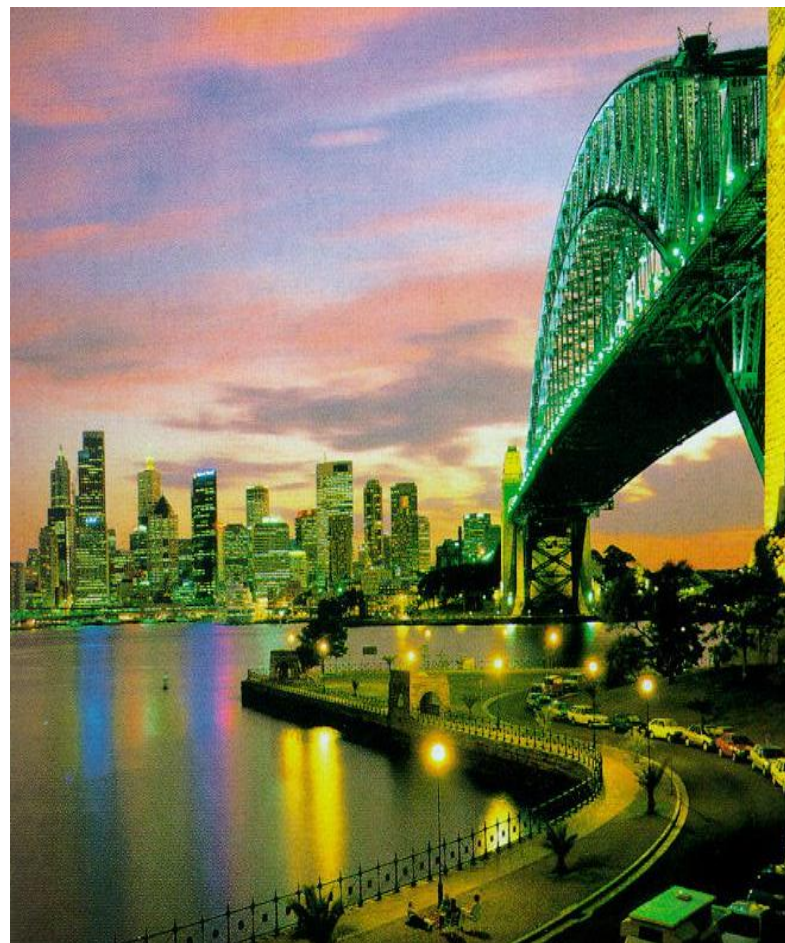
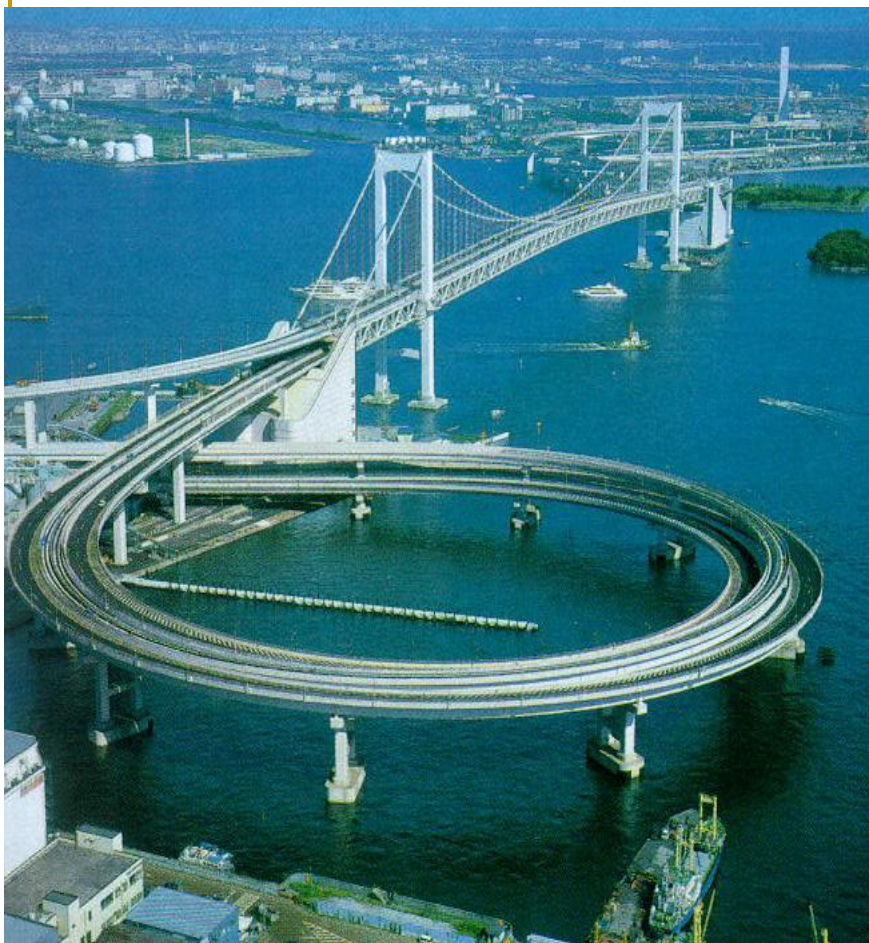
## § 2-6 平面简单桁架的内力计算





## 工程中的桁架结构





## 工程中的桁架结构





桁架是由杆件彼此在两端用铰链连接形成的几何形状不变的结构。桁架中所有杆件都在同一平面内的桁架称为平面桁架。桁架中的铰链接头称为节点。

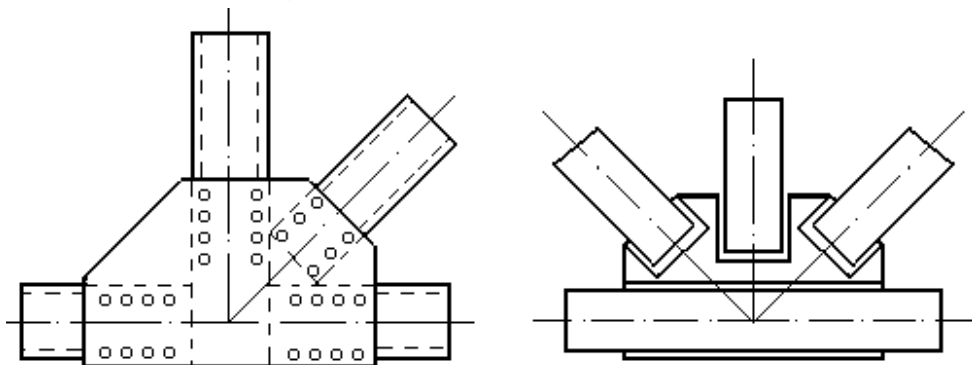
为简化桁架计算，工程实际中采用以下几个假设：

- (1)桁架的杆件都是直杆；
- (2)杆件用光滑铰链连接；
- (3)桁架所受的力都作用到节点上且在桁架平面内；
- (4)桁架杆件的重量略去不计，或平均分配在杆件两端的节点上。

这样的桁架，称为理想桁架。

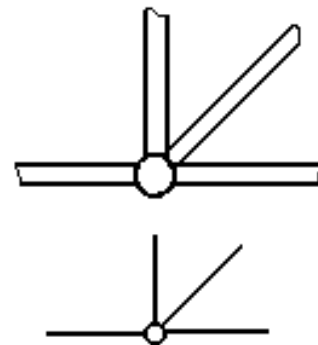


## 桁架的实际节点



焊接或铆接，杆的端点不能转动，可承受力矩。

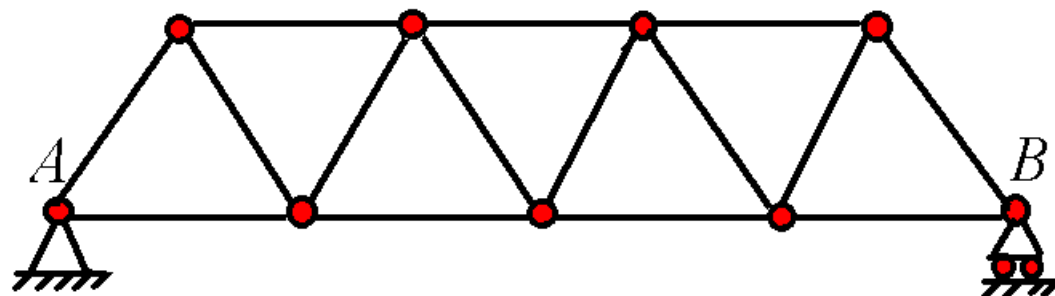
## 理想节点



光滑铰链，不能承受力矩

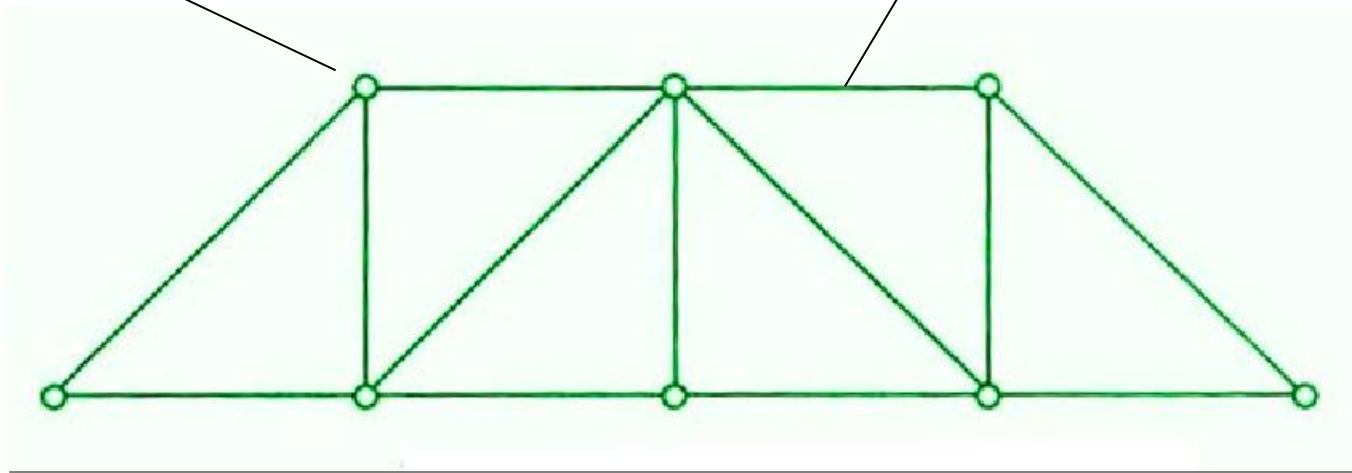
实际节点变为理想节点，所得结果是偏于安全的。

# 理想桁架



节点

杆件



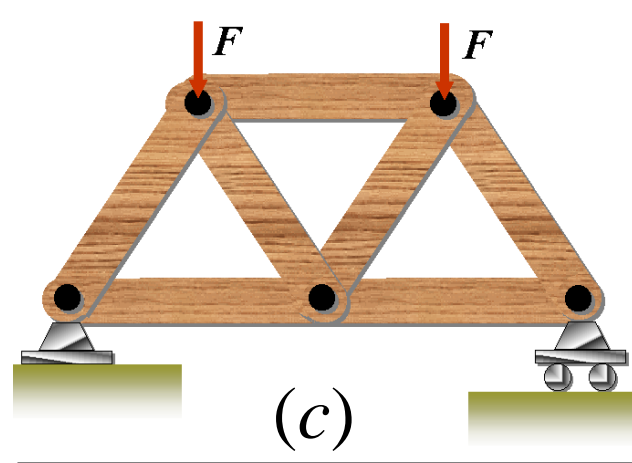
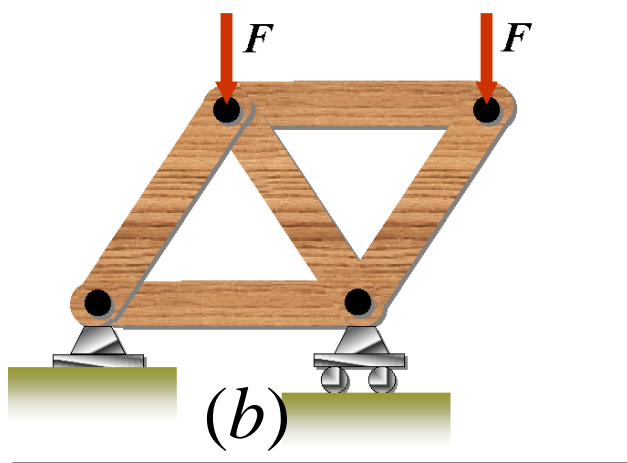
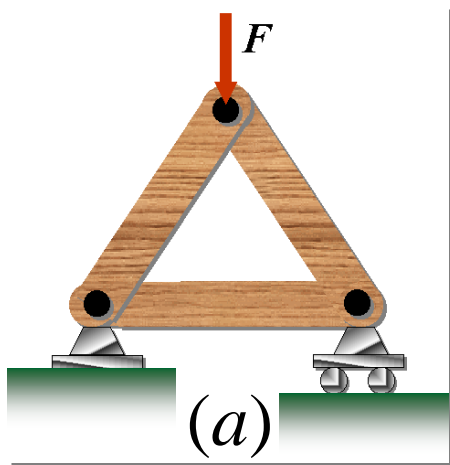
桁架的优点：轻，充分发挥材料性能。

桁架的特点：①直杆，不计自重，均为二力杆；②杆端铰接；  
③外力作用在节点上。

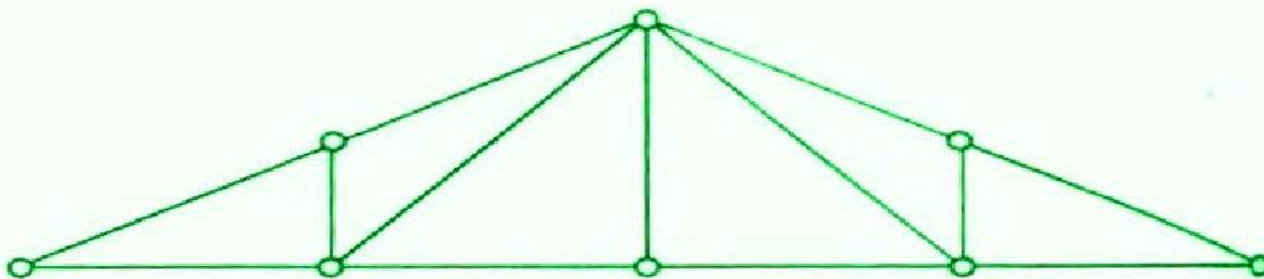
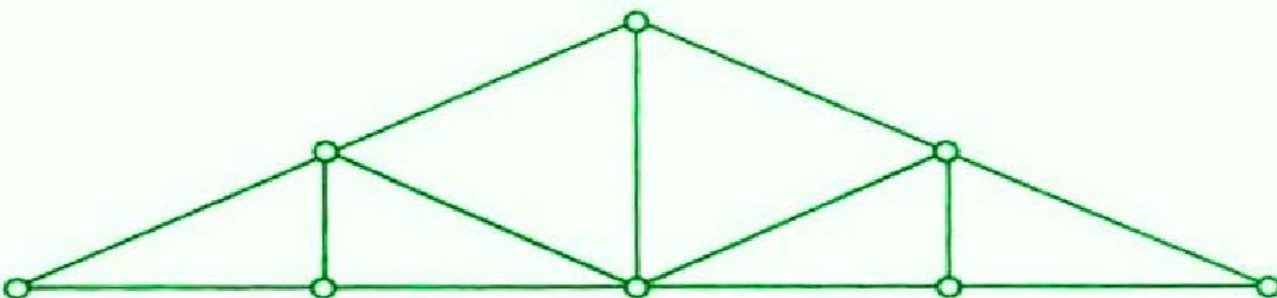
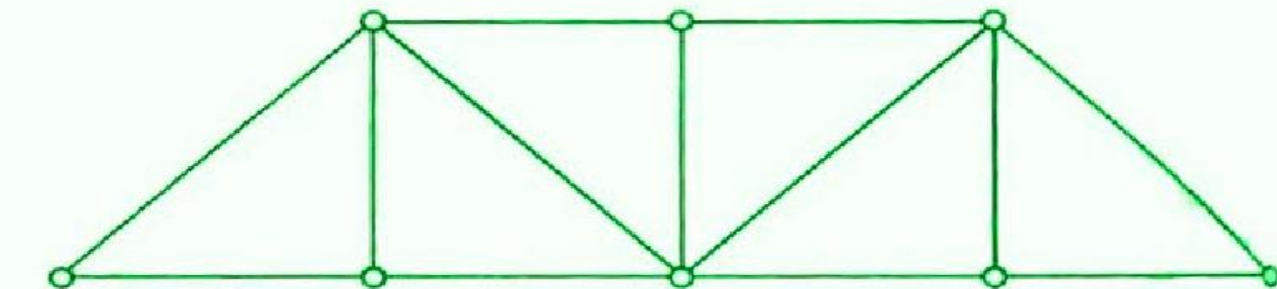
## 力学中的桁架模型

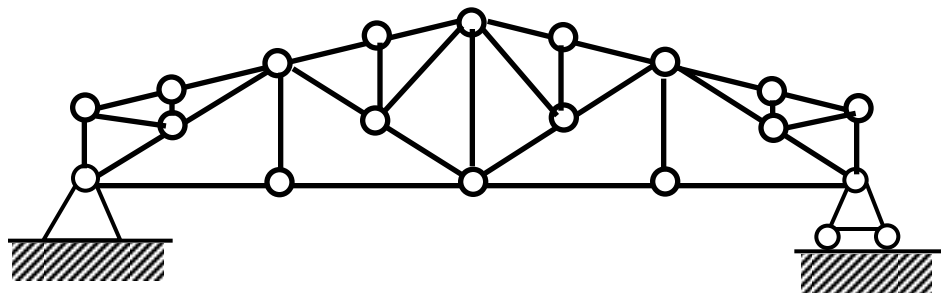
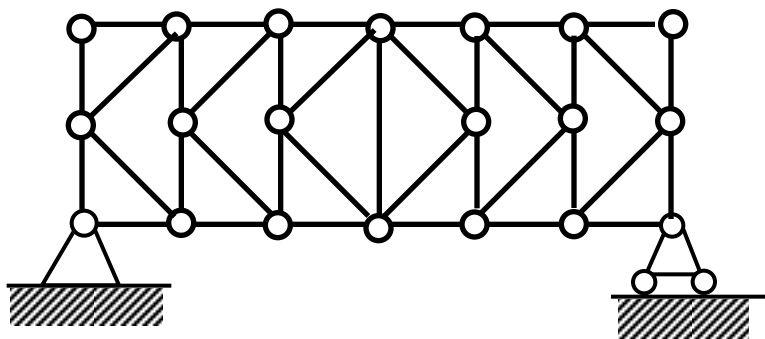
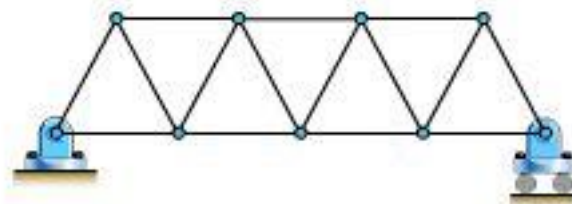
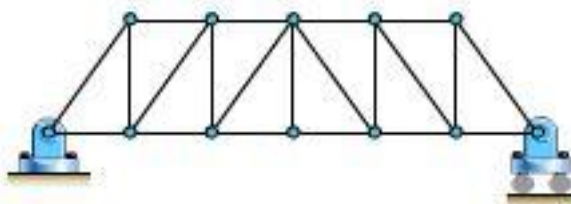
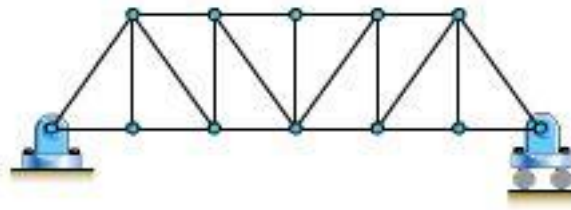
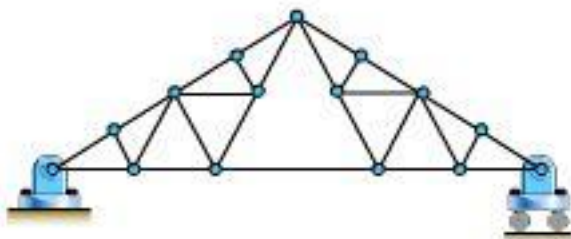
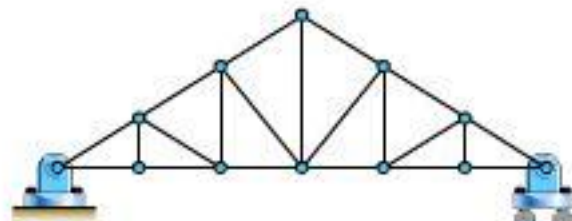
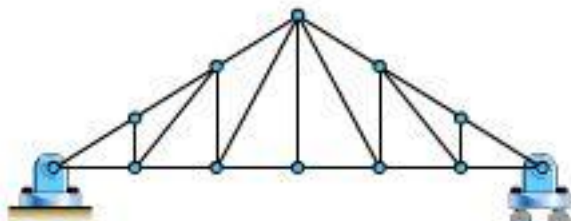
(基本三角形)

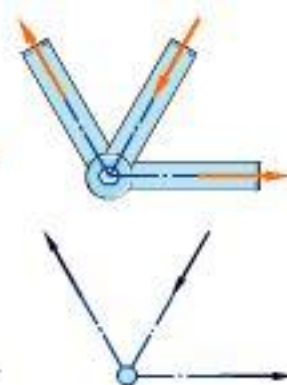
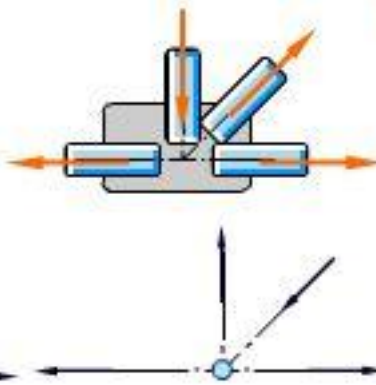
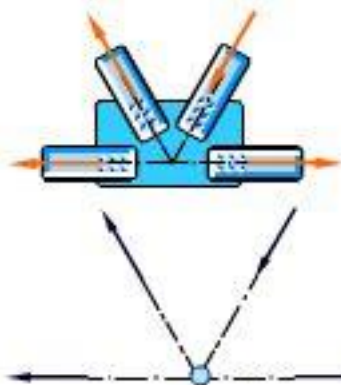
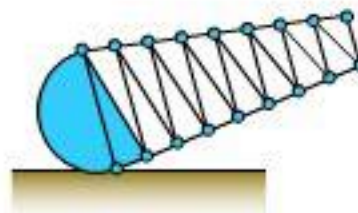
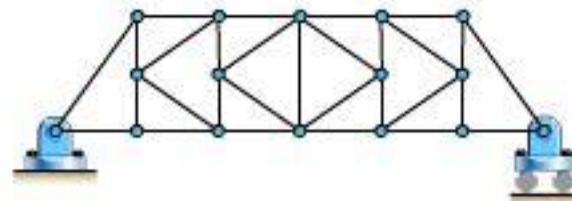
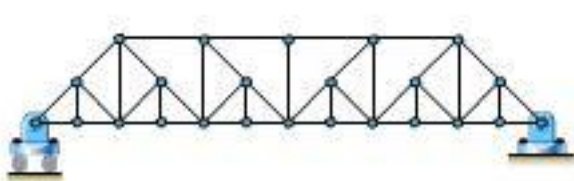
三角形有稳定性

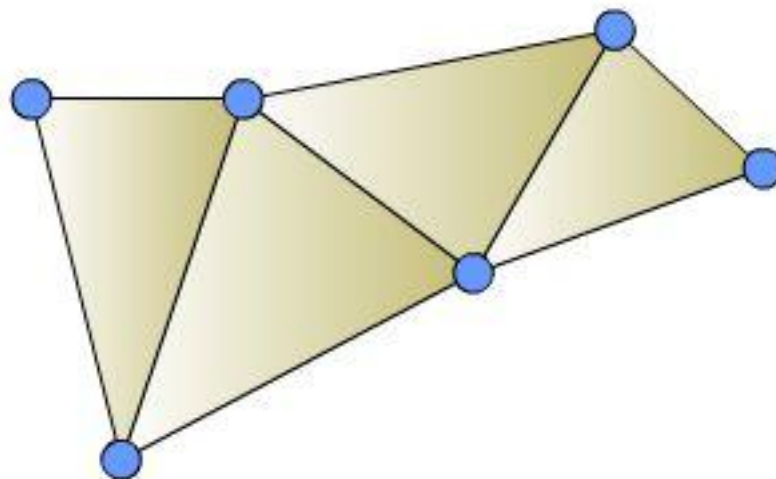


# 工程力学中常见桁架的简化计算模型









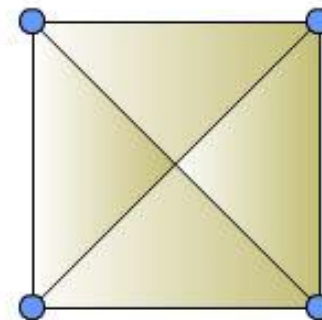
总杆数  $m$

总节点数  $n$

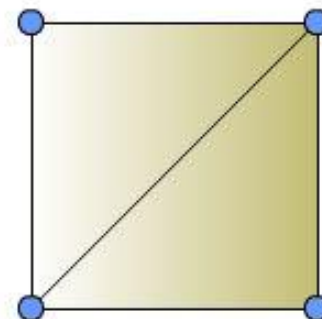
$$m - 3 = 2(n - 3)$$

$$m = 2n - 3$$

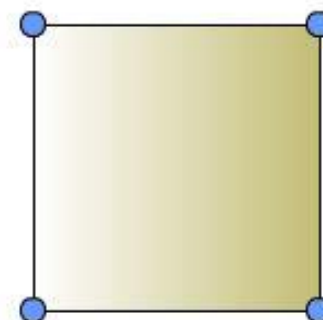
$m > 2n - 3$  平面复杂（超静定）桁架



$m = 2n - 3$  平面简单（静定）桁架



$m < 2n - 3$  非桁架（机构）





# 一、节点法

桁架内每个节点都受平面汇交力系作用，为求桁架内每个杆件的内力，逐个取桁架内每个节点为研究对象，求桁架杆件内力的方法即为**节点法**。

[例] 平面桁架的尺寸和支座如图，在节点 $D$ 处受一集中荷载 $F = 10\text{ kN}$ 的作用。试求桁架各杆件所受的内力。

解：先以整体为研究对象，受力如图。

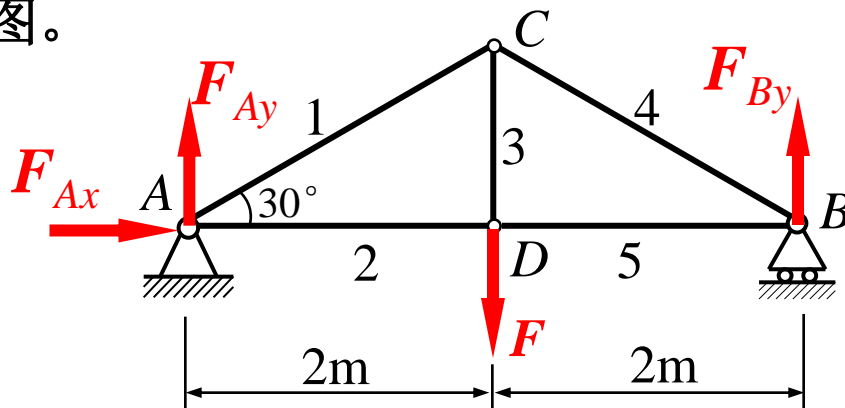
$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} = 0$$

$$\sum M_A(F) = 0, \quad 2F - 4F_{By} = 0$$

$$F_{By} = 5\text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} + F_{By} - F = 0$$

$$F_{Ay} = 5\text{ kN}$$



再分别以节点A、C、D为研究对象，受力如图。

节点A  $\sum F_x = 0, F_{Ax} + F_2 + F_1 \cos 30^\circ = 0$

$$\sum F_y = 0, F_{Ay} + F_1 \sin 30^\circ = 0$$

节点C  $\sum F_x = 0, F_4 \cos 30^\circ - F'_1 \cos 30^\circ = 0$

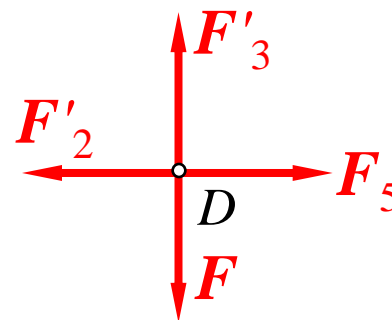
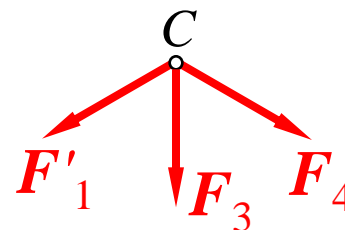
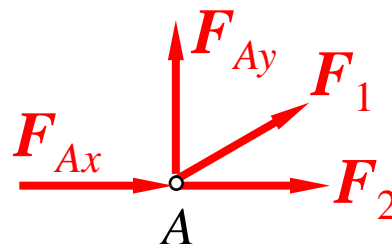
$$\sum F_y = 0, -F_3 - (F'_1 + F_4) \sin 30^\circ = 0$$

节点D  $\sum F_x = 0, F_5 - F'_2 = 0$

解上述5个方程得

$$F_1 = -10 \text{ kN}, F_2 = 8.66 \text{ kN}, F_3 = 10 \text{ kN}$$

$$F_4 = -10 \text{ kN}, F_5 = 8.66 \text{ kN} \quad \text{其中1, 4杆受压。}$$

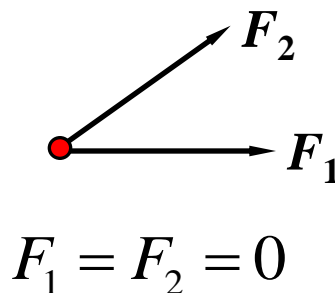


## 二、特殊杆件的内力判断

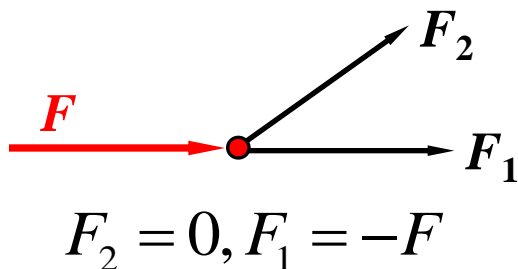
内力为零的杆件称为零杆。

以下可直接判断零杆。

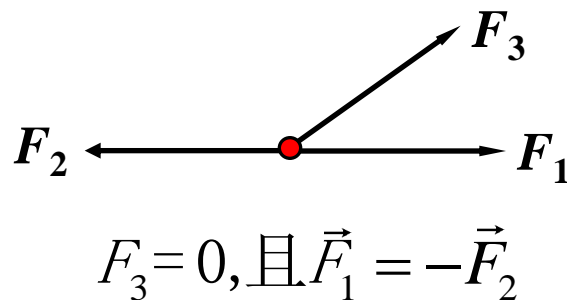
- ①  
**L型** 两杆节点无载荷、且两杆不在一条直线上时，该两杆是零杆。



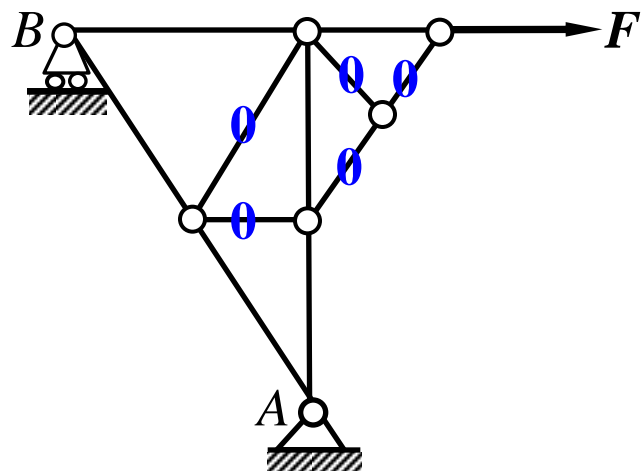
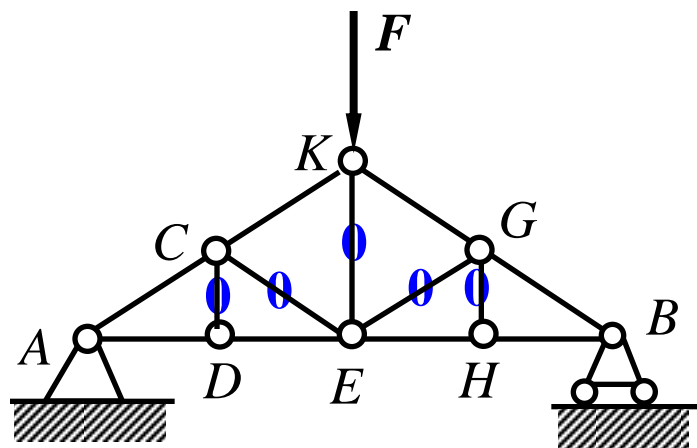
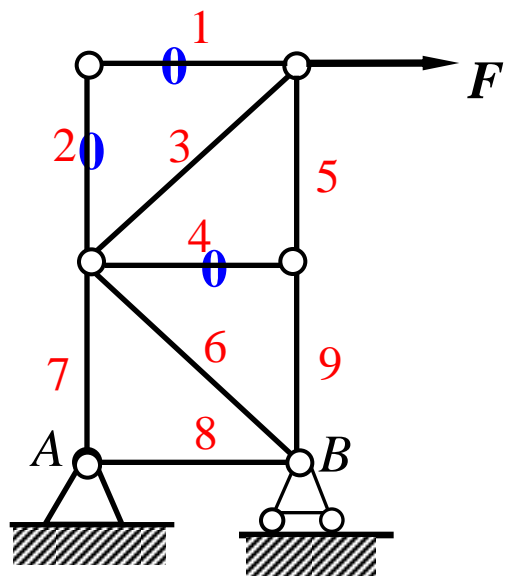
L型节点受外载，且外载荷沿其中一根杆作用，则另一根杆为零杆。



- ②  
**T型** 三杆节点无载荷、其中两杆在一条直线上，另一杆必为零杆



# 用零杆判别法确定下列桁架中的零杆

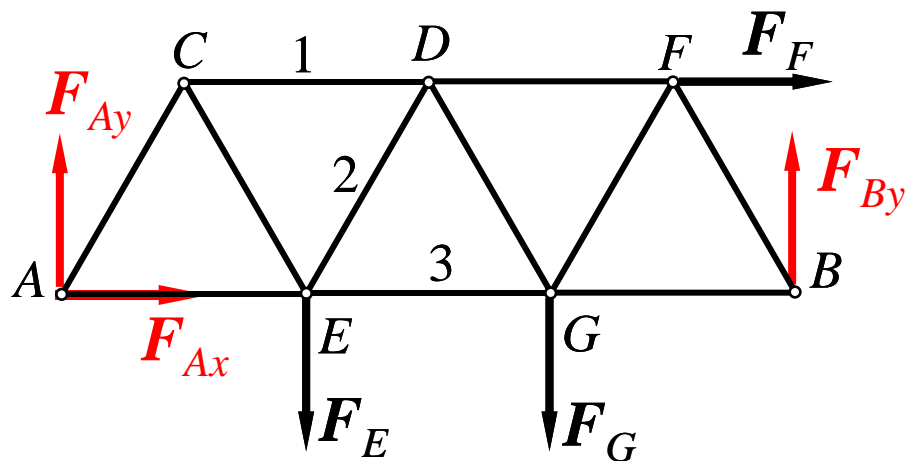
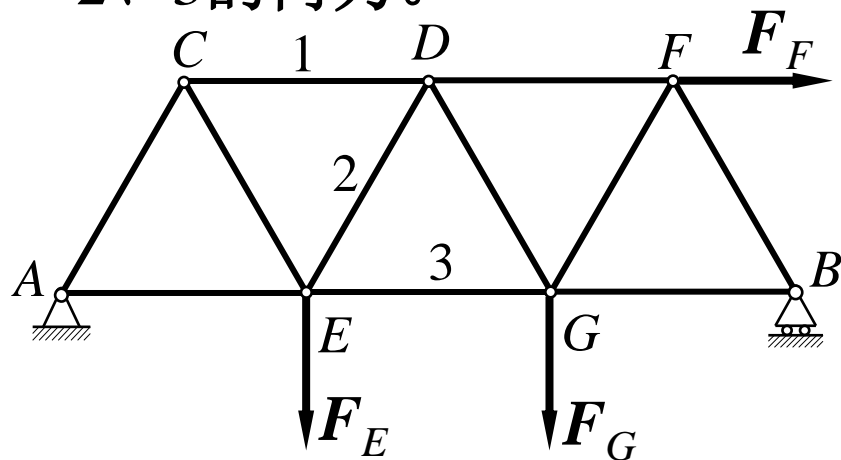


零杆在桁架中不能拆去，但进行受力分析时可以不考虑。

### 三、 截面法

用假想的截面将桁架截开，取至少包含两个节点以上部分为研究对象，考虑其平衡，求出被截杆件内力，这就是截面法。

[例] 图示平面桁架，各杆长度均为1m，在节点 $E$ ， $G$ ， $F$ 上分别作用荷载 $F_E=10$  kN， $F_G=7$  kN， $F_F=5$  kN。试求杆1、2、3的内力。

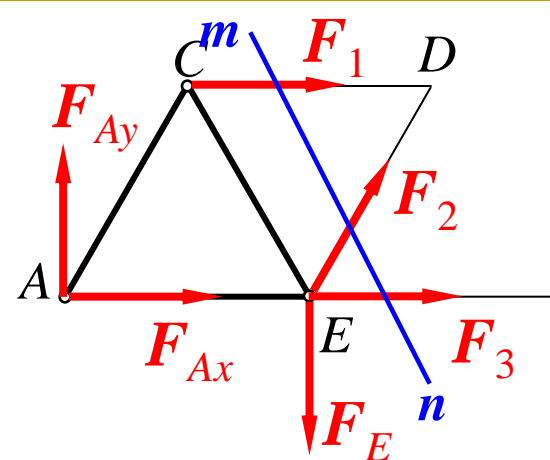
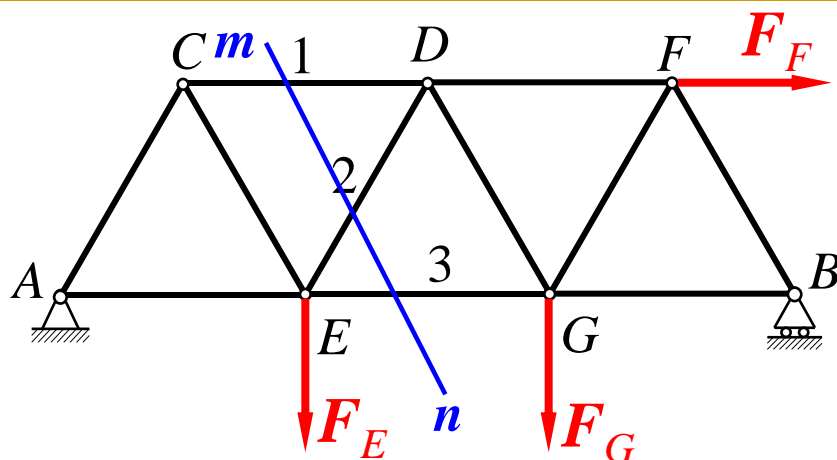


解：取整体分析

$$\Sigma F_x = 0, \quad F_{Ax} + F_F = 0$$

$$\sum M_B(F) = 0, \quad F_E \cdot 2 + F_G \cdot 1 - F_F \sin 60^\circ \cdot 1 - F_{Ay} \cdot 3 = 0$$

解得  $F_{Ax} = -5 \text{ kN}$ ,  $F_{Ay} = 7.557 \text{ kN}$



为求1、2、3杆的内力，可作一截面 $m-n$ 将三杆截断，选定桁架左半部分为研究对象。假定所截断的三根杆都受拉力，受力如图所示，为一平面任意力系。

$$\sum M_E(F) = 0, \quad -F_1 \sin 60^\circ \cdot 1 - F_{Ay} \cdot 1 = 0$$

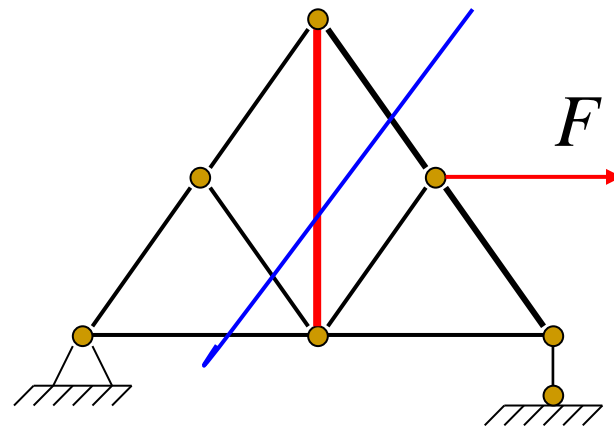
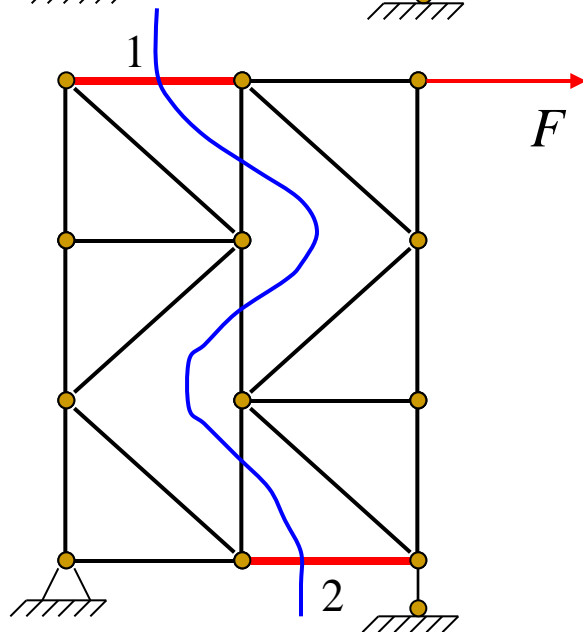
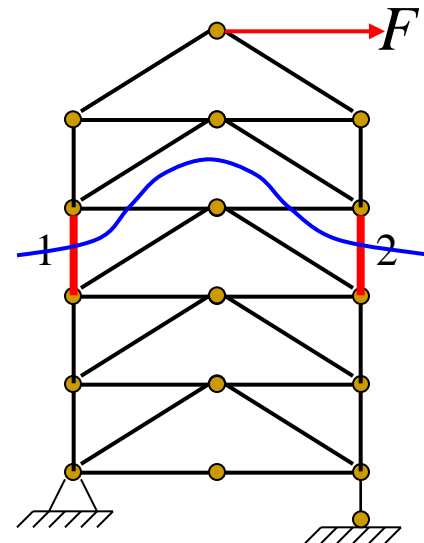
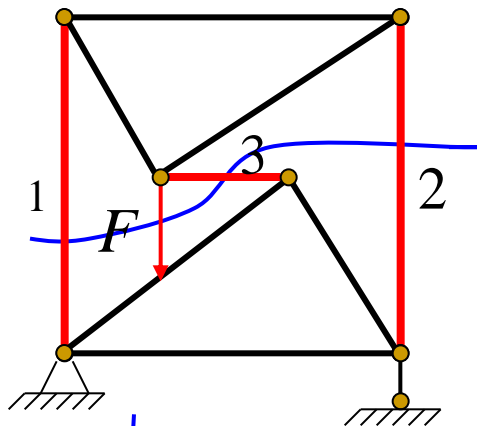
$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} + F_2 \sin 60^\circ - F_E = 0$$

$$\sum M_D(F) = 0, \quad F_E \cdot \frac{1}{2} + F_3 \cdot \sin 60^\circ \cdot 1 - F_{Ay} \cdot 1.5 + F_{Ax} \sin 60^\circ \cdot 1 = 0$$

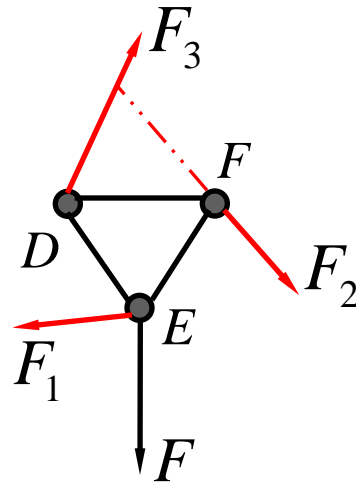
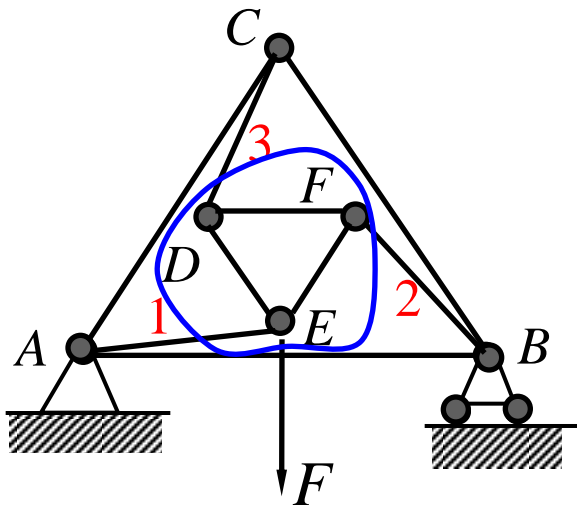
解得  $F_1 = -8.726 \text{ kN}$ ,  $F_2 = 2.821 \text{ kN}$ ,  $F_3 = 12.32 \text{ kN}$

求得1杆受力为负值，说明1杆受压。

思考题：求下列各桁架指定杆件的轴力。







## 四、 截面法与节点法的综合应用

悬臂式桁架如图所示。 $a=2\text{ m}$ ,  $b=1.5\text{ m}$ , 试求杆件 $GH$ ,  $HJ$ ,  $HK$ 的内力。

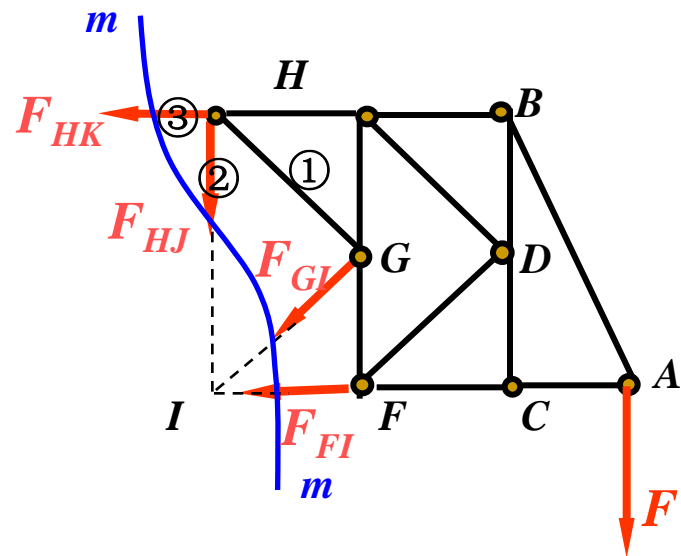
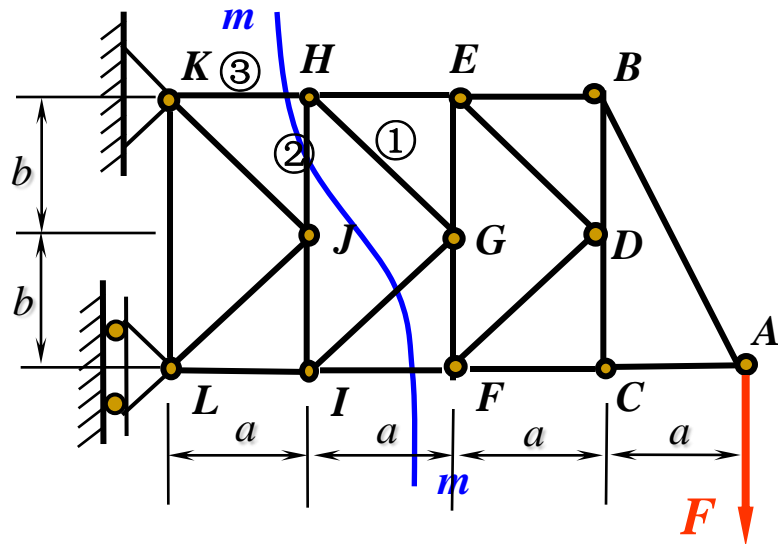
解：联合应用节点法和截面法求解。

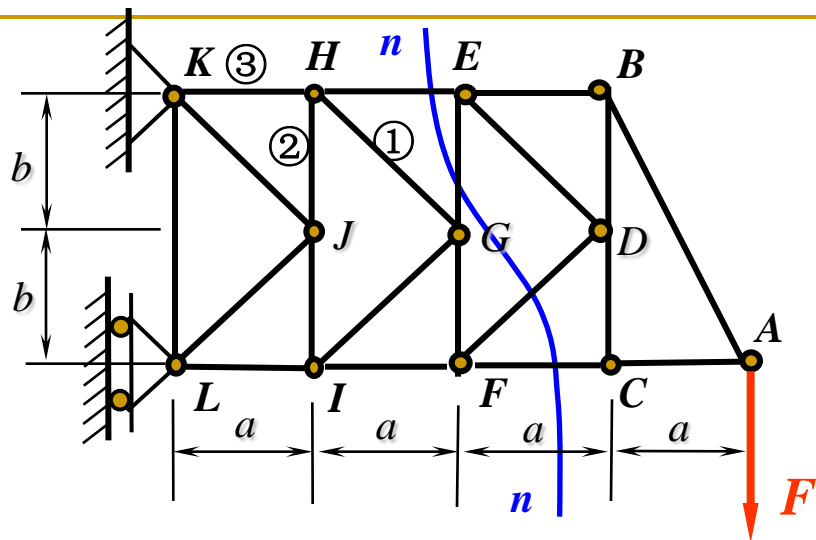
1. 用截面 $m-m$ 将杆 $HK$ ,  $HJ$ ,  $GI$ ,  $FI$ 截断。取右半桁架为研究对象，受力分析如图。

列平衡方程  $\sum M_I(F) = 0$

$$-F \times 3a + F_{HK} \times 2b = 0$$

解得  $F_{HK} = 2F$



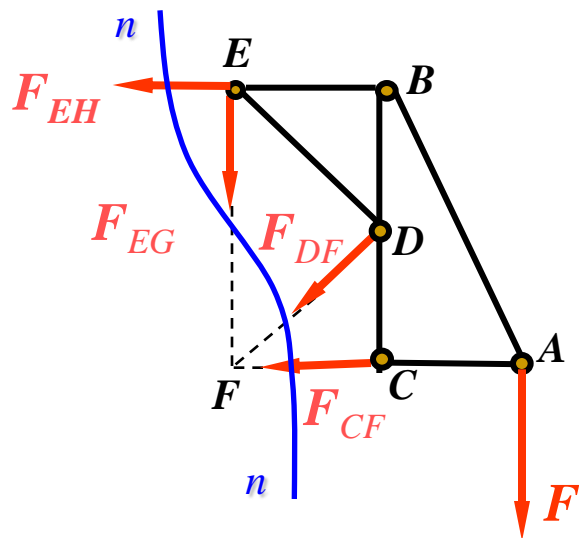


2. 用截面 $n-n$ 将杆 $EH$ ,  $EG$ ,  $DF$ ,  $CF$ 截断。

取右半桁架为研究对象，受力分析如图。

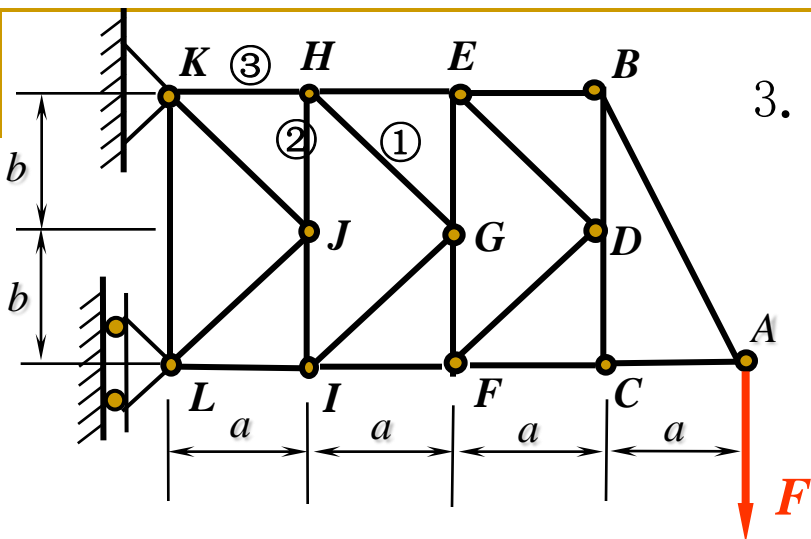
列平衡方程

$$\sum M_F(F) = 0, \quad -F \times 2a + F_{EH} \times 2b = 0$$



解得

$$F_{EH} = \frac{4}{3} F$$

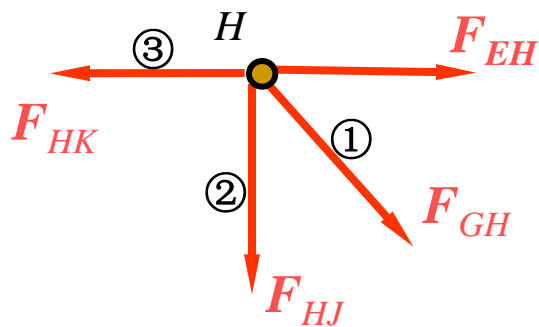


3. 取节点H为研究对象，受力分析如图。

列平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad F_{EH} + F_{GH} \times \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} - F_{HK} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad -F_{GH} \times \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} - F_{HJ} = 0$$



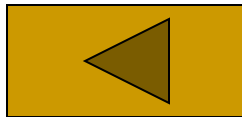
解得

$$F_{GH} = (F_{HK} - F_{EH}) \times \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{5}{6} F$$

$$F_{HJ} = -F_{GH} \times \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -\frac{F}{2}$$

说明：节点法：用于设计，计算全部杆内力  
截面法：用于校核，计算部分杆内力  
先把杆都设为拉力,计算结果为负时,  
说明是压力,与所设方向相反。

# 本章结束



# 理论力学

## 第三章 空间力系

## § 3-1 空间汇交力系

### 一、力在坐标轴上的投影

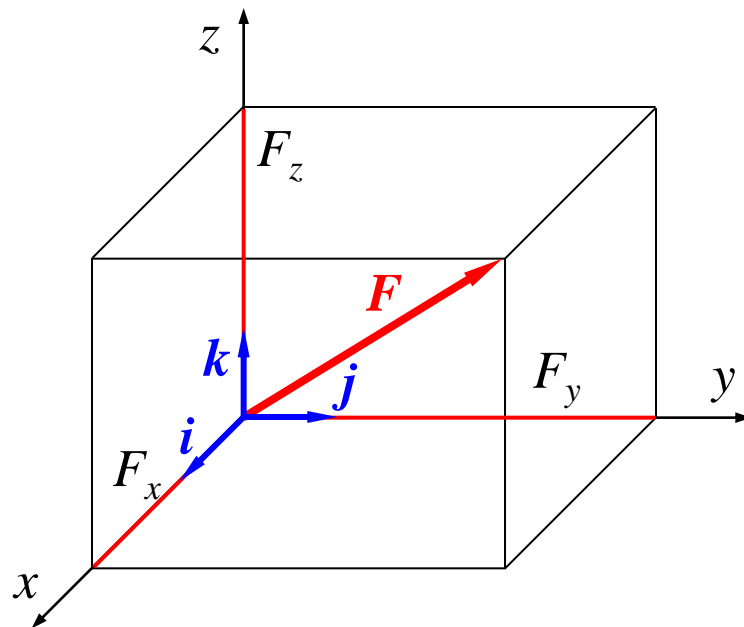
#### 1、直接投影法

若已知力与正交坐标系 $Oxyz$ 三轴间的夹角，则用**直接投影法**

$$F_x = F \cos(F, i)$$

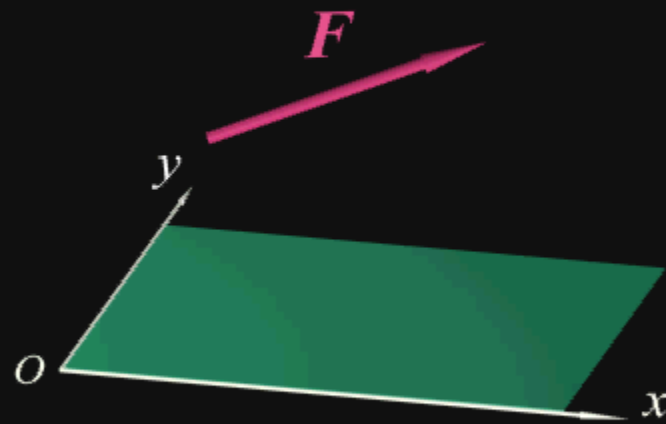
$$F_y = F \cos(F, j)$$

$$F_z = F \cos(F, k)$$





## 空间力在平面上的投影



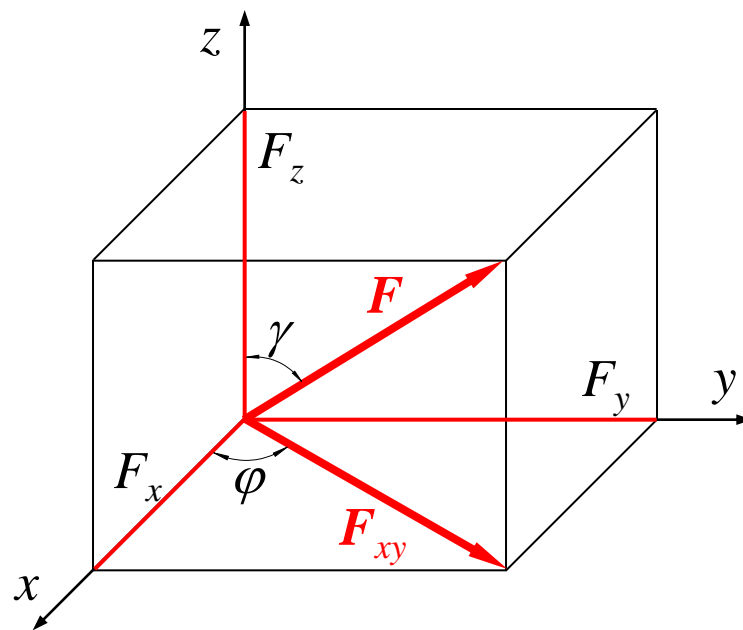
## 2、二次（间接）投影法

当力与坐标轴 $Ox$ 、 $Oy$ 间的夹角不易确定时，可把力 $F$ 先投影到坐标平面 $Oxy$ 上，得到力 $F_{xy}$ ，然后再把这个力投影到 $x$ 、 $y$ 轴上，这叫**二次（间接）投影法**。

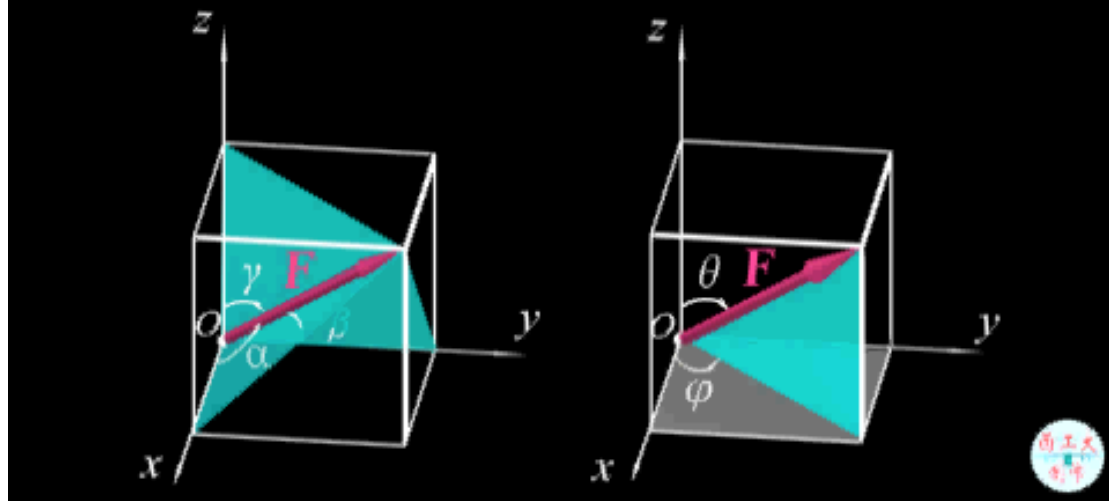
$$F_x = F \sin \gamma \cos \varphi$$

$$F_y = F \sin \gamma \sin \varphi$$

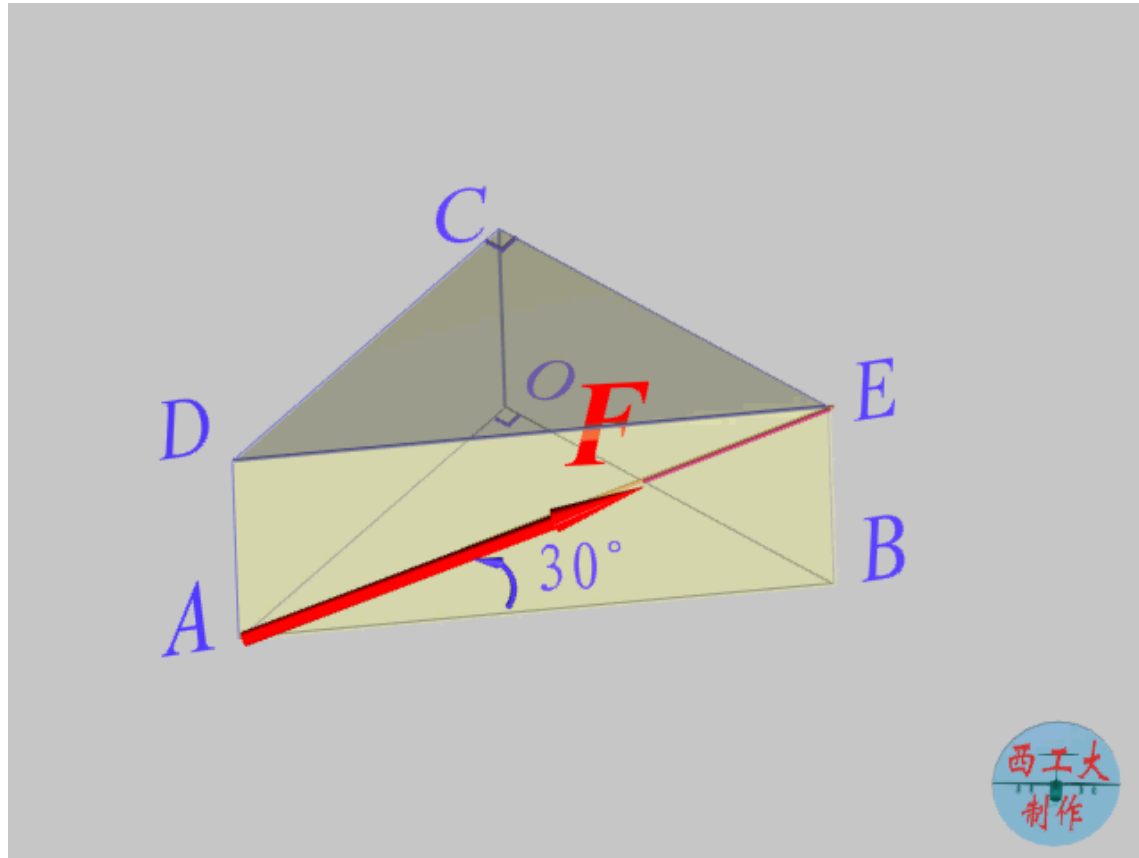
$$F_z = F \cos \gamma$$



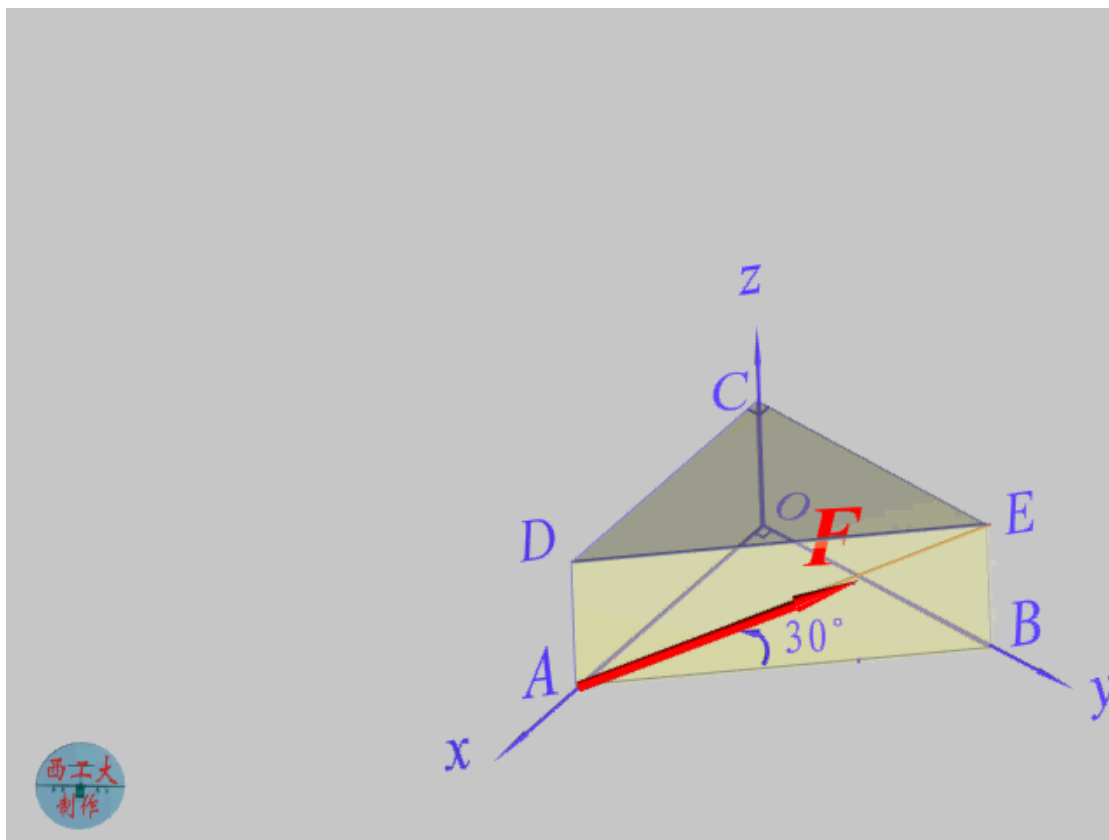
## 二次投影法



[例] 三棱柱底面为直角等腰三角形，在其侧平面 $ABED$ 上作用有一力 $F$ ，力 $F$ 与 $OAB$ 平面夹角为 $30^\circ$ ，求力 $F$ 在三个坐标轴上的投影。



利用二次投影法，先将力 $F$ 投影到 $Oxy$ 平面上，然后再分别向 $x$ ， $y$ ， $z$ 轴投影。



## 二、空间汇交力系的合成与平衡

### 1、合成

将平面汇交力系合成结果推广到空间汇交力系得：

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = \Sigma \vec{F}_i$$

或 
$$\vec{F}_R = \Sigma F_x \vec{i} + \Sigma F_y \vec{j} + \Sigma F_z \vec{k}$$

合力的大小和方向为：

$$F_R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2 + (\Sigma F_z)^2}$$

$$\cos(\vec{F}_R, \vec{i}) = \frac{\Sigma F_x}{F_R}, \cos(\vec{F}_R, \vec{j}) = \frac{\Sigma F_y}{F_R}, \cos(\vec{F}_R, \vec{k}) = \frac{\Sigma F_z}{F_R}$$

## 2、平衡

空间汇交力系平衡的必要与充分条件是：该力系的合力等于零。

$$\mathbf{F}_R = \sum \mathbf{F}_i = 0$$

以解析式表示为：

$$\sum F_x = 0$$

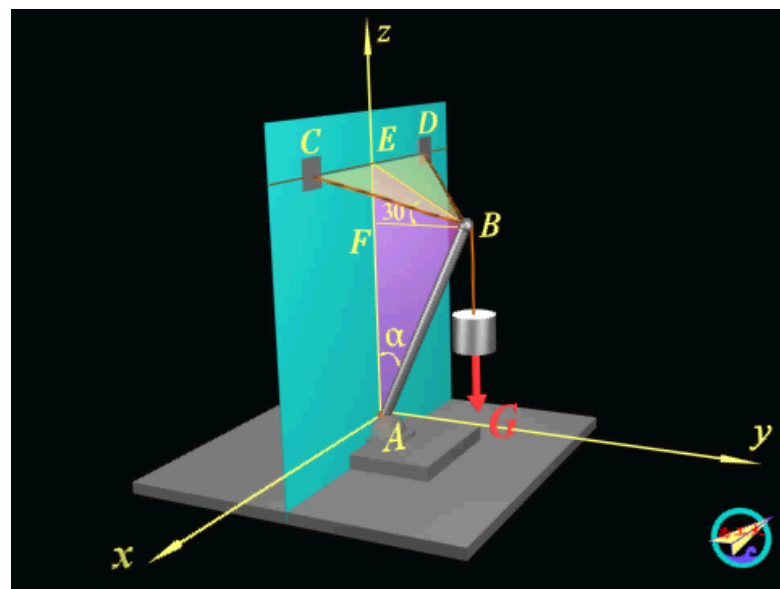
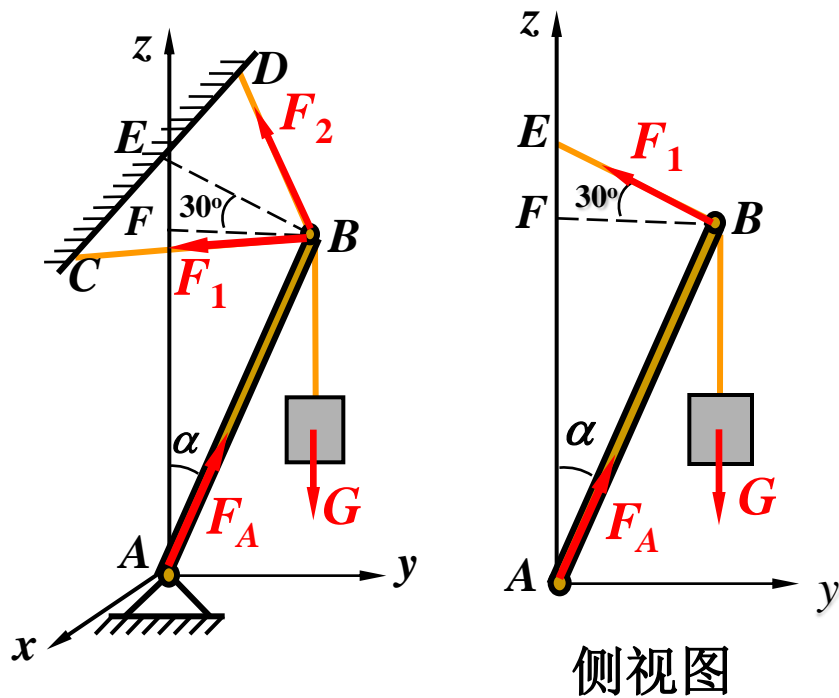
$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

空间汇交力系平衡的必要与充分条件是：该力系力系中所有各力在三个坐标轴上的投影的代数和分别等于零。

[例]图示为起重机吊起重物。起重杆的A端用球铰链固定在地面上，B端用绳CB和DB拉住，两绳分别系在墙上的C点和D点，连线CD平行于x轴。已知 $CE=EB=DE$ ，角 $\alpha=30^\circ$ ， $CDB$ 平面与水平面间的夹角 $\angle EBF=30^\circ$ ，重物 $G=10\text{kN}$ 。如不计起重杆的重量，试求起重杆所受的力和绳子的拉力。

解：1.取杆AB与重物为研究对象，受力分析如图。





## 2. 列平衡方程

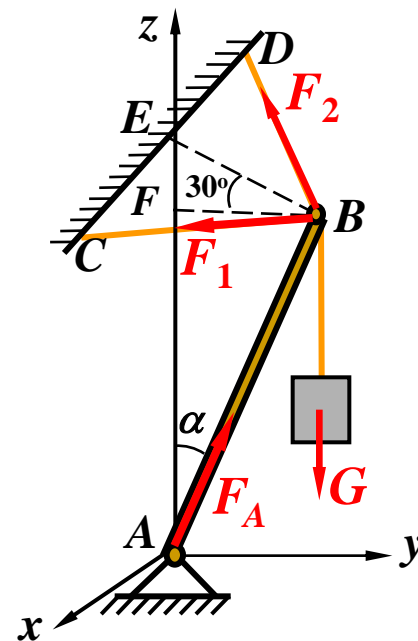
$$\sum F_x = 0 \quad F_1 \sin 45^\circ - F_2 \sin 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_A \sin 30^\circ - F_1 \cos 45^\circ \cos 30^\circ - F_2 \cos 45^\circ \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum F_z = 0 \quad F_1 \cos 45^\circ \sin 30^\circ + F_2 \cos 45^\circ \sin 30^\circ + F_A \cos 30^\circ - G = 0$$

## 3. 联立求解

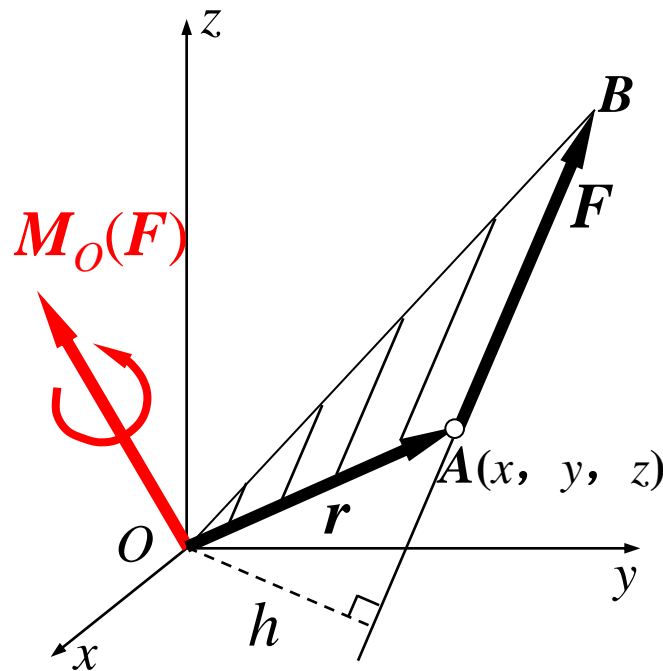
$$F_1 = F_2 = 3.54 \text{ kN}, \quad F_A = 8.66 \text{ kN}$$



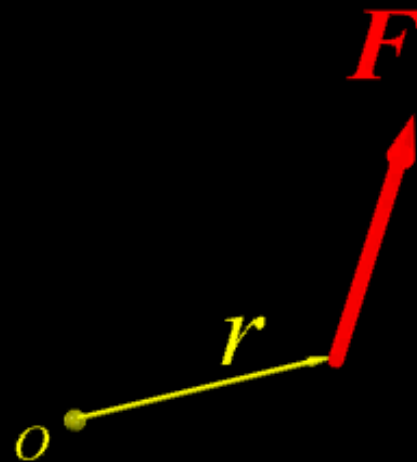
## § 3-2 力对点的矩和力对轴的矩

### 一、力对点的矩以矢量表示—力矩矢

空间力对点的矩的作用效果取决于：力矩的大小、转向和力矩作用面方位。这三个因素可用一个矢量 $M_O(F)$ 表示，如图。其模表示力矩的大小；指向表示力矩在其作用面内的转向(符合右手螺旋法则)；方位表示力矩作用面的法线。由于力矩与矩心的位置有关，所以力矩矢的始端一定在矩心 $O$ 处，是定位矢量。



## 力对点的矩



以 $\vec{r}$ 表示力作用点A的矢径，则

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

以矩心O为原点建立坐标系，则

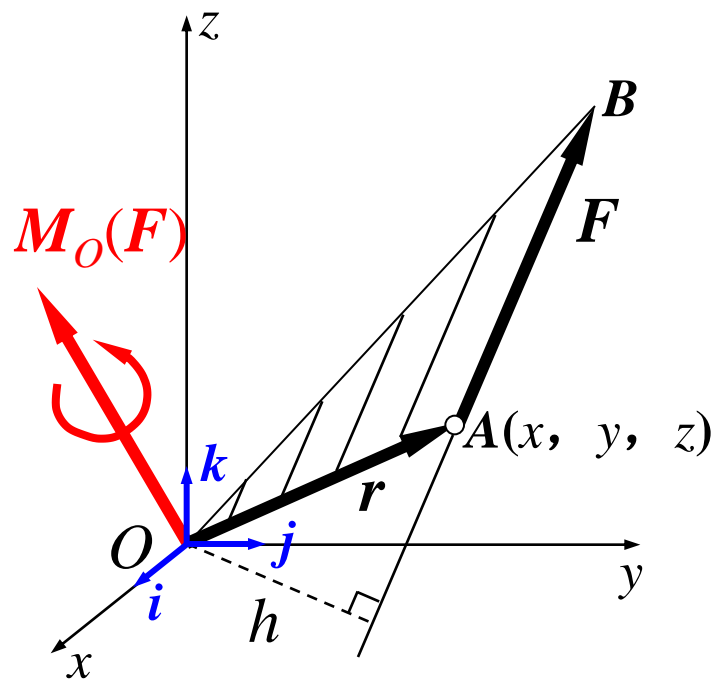
$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$\therefore \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}$$

$$= [\vec{M}_O(\vec{F})]_x\vec{i} + [\vec{M}_O(\vec{F})]_y\vec{j} + [\vec{M}_O(\vec{F})]_z\vec{k}$$

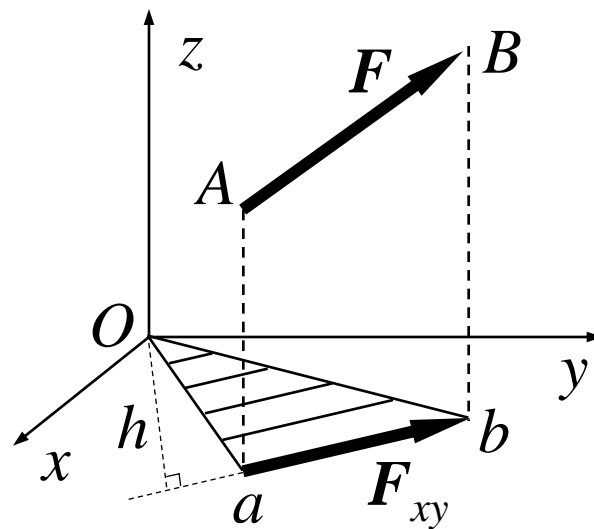


## 二、力对轴的矩

### 1、力对轴之矩的定义

力对轴的矩定义为力在与该轴垂直面上的投影对该轴与此垂直平面交点的矩。

$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy} h = \pm 2A_{\Delta Oab}$$

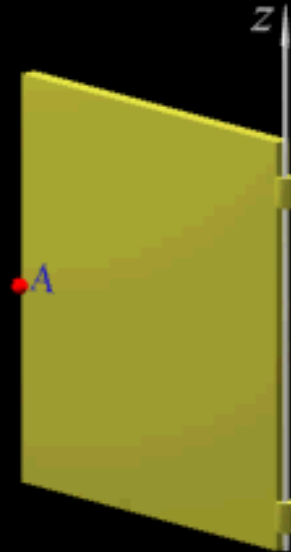


力对轴的矩是力使刚体绕该轴转动效果的度量，是一个**代数量**。

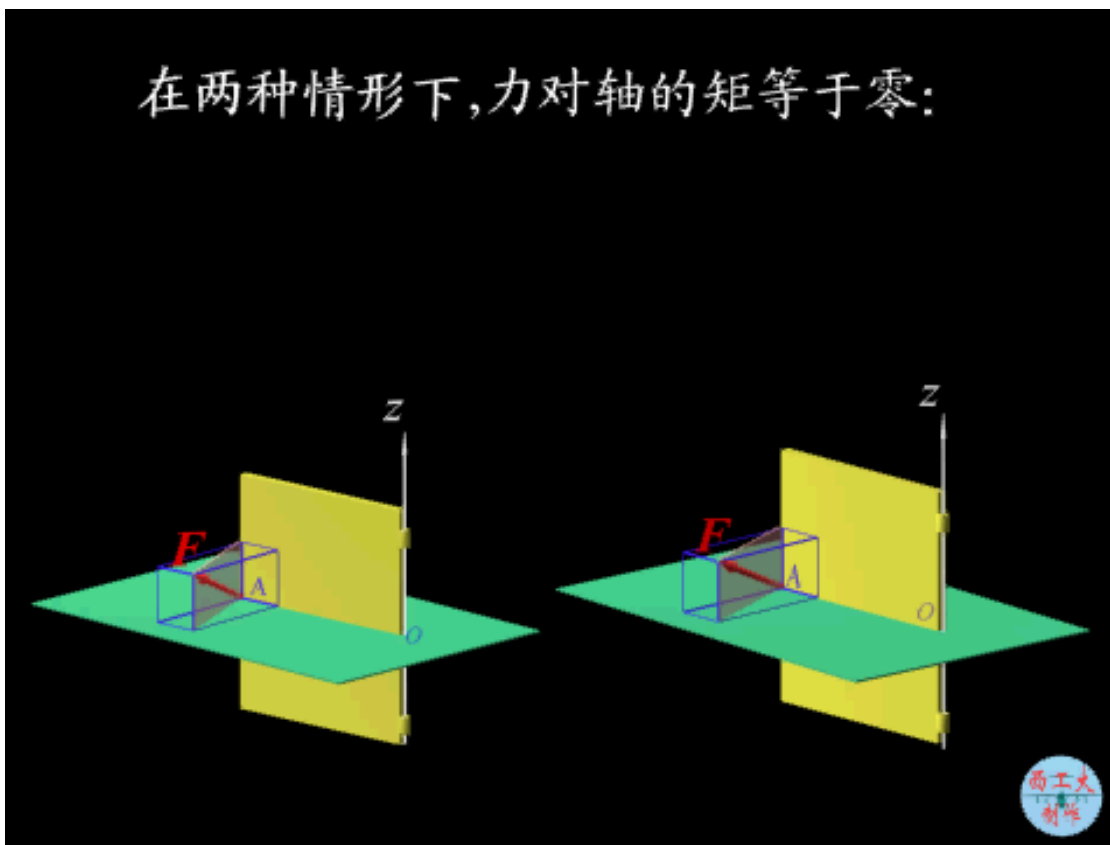
符号规定：从z轴正向看，若力使刚体逆时针转则取正号，反之取负。也可按右手螺旋法则确定其正负号。

由定义可知：(1)当力的作用线与轴平行或相交(共面)时，力对轴的矩等于零。(2)当力沿作用线移动时，它对于轴的矩不变。

## 力对轴的矩



在两种情形下,力对轴的矩等于零:



## 2、力对轴之矩的解析表达式

设力 $F$ 在三个坐标轴上的投影分别为 $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$ , 力作用点 $A$ 的坐标为 $(x, y, z)$ , 则

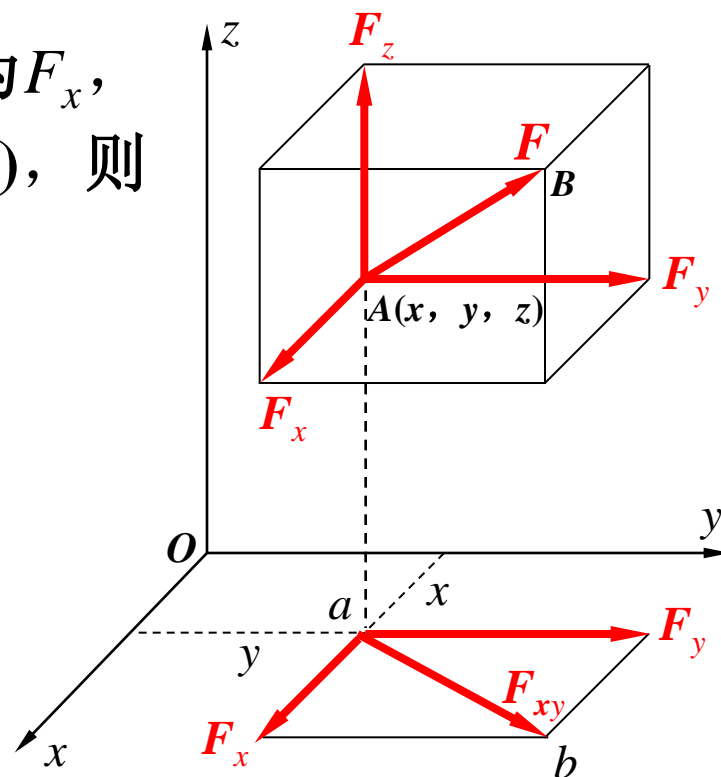
$$\begin{aligned}M_z(\vec{F}) &= M_O(\vec{F}_{xy}) \\&= M_O(\vec{F}_x) + M_O(\vec{F}_y) \\&= xF_y - yF_x\end{aligned}$$

同理可得其它两式。故有

$$M_x(\vec{F}) = yF_z - zF_y$$

$$M_y(\vec{F}) = zF_x - xF_z$$

$$M_z(\vec{F}) = xF_y - yF_x$$





### 3、力对点的矩与力对过该点的轴的矩的关系

比较力对点的矩和力对轴的矩的解析表达式得：

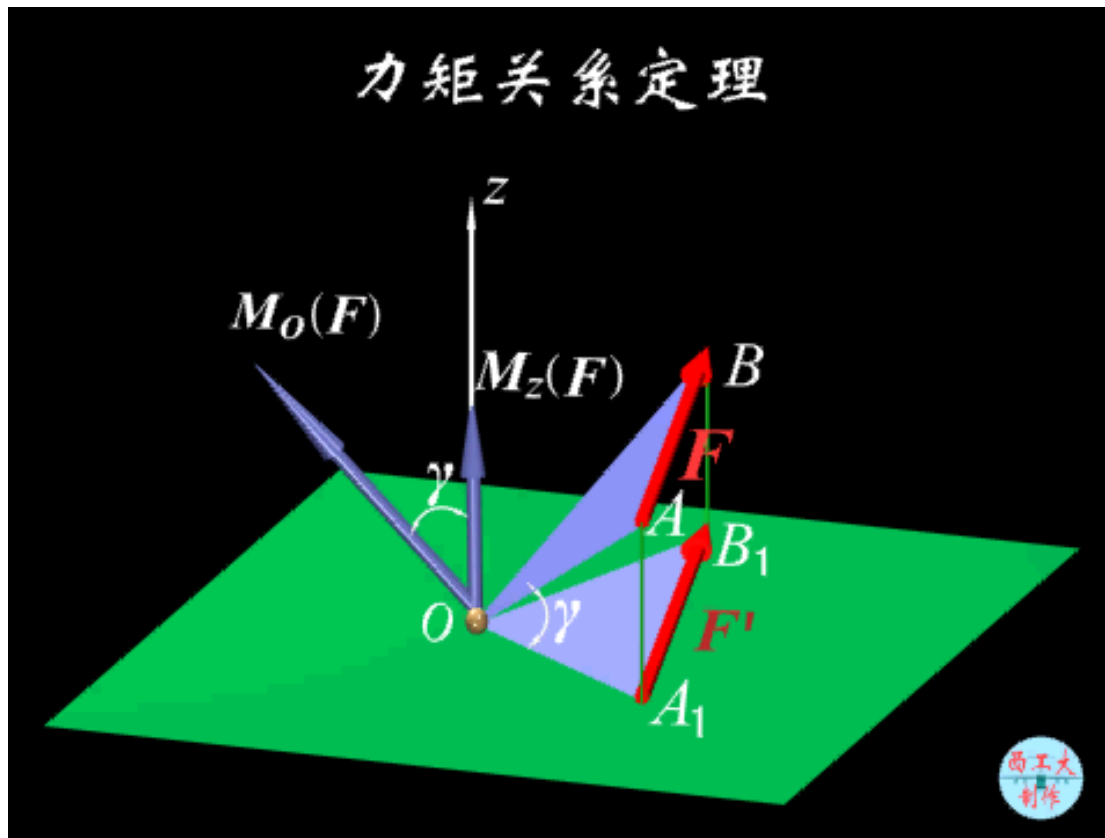
$$[\vec{M}_O(\vec{F})]_x = M_x(\vec{F})$$

$$[\vec{M}_O(\vec{F})]_y = M_y(\vec{F})$$

$$[\vec{M}_O(\vec{F})]_z = M_z(\vec{F})$$

即：对点的矩矢在通过该点的某轴上的投影，  
等于力对该轴的矩。

## 力矩关系定理



[例]求力 $F$ 在三轴上的投影和对三轴的矩。

解：

$$F_x = F \cos \theta \cos \varphi = \frac{Fa}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

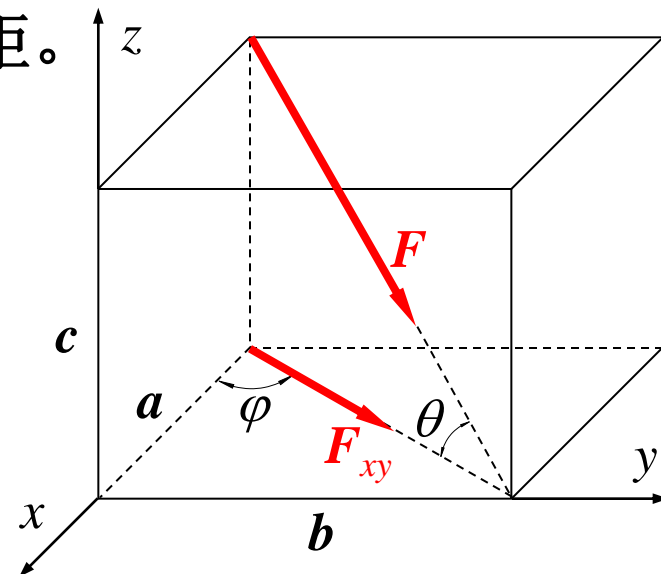
$$F_y = F \cos \theta \sin \varphi = \frac{Fb}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$F_z = -F \sin \theta = \frac{-Fc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$M_x(F) = M_x(F_x) + M_x(F_y) + M_x(F_z) = -F_y c$$

$$M_y(F) = 0$$

$$M_z(F) = M_z(F_x) + M_z(F_y) + M_z(F_z) = -F_y a$$



$$\cos \theta = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

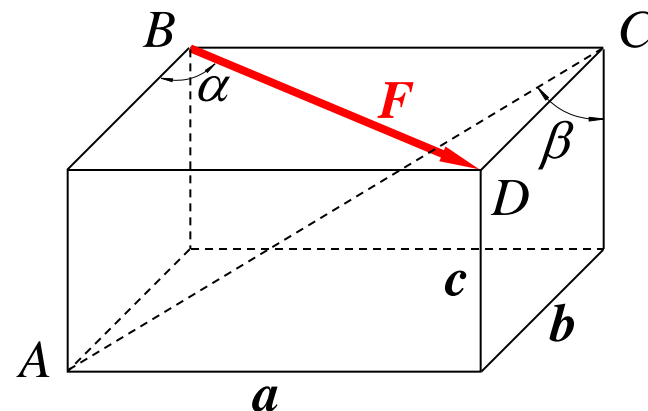
$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

[例]如图所示，长方体棱长为 $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，力 $F$ 沿 $BD$ ，求力 $F$ 对 $AC$ 之矩。

解：  $M_{AC}(\mathbf{F}) = [\mathbf{M}_C(\mathbf{F})]_{AC}$

$$|\mathbf{M}_C(\mathbf{F})| = F \cos \alpha \cdot a = \frac{Fba}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

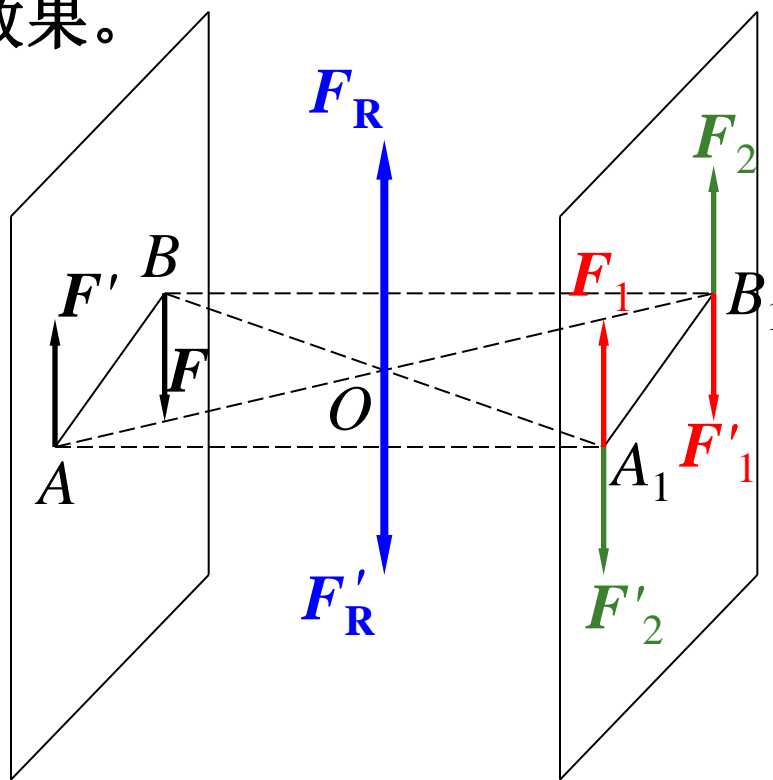
$$M_{AC}(\mathbf{F}) = |\mathbf{M}_C(\mathbf{F})| \cos \beta = \frac{Fabc}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



## § 3-3 空间力偶

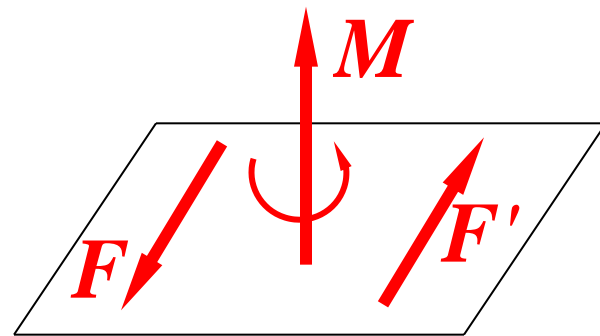
### 一、力偶的矢量表示

性质：力偶由一个平面平行移至刚体另一个平行平面不影响它对刚体的作用效果。



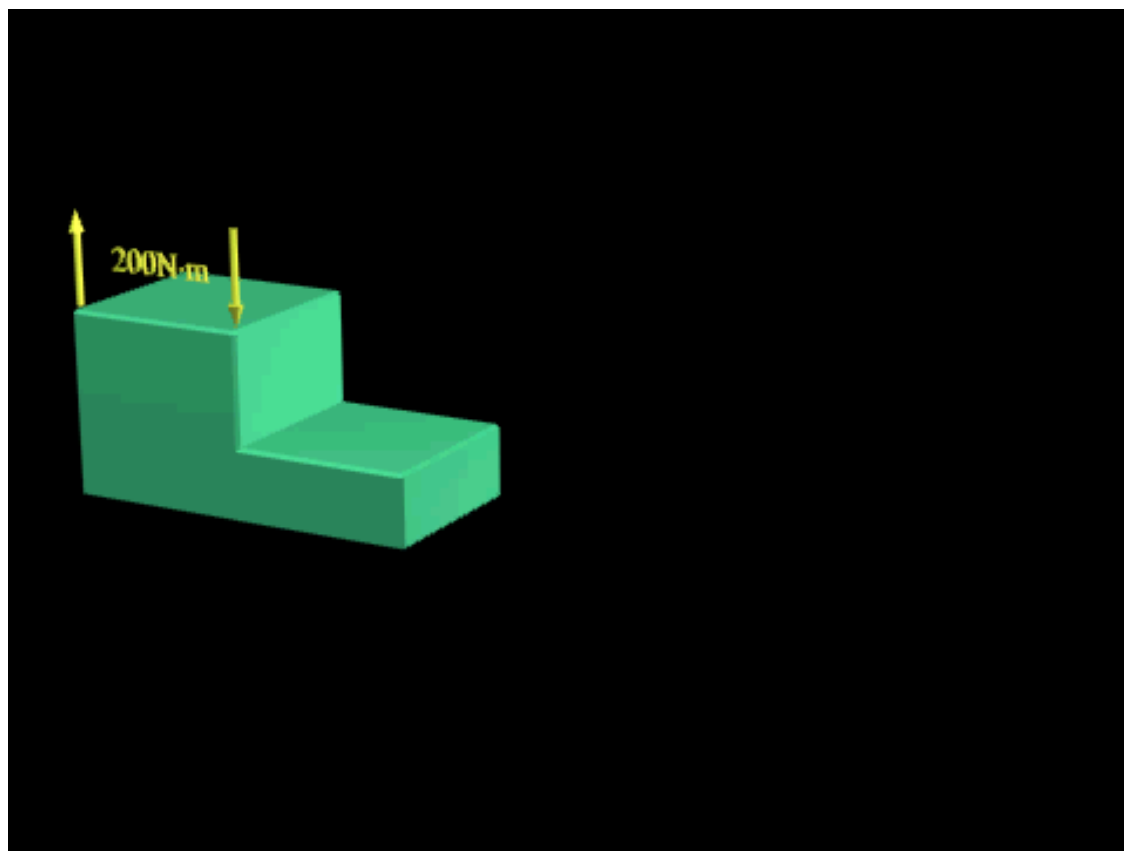
由力偶的性质可知：力偶的作用效用取决于力偶矩的大小、力偶的转向和力偶作用面的方位。因此可用一矢量 $M$ 表示：用 $M$ 的模表示力偶矩的大小； $M$ 的指向按右手螺旋法则表示力偶的转向； $M$ 的作用线与力偶作用面的法线方位相同。如图所示。 $M$ 称为力偶矩矢。

力偶矩矢为一自由矢量。

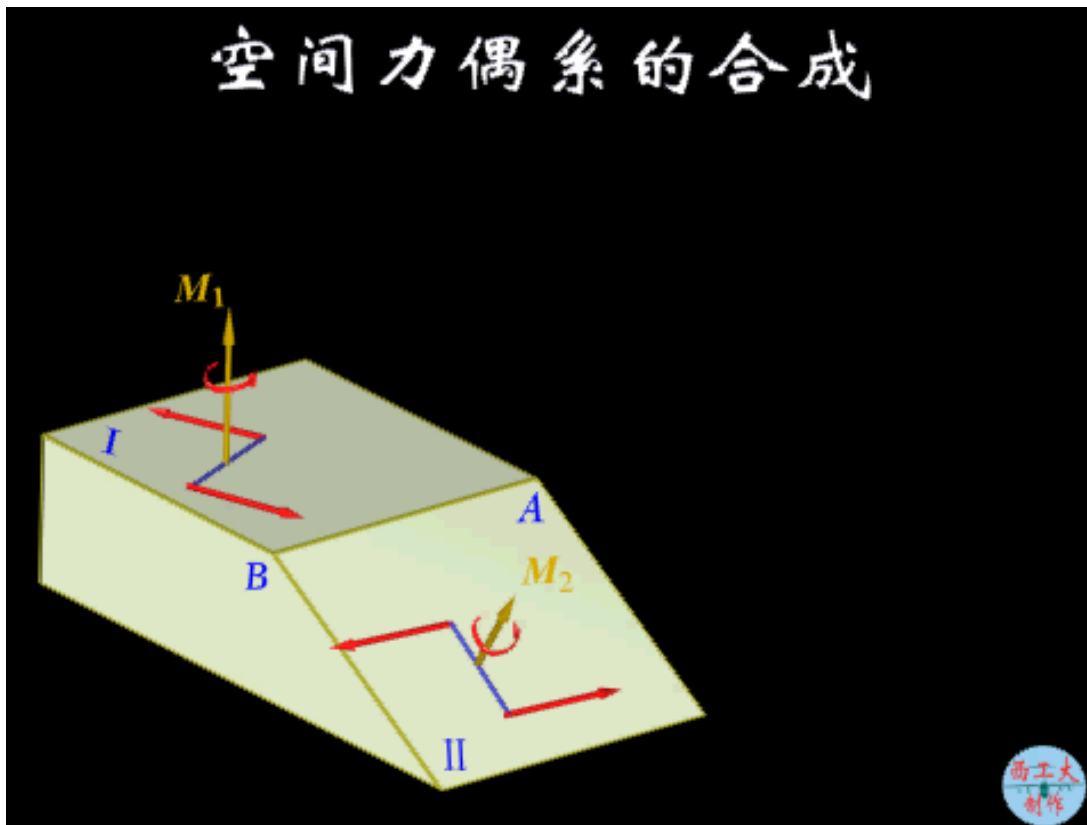


## 二、空间力偶等效定理

空间力偶的等效条件是：作用在同一刚体上的两个力偶，如果力偶矩矢相等，则两力偶等效。



## 空间力偶系的合成





### 三、空间力偶系的合成与平衡

#### 1、合成

力偶作用面不在同一平面内的力偶系称为空间力偶系。

空间力偶系合成的最后结果为一个合力偶，合力偶矩矢等于各分力偶矩矢的矢量和。即：

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \cdots + \vec{M}_n = \sum \vec{M}_i$$

根据合矢量投影定理：

$$M_x = \sum M_x, M_y = \sum M_y, M_z = \sum M_z$$

于是合力偶矩的大小和方向可由下式确定：

$$M = \sqrt{(\sum M_x)^2 + (\sum M_y)^2 + (\sum M_z)^2}$$

$$\cos(M, i) = \frac{M_x}{M}$$

$$\cos(M, j) = \frac{M_y}{M}$$

$$\cos(M, k) = \frac{M_z}{M}$$

[例]工件如图所示，它的四个面上同时钻五个孔，每个孔所受的切削力偶矩均为 $80\text{ N}\cdot\text{m}$ 。求工件所受合力偶的矩在 $x, y, z$ 轴上的投影 $M_x, M_y, M_z$ ，并求合力偶矩矢的大小和方向。

解：将作用在四个面上的力偶用力偶矩矢表示，并平移到A点。

$$M_x = -M_3 - M_4 \cos 45^\circ - M_5 \cos 45^\circ = -193.1\text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_y = -M_2 = -80\text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_z = -M_1 - M_4 \cos 45^\circ - M_5 \cos 45^\circ = -193.1\text{ N}\cdot\text{m}$$

所以合力偶矩矢的大小

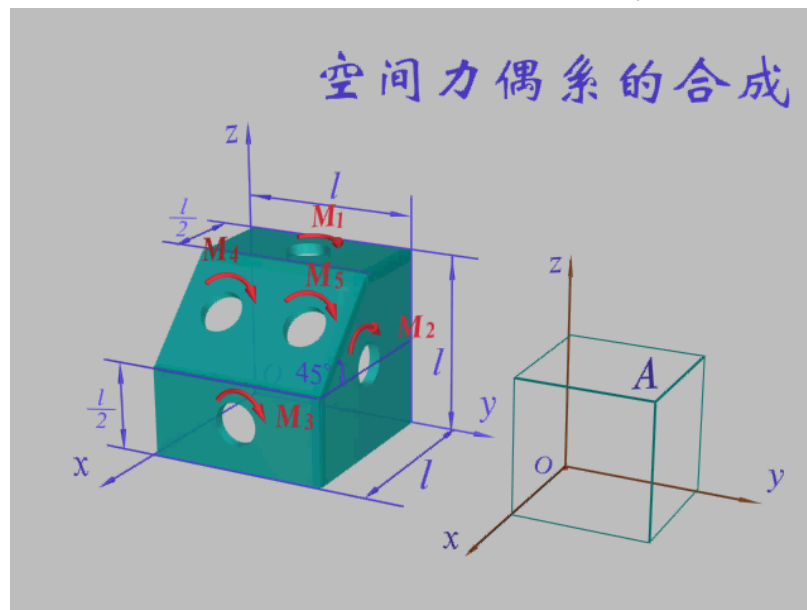
$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 284.6\text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\cos(\mathbf{M}, \mathbf{i}) = -0.6786$$

合力偶矩矢的方向余弦

$$\cos(\mathbf{M}, \mathbf{j}) = -0.2811$$

$$\cos(\mathbf{M}, \mathbf{k}) = -0.6786$$



## 2、平衡

空间力偶系可以合成一合力偶，所以空间力偶系平衡的必要与充分条件是：合力偶矩矢等于零。即：

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \cdots + \vec{M}_n = \sum \vec{M}_i = 0$$

因为：

$$M = \sqrt{(\sum M_x)^2 + (\sum M_y)^2 + (\sum M_z)^2}$$

所以：

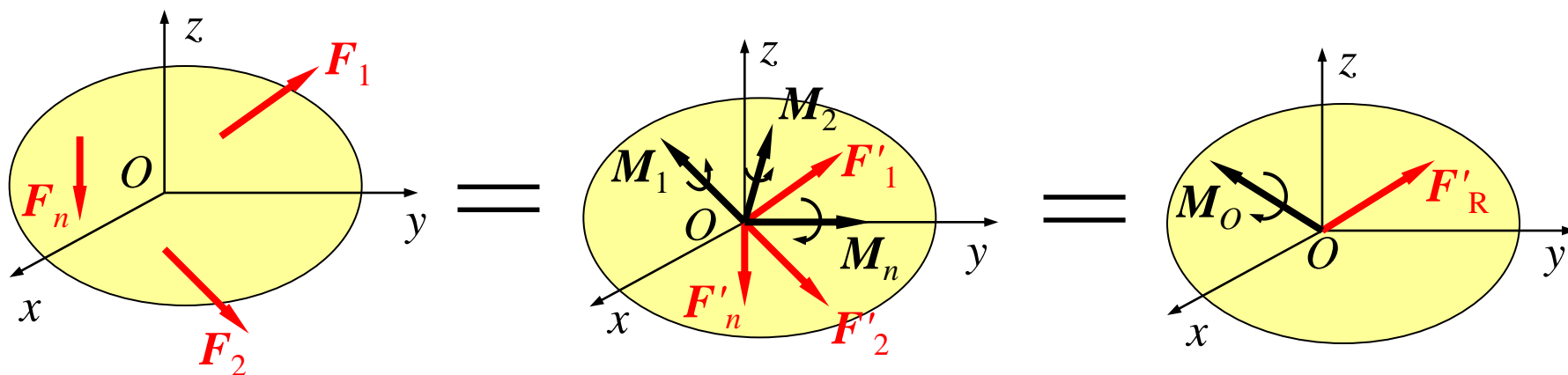
$$\begin{cases} \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$$

上式即为空间力偶系的平衡方程。

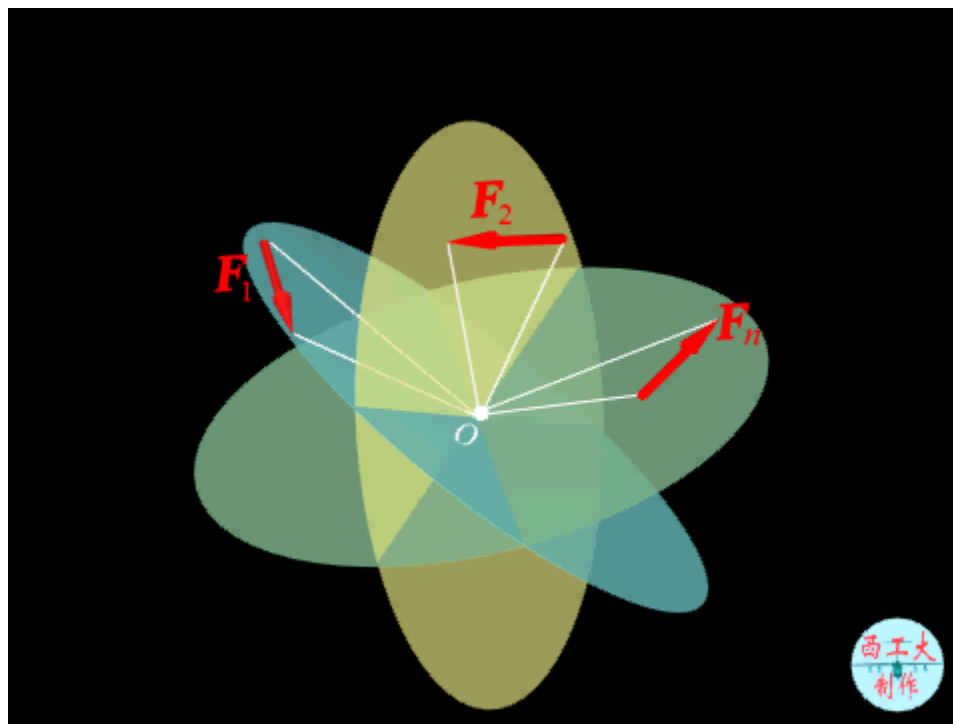
## § 3-4 空间任意力系的简化

### 一、空间任意力系向一点的简化

空间力系向点 $O$ 简化得到一空间汇交力系和一空间力偶系，如图。



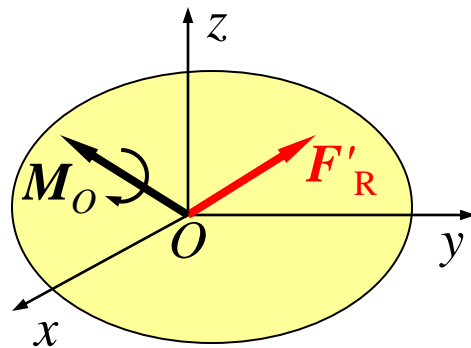
$$F'_i = F_i \quad M_i = M_O(F_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$



空间汇交力系可合成一合力 $F'_R$ :

$$\vec{F}'_R = \sum \vec{F}'_i = \sum \vec{F}_i$$

力系中各力的矢量和称为空间力系的**主矢**。  
主矢与简化中心的位置无关。

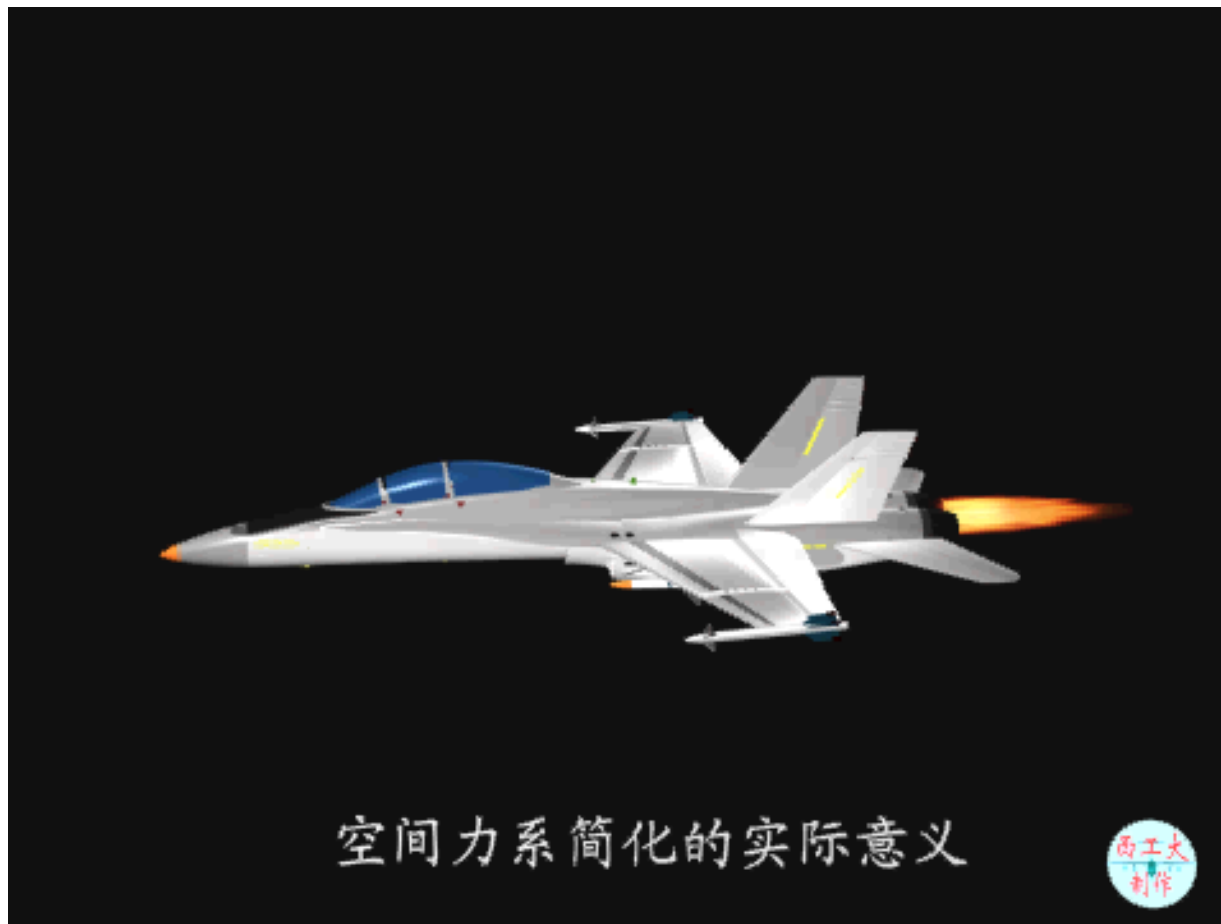


空间力偶系可合成为一合力偶，其矩矢 $M_O$ :

$$\vec{M}_O = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i)$$

力系中各力对简化中心之矩矢的矢量和称为力系对简化中心的**主矩**。主矩与简化中心的位置有关。

空间力系向任一点 $O$ 简化，可得一力和一力偶，这个力的大小和方向等于该力系的主矢，作用线通过简化中心 $O$ ；这个力偶的矩矢等于该力系对简化中心的主矩。



## 二、空间任意力系的简化结果分析

### 1、空间任意力系简化为一合力偶的情形

$$\mathbf{F}'_R = \mathbf{0}, \mathbf{M}_O \neq \mathbf{0}$$

简化结果为一个与原力系等效的合力偶，其合力偶矩矢等于对简化中心的主矩。此时力偶矩矢与简化中心位置无关。

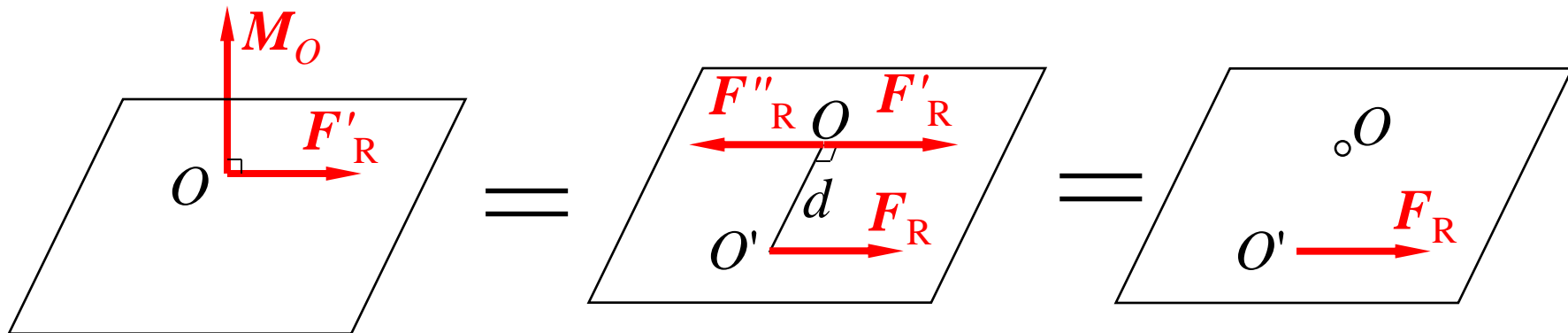
### 2、空间任意力系简化为一合力的情形

$$\mathbf{F}'_R \neq \mathbf{0}, \mathbf{M}_O = \mathbf{0}$$

简化结果为与原力系等效的合力，合力的作用线过简化中心 $O$ ，其大小和方向等于原力系的主矢。



$$F'_R \neq 0, M_O \neq 0, \text{ 且 } F'_R \perp M_O$$



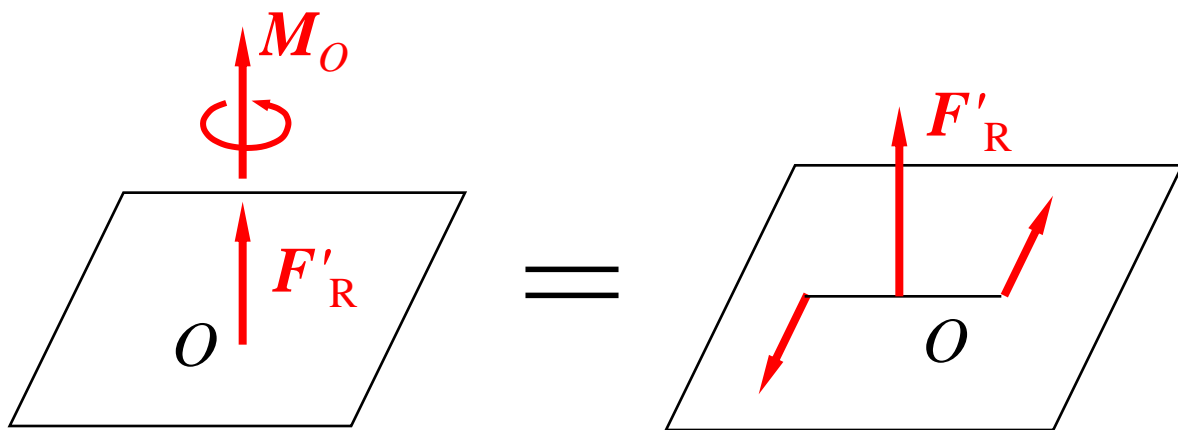
简化后为与原力系等效的合力，其大小和方向等于原力系的主矢，合力的作用线离简化中心 $O$ 的距离为

$$d = \frac{|M_O|}{F_R}$$

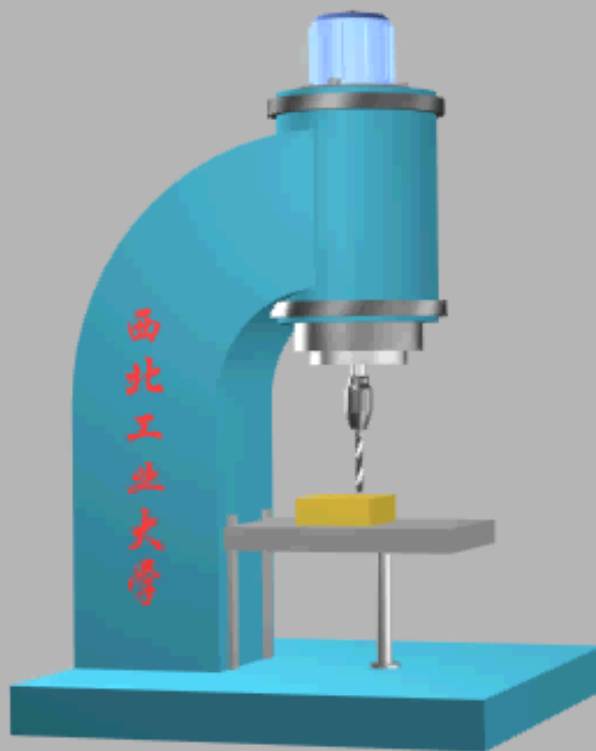
### 3、空间任意力系简化为力螺旋的情形

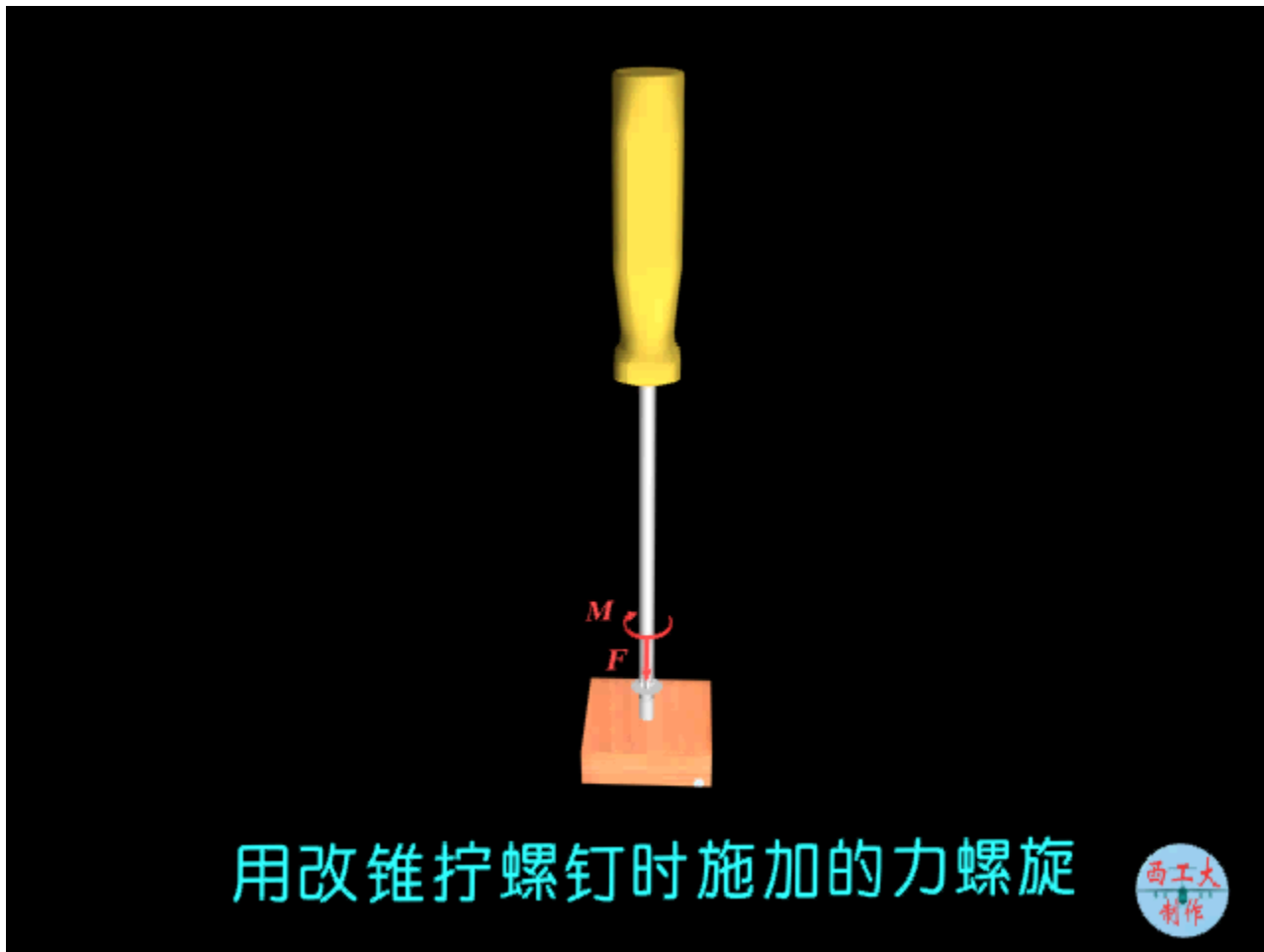
$$F'_R \neq 0, M_O \neq 0, \text{ 且 } F'_R // M_O$$

此时无法进一步合成，这就是简化的最后结果。这种力与力偶作用面垂直的情形称为**力螺旋**。 $F'_R$ 与 $M_O$ 同方向时，称为**右手螺旋**； $F'_R$ 与 $M_O$ 反向时，称为**左手螺旋**。图示为一右手螺旋。

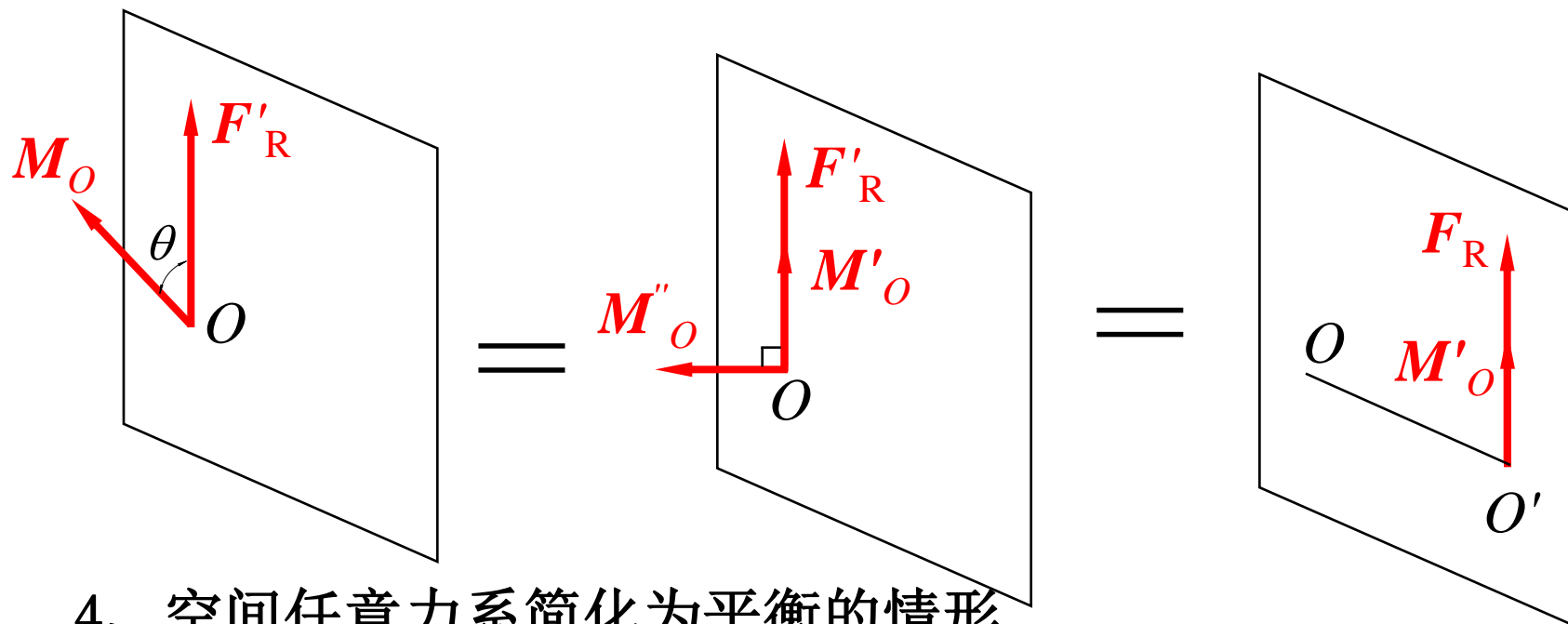


## 钻头钻孔时施加的力螺旋





$F'_R \neq 0$ ,  $M_O \neq 0$ ，同时两者既不平行，又不垂直，此时可将 $M_O$ 分解为两个分力偶 $M''_O$ 和 $M'_O$ ，它们分别垂直于 $F'_R$ 和平行于 $F'_R$ ，则 $M''_O$ 和 $F'_R$ 可作用于点 $O'$ 的力 $F_R$ 来代替，最终得一通过点 $O'$ 的力螺旋。



#### 4、空间任意力系简化为平衡的情形

当空间任意力系向一点简化时出现 主矢 $F'_R=0$ ，主矩 $M_O=0$ ，这是空间任意力系平衡的情形。

## § 3-5 空间任意力系的平衡

### 一、空间任意力系的平衡方程

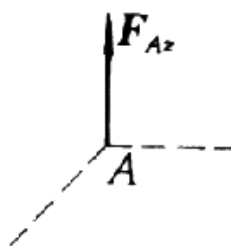
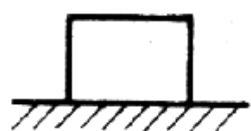

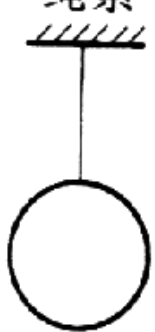
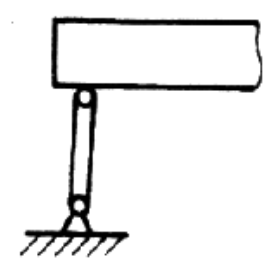
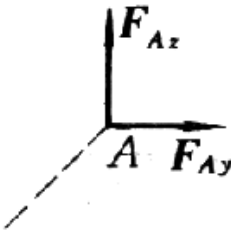
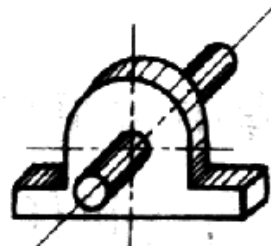
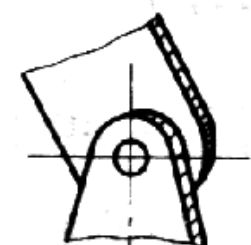
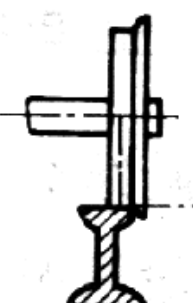
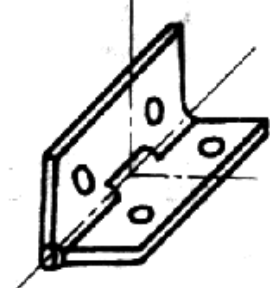
$$F'_R=0, \quad M_O=0$$

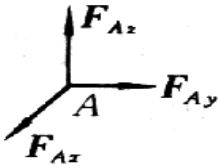
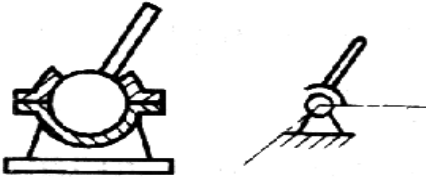
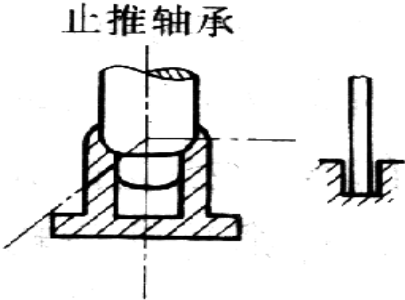
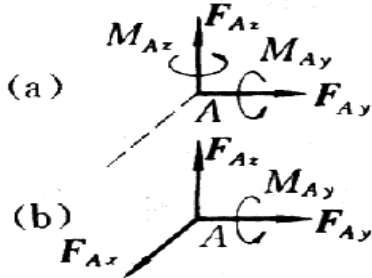
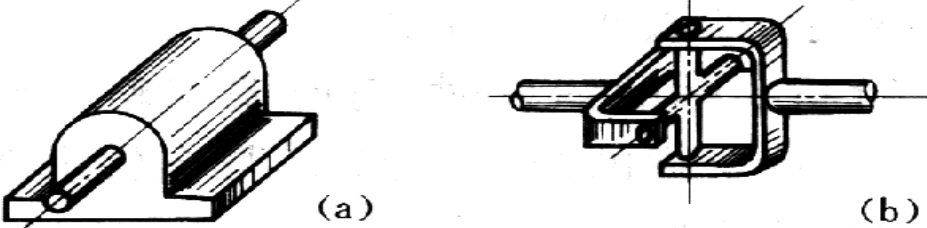
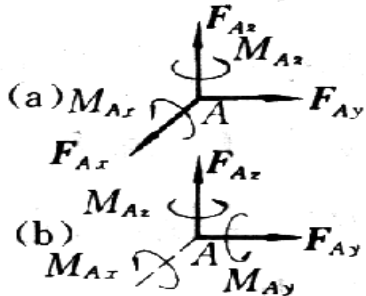
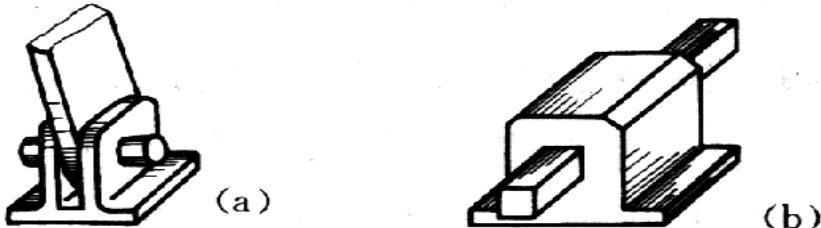

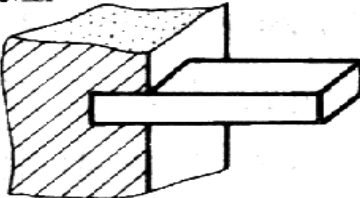
$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0$$

$$\sum M_x(F) = 0, \quad \sum M_y(F) = 0, \quad \sum M_z(F) = 0$$

空间任意力系平衡的必要与充分条件为：力系中各力在三个坐标轴上投影的代数和等于零，且各力对三个轴的矩的代数和也等于零。上式即为空间任意力系的平衡方程。

## 二、空间约束类型

约束反力未知量	约 束 类 型
<p>1</p> 	<div>光滑表面</div>  <div>滚动支座</div>  <div>绳索</div>  <div>二力杆</div> 
<p>2</p> 	<div>径向轴承</div>  <div>圆柱铰链</div>  <div>铁轨</div>  <div>蝶铰链</div> 

<p>3</p> 	<div> <div>球形铰链</div>  </div> <div> <div>止推轴承</div>  </div>
<p>4</p> 	<div> <div>导向轴承</div>  </div>
<p>5</p> 	<div> <div>带有销子的夹板</div>  </div>
<p>6</p> 	<div> <div>空间的固定端支座</div>  </div>



[例]图示三轮小车，自重 $G=8\text{kN}$ ，作用于 $E$ 点，载荷 $F_1=10\text{ kN}$ ，作用于 $C$ 点。求小车静止时地面对车轮的约束力。

解：以小车为研究对象，主动力和约束反力组成空间平行力系，受力分析如图。

列平衡方程

$$\sum F_z = 0$$

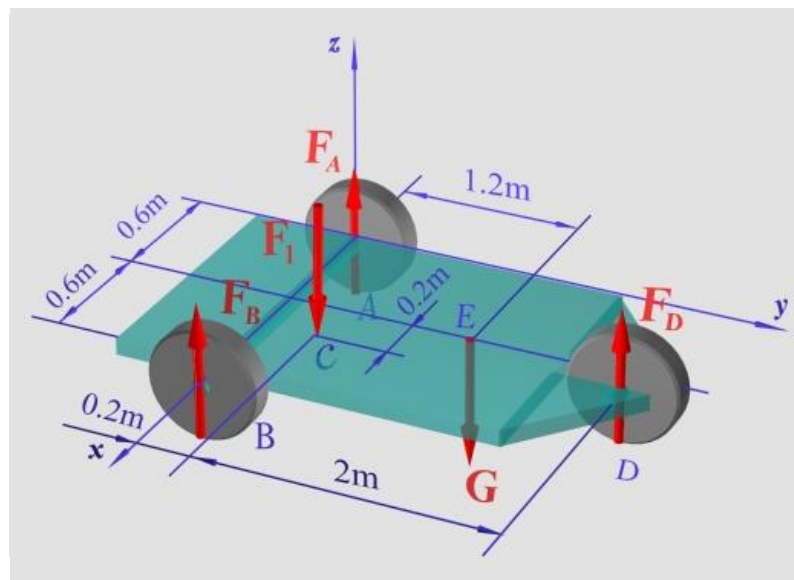
$$-F_1 - G + F_A + F_B + F_D = 0$$

$$\sum M_x(F) = 0$$

$$-F_1 \times 0.2\text{m} - G \times 1.2\text{m} + F_D \times 2\text{m} = 0$$

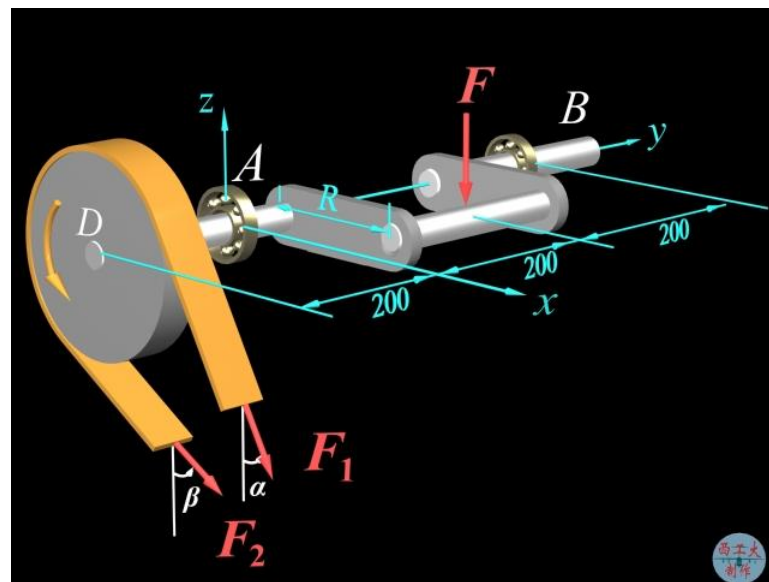
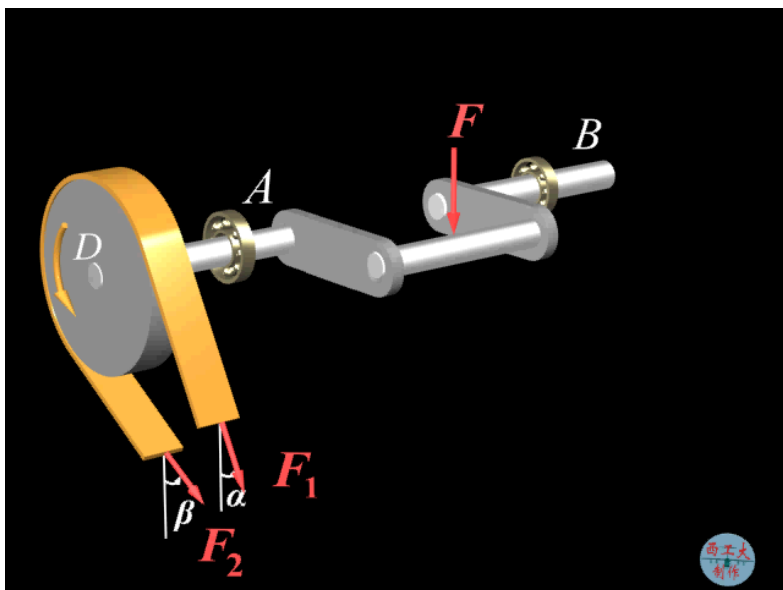
$$\sum M_y(F) = 0$$

$$F_1 \times 0.8\text{m} + G \times 0.6\text{m} - F_D \times 0.6\text{m} - F_B \times 1.2\text{m} = 0$$



解方程得  $F_D = 5.8\text{ kN}$ ,  $F_B = 7.777\text{ kN}$ ,  $F_A = 4.423\text{ kN}$

[例]图中胶带的拉力 $F_2=2F_1$ ，曲柄上作用有铅垂力 $F=2\text{kN}$ 。已知胶带轮的直径 $D=400\text{mm}$ ，曲柄长 $R=300\text{mm}$ ，胶带1和胶带2与铅垂线间夹角分别为 $\alpha$ 和 $\beta$ ， $\alpha=30^\circ$ ， $\beta=60^\circ$ ，其它尺寸如图所示，求胶带拉力和轴承约束力。



解：以整个轴为研究对象，受力图如图所示。列平衡方程。

$$\sum F_x = 0 \quad F_1 \sin 30^\circ + F_2 \sin 60^\circ + F_{Ax} + F_{Bx} = 0$$

$$\sum F_z = 0 \quad -F_1 \cos 30^\circ - F_2 \cos 60^\circ - F + F_{Az} + F_{Bz} = 0$$

$$\sum M_x(F) = 0 \quad F_1 \cos 30^\circ \times 0.2\text{m} + F_2 \cos 60^\circ \times 0.2\text{m} - F \times 0.2\text{m} + F_{Bz} \times 0.4\text{m} = 0$$

$$\sum M_y(F) = 0 \quad FR - \frac{D}{2}(F_2 - F_1) = 0$$

$$\sum M_z(F) = 0 \quad F_1 \sin 30^\circ \times 0.2\text{m} + F_2 \sin 60^\circ \times 0.2\text{m} - F_{Bx} \times 0.4\text{m} = 0$$

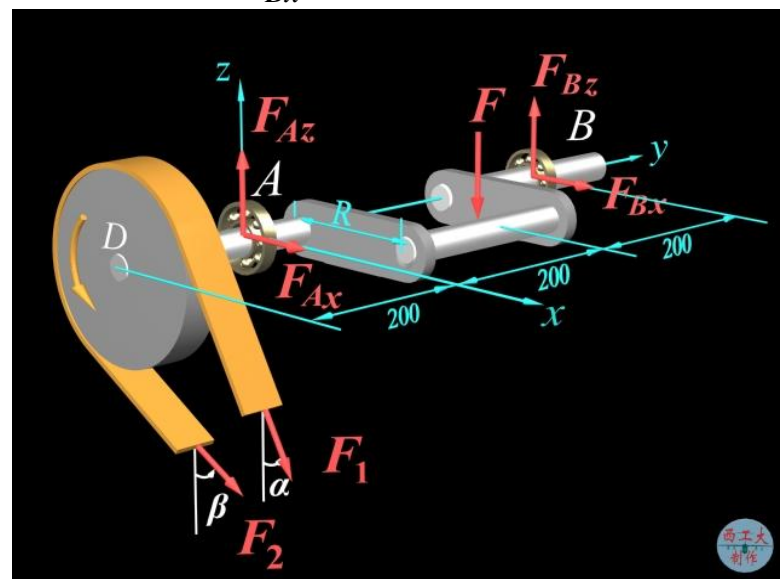
注意到  $F_2 = 2F_1$

解方程得

$$F_1 = 3\text{kN}, \quad F_2 = 6\text{kN}$$

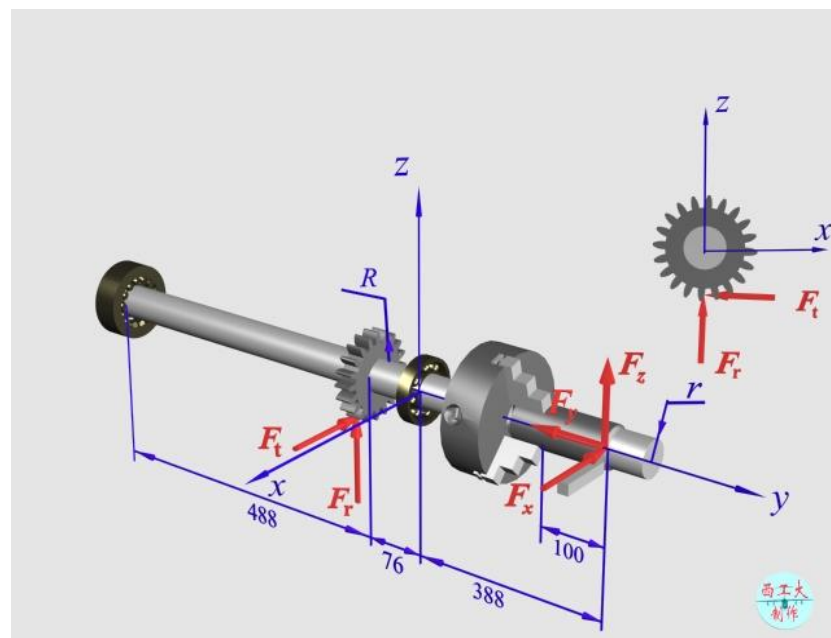
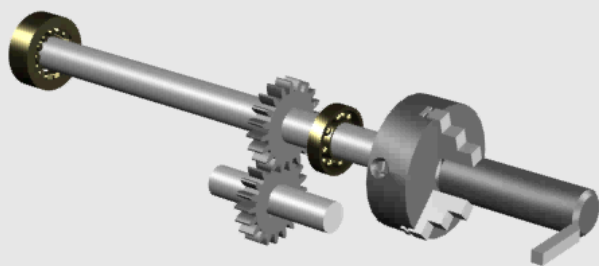
$$F_{Ax} = -10.04\text{kN}, \quad F_{Az} = 9.40\text{kN}$$

$$F_{Bx} = 3.35\text{kN}, \quad F_{Bz} = -1.80\text{kN}$$



[例]图示为车床主轴。车床对工件的切削力为：径向切削力 $F_x=4.25\text{kN}$ ，纵向切削力 $F_y=6.8\text{kN}$ ，主切削力 $F_z=17\text{kN}$ ，方向如图所示。 $F_t$ 与 $F_r$ 分别为作用在直齿轮C上的切向力和径向力，且 $F_r=0.36F_t$ 。齿轮C的节圆半径为 $R=50\text{mm}$ ，被切削工件的半径为 $r=30\text{mm}$ 。卡盘及工件等自重不计，其余尺寸如图。求：(1)齿轮啮合力 $F_t$ 及 $F_r$ ；(2)径向轴承A和止推轴承B的约束力；(3)三爪卡盘E在O处对工件的约束力。

车床主轴受力图



解：1.以整体为研究对象，主动力和约束力组成空间任意力系。

列平衡方程

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Bx} - F_t + F_{Ax} - F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{By} - F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0 \quad F_{Bz} + F_r + F_{Az} + F_z = 0$$

$$\sum M_y(F) = 0 \quad F_t R - F_z r = 0$$

$$\sum M_x(F) = 0 \quad -(488 + 76) \text{ mm} \cdot F_{Bx} - 76 \text{ mm} \cdot F_r + 388 \text{ mm} \cdot F_z = 0$$

$$\sum M_z(F) = 0 \quad (488 + 76) \text{ mm} \cdot F_{Bx} - 76 \text{ mm} F_t - 30 \text{ mm} \cdot F_y + 388 \text{ mm} \cdot F_x = 0$$

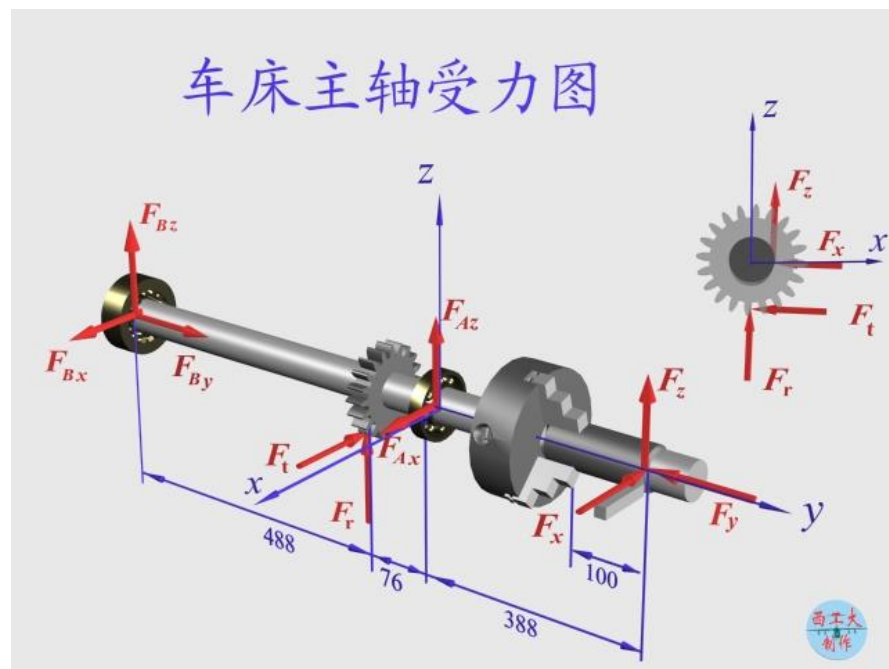
由题意有  $F_r = 0.36 F_t$

解方程得

$$F_t = 10.2 \text{ kN}, \quad F_r = 3.67 \text{ kN}$$

$$F_{Ax} = 15.64 \text{ kN}, \quad F_{Az} = -31.87 \text{ kN}$$

$$F_{Bx} = -1.19 \text{ kN}, \quad F_{By} = 6.8 \text{ kN}, \quad F_{Bz} = 11.2 \text{ kN}$$



2.取工件为研究对象，受力分析如图

列平衡方程

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ox} - F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Oy} - F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0 \quad F_{Oz} + F_z = 0$$

$$\sum M_x(F) = 0 \quad M_x + F_z \times 0.1\text{m} = 0$$

$$\sum M_y(F) = 0 \quad M_y - F_z \times 0.03\text{m} = 0$$

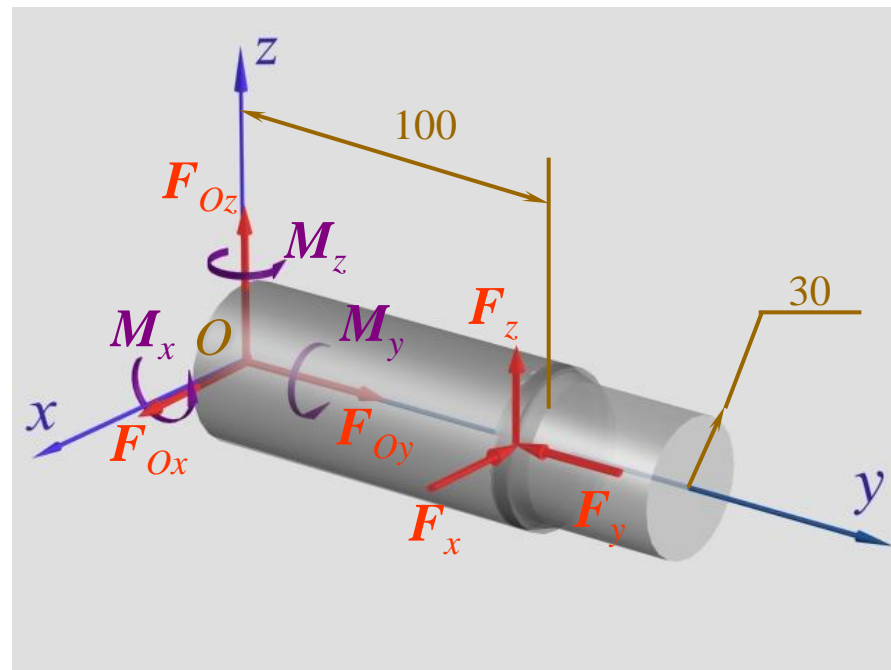
$$\sum M_z(F) = 0 \quad M_z + F_x \times 0.1\text{m} - F_y \times 0.03\text{m} = 0$$

$$F_{Ox} = 4.25\text{kN}, \quad M_x = -1.7\text{kN} \cdot \text{m}$$

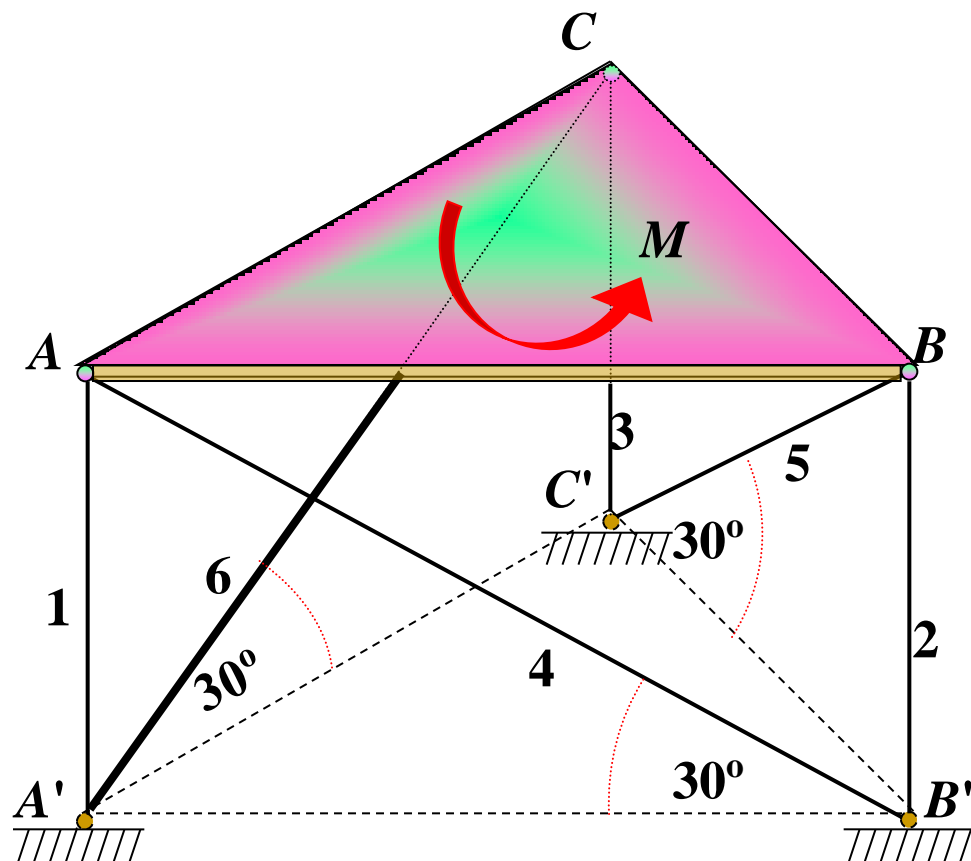
解方程得

$$F_{Oy} = 6.8\text{kN}, \quad M_y = 0.51\text{kN} \cdot \text{m}$$

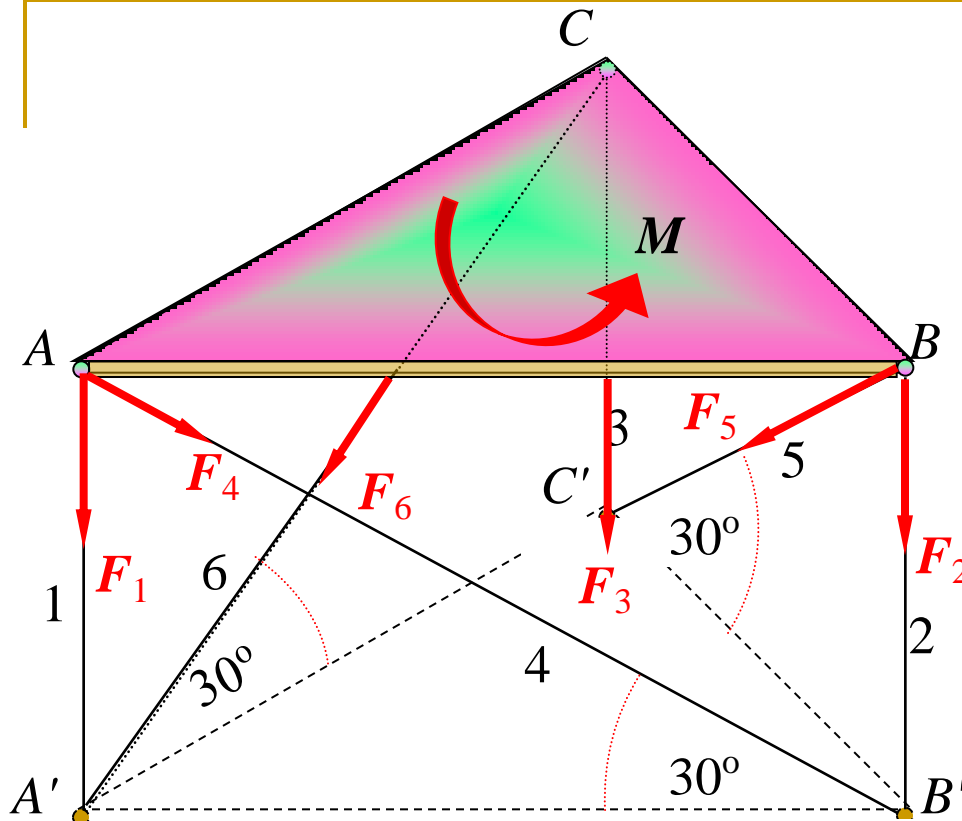
$$F_{Oz} = -17\text{kN}, \quad M_z = -0.22\text{kN} \cdot \text{m}$$



[例] 一等边三角形板边长为 $a$ ，用六根杆支承成水平位置如图所示，若在板内作用一力偶其矩为 $M$ 。求各杆的约束力。



解:取等边三角形板为研究对象画受力图。



$$\Sigma M_{BB'}(F) = 0$$

$$M + \frac{\sqrt{3}}{2} a \frac{\sqrt{3}}{2} F_6 = 0$$

$$F_6 = -\frac{4M}{3a}$$

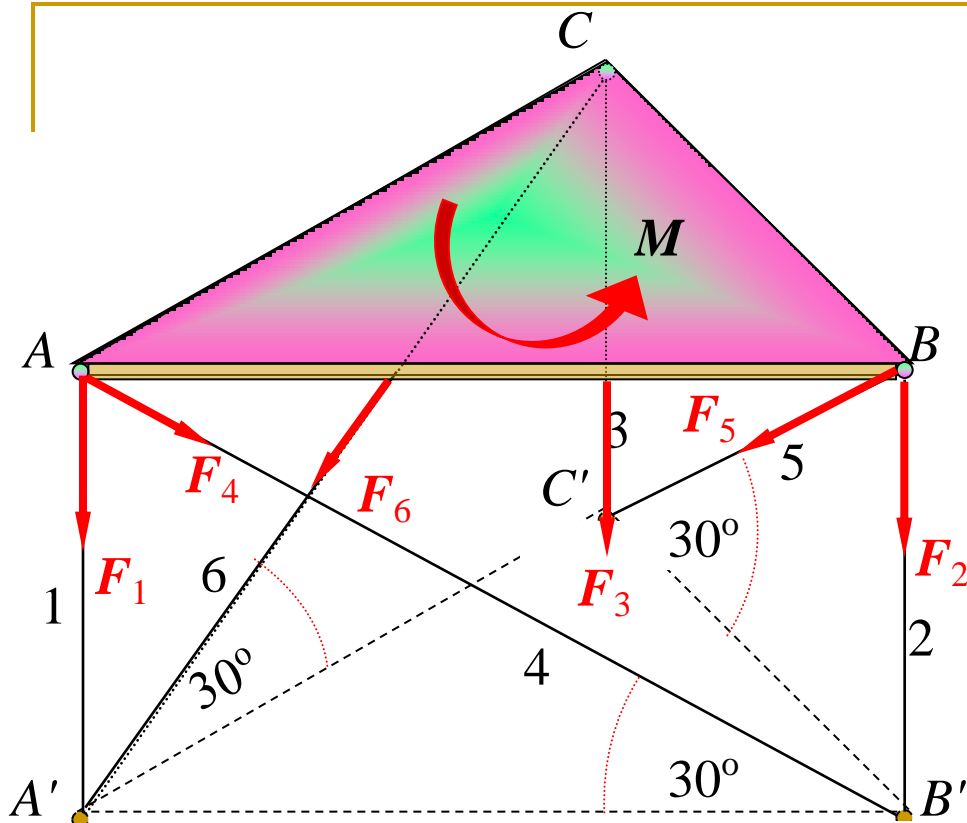
$$\Sigma M_{CC'}(F) = 0 \quad M + \frac{\sqrt{3}}{2} a \frac{\sqrt{3}}{2} F_4 = 0$$

$$F_4 = -\frac{4M}{3a}$$

$$\Sigma M_{AA'}(F) = 0 \quad M + \frac{\sqrt{3}}{2} a \frac{\sqrt{3}}{2} F_5 = 0$$

$$F_5 = -\frac{4M}{3a}$$





$$\Sigma M_{BC}(\mathbf{F}) = 0$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}a F_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}a \frac{1}{2} F_4 = 0$$

$$F_1 = \frac{2M}{3a}$$

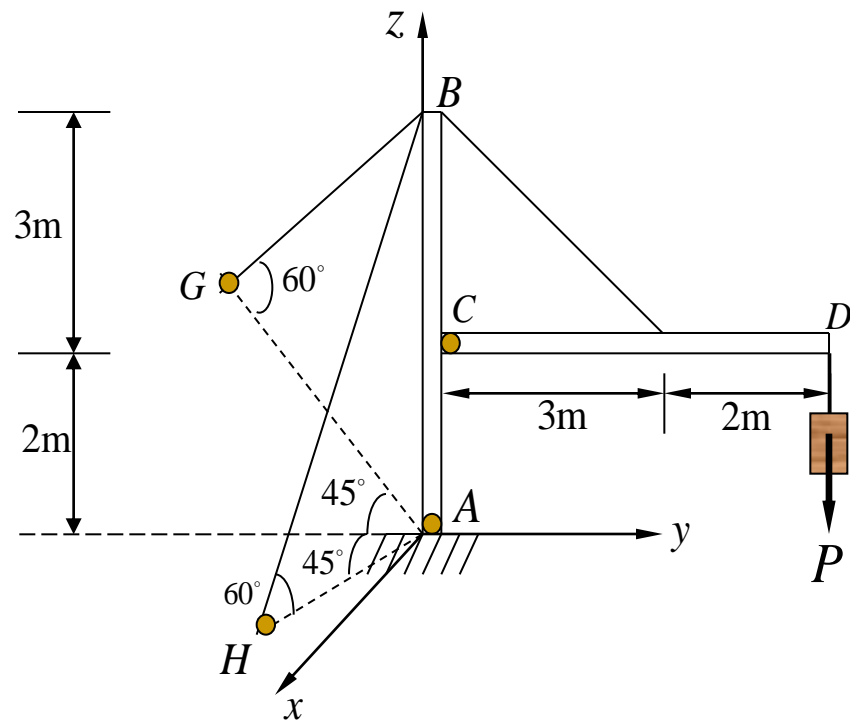
$$\Sigma M_{AC}(\mathbf{F}) = 0 \quad \frac{\sqrt{3}}{2}a F_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}a \frac{1}{2} F_5 = 0$$

$$F_2 = \frac{2M}{3a}$$

$$\Sigma M_{AB}(\mathbf{F}) = 0 \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}a F_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}a \frac{1}{2} F_6 = 0$$

$$F_3 = \frac{2M}{3a}$$

[例] 扒杆如图所示，立柱 $AB$ 用 $BG$ 和 $BH$ 两根缆风绳拉住，并在 $A$ 点用球铰约束， $A$ 、 $H$ 、 $G$ 三点位于 $xy$ 平面内， $G$ 、 $H$ 两点的位置对称于 $y$ 轴，臂杆的 $D$ 端吊悬的重物重 $P=20\text{kN}$ ；求两绳的拉力和支座 $A$ 的约束力。

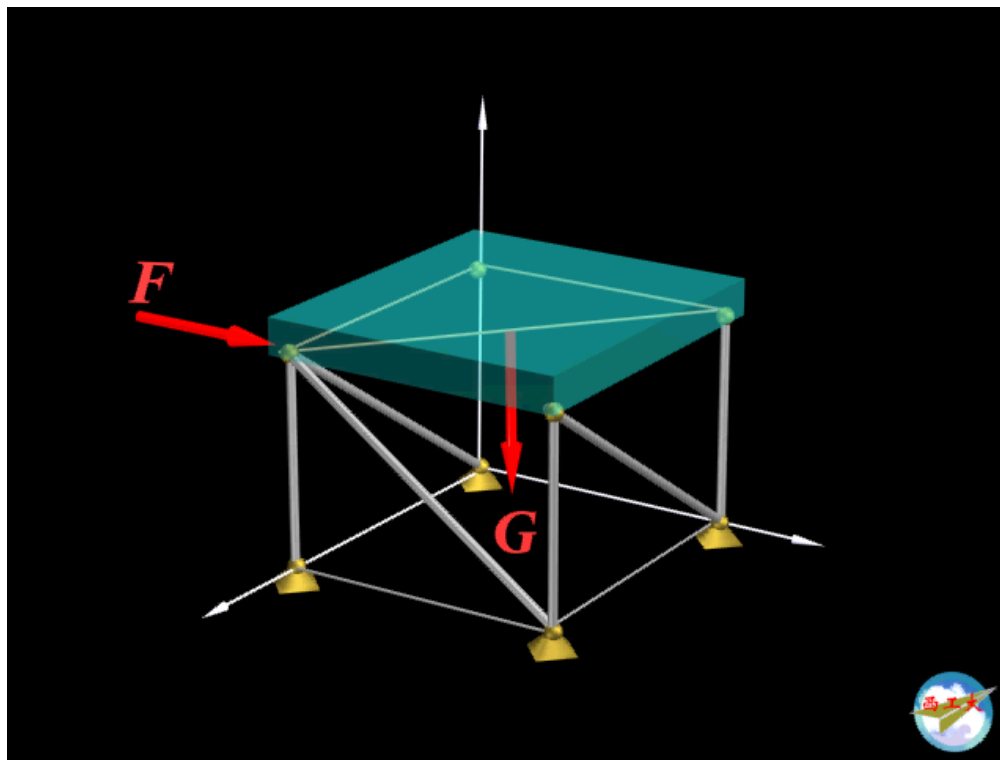


解：以立柱和臂杆组成的系统为研究对象，受力如图，建立如图所示的坐标。

列平衡方程：



[例]图示均质长方板由六根直杆支持于水平位置，直杆两端用球铰链与板和地面连接。板重为 $G$ ，在A处作用一水平力 $F$ ，且 $F = 2G$ 。求各杆的内力。



解：1.取工件为研究对象，受力分析如图。

## 2.列平衡方程

$$\sum M_{AB}(\mathbf{F}) = 0 \quad -F_6 a - G \frac{a}{2} = 0$$

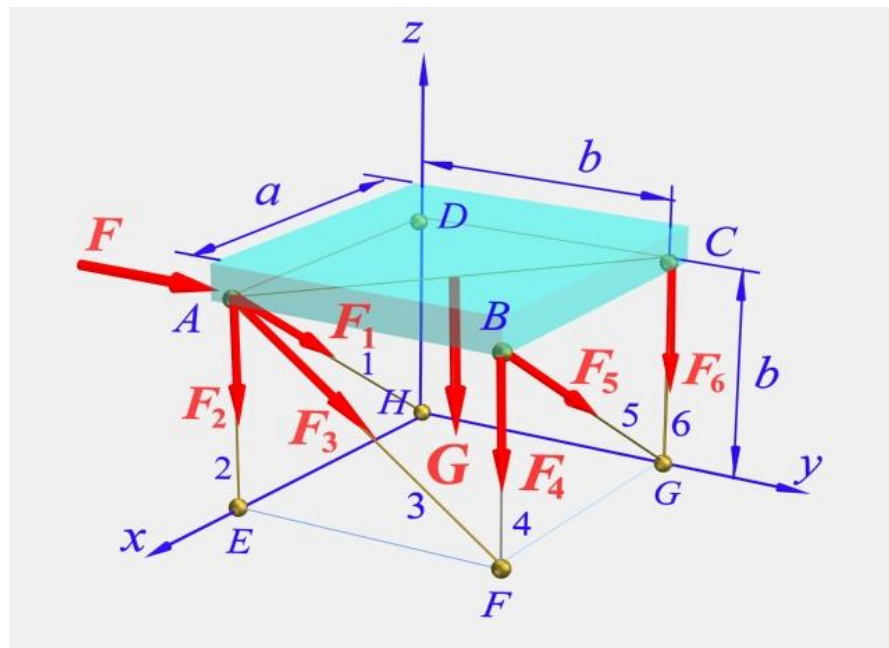
$$\sum M_{AE} = 0 \quad F_5 = 0$$

$$\sum M_{AC} = 0 \quad F_4 = 0$$

$$\sum M_{EF}(\mathbf{F}) = 0 \quad -G \frac{a}{2} - F_6 a - F_1 \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} b = 0$$

$$\sum M_{FG}(\mathbf{F}) = 0 \quad -G \frac{b}{2} + F b - F_2 b = 0$$

$$\sum M_{BC}(\mathbf{F}) = 0 \quad -G \frac{b}{2} - F_2 b - F_3 \cos 45^\circ \cdot b = 0$$



## 3.联立求解

$$F_6 = -\frac{G}{2}, \quad F_1 = 0$$

$$F_2 = 1.5G, \quad F_3 = -2\sqrt{2}G$$

# P108习题3—19

$$\sum M_{BB'}(F) = 0 \quad F_4 = 0$$

$$\sum M_{DD'}(F) = 0 \quad F_2 = 0$$

$$\sum M_{CC'}(F) = 0 \quad F_6 = 0$$

$$\sum M_{BC}(F) = 0$$

$$-500F_1 - 500F = 0 \quad F_1 = -F$$

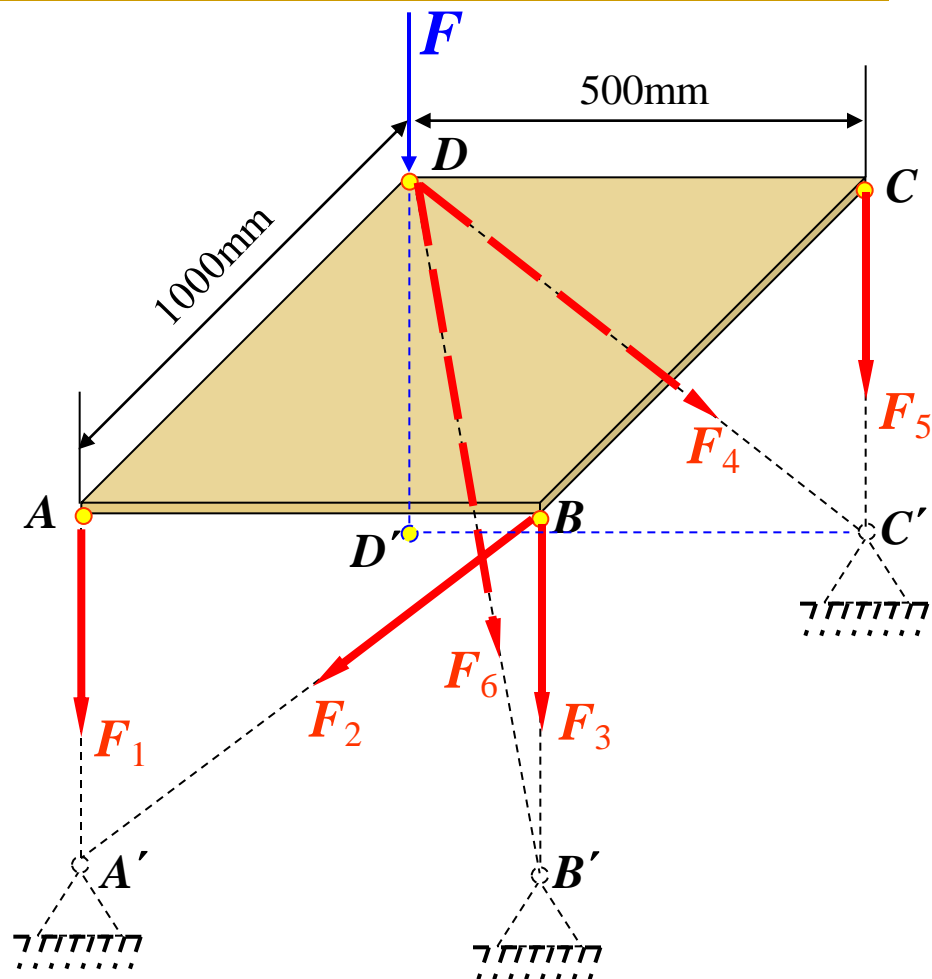
$$\sum M_{AB}(F) = 0$$

$$-1000F_5 - 1000F = 0 \quad F_5 = -F$$

$$\sum M_{AD}(F) = 0$$

$$-500F_3 - 500F_5 = 0$$

$$F_3 = F$$



# P108习题3—18

解：以板为研究对象，受力如图，  
建立如图所示的坐标。

$$\sum M_z(F) = 0: F_{Bx} AB = 0$$

$$\sum M_y(F) = 0: P \frac{1}{2} AD - F_T \sin 30^\circ AD = 0$$

$$\sum M_x(F) = 0: F_T \sin 30^\circ AB + F_{Bz} AB - P \frac{1}{2} AB = 0$$

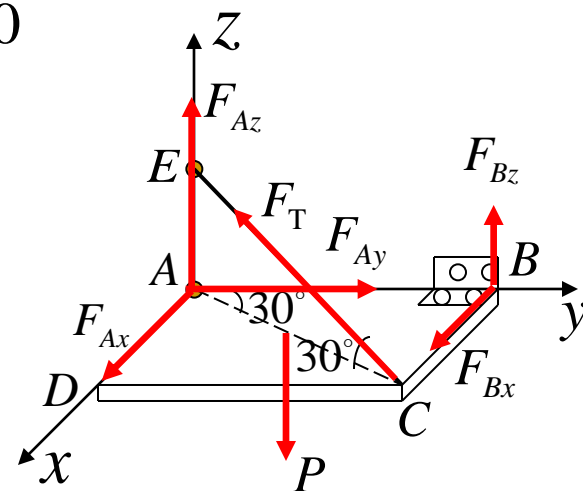
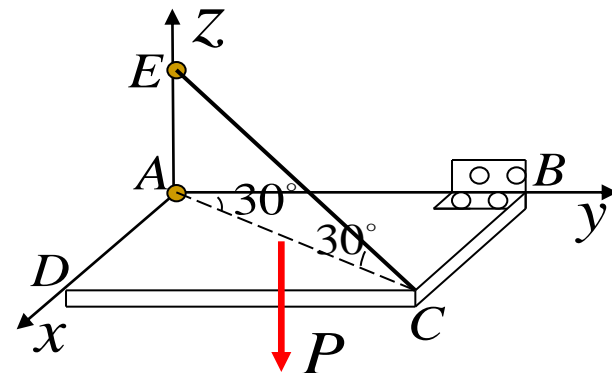
$$\sum F_y = 0: F_{Ay} - F_T \cos^2 30^\circ = 0$$

$$\sum F_x = 0: F_{Ax} + F_{Bx} - F_T \cos 30^\circ \sin 30^\circ = 0$$

$$\sum F_z = 0: F_{Az} + F_{Bz} + F_T \sin 30^\circ - P = 0$$

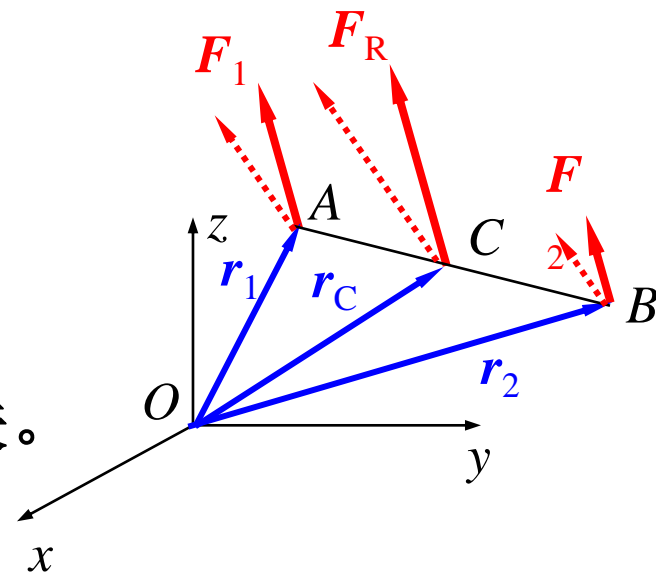
解之得：  $F_{Bx} = F_{Bz} = 0$

$$F_T = 200 \text{ N} \quad F_{Ax} = 86.6 \text{ N} \quad F_{Ay} = 150 \text{ N} \quad F_{Az} = 100 \text{ N}$$



## 一、平行力系中心

平行力系中心是平行力系合力通过的一个点。平行力系合力作用点的位置仅与各平行力的大小和作用点的位置有关，而与各平行力的方向无关。称该点为此**平行力系的中心**。



$$\vec{r}_C = \frac{\sum F_i \vec{r}_i}{\sum F_i} \quad \left( \vec{r}_C \times F_R \vec{F}^0 = \vec{r}_1 \times F_1 \vec{F}^0 + \cdots + \vec{r}_n \times F_n \vec{F}^0 \right)$$

$$x_C = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}, \quad y_C = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}, \quad z_C = \frac{\sum F_i z_i}{\sum F_i}$$



## 二、重心

重力是地球对物体的吸引力，如果将物体看成由无数的质点组成，则重力便构成空间汇交力系。由于物体的尺寸比地球小得多，因此可近似地认为重力是个平行力系，这力系的合力就是物体的重量。不论物体如何放置，其重力的合力作用线相对于物体总是通过一个确定的点，这个点称为**物体的重心**。

$$x_C = \frac{\sum P_i x_i}{\sum P_i}, \quad y_C = \frac{\sum P_i y_i}{\sum P_i}, \quad z_C = \frac{\sum P_i z_i}{\sum P_i}$$

对于均质物体、均质板或均质杆，其重心坐标分别为：

$$x_C = \frac{\int_V x dV}{V}, y_C = \frac{\int_V y dV}{V}, z_C = \frac{\int_V z dV}{V}$$

$$x_C = \frac{\int_A x dA}{A}, y_C = \frac{\int_A y dA}{A}, z_C = \frac{\int_A z dA}{A}$$

$$x_C = \frac{\int_l x dl}{l}, y_C = \frac{\int_l y dl}{l}, z_C = \frac{\int_l z dl}{l}$$

均质物体的重心就是几何中心，即形心。

## 三、确定物体重心的方法

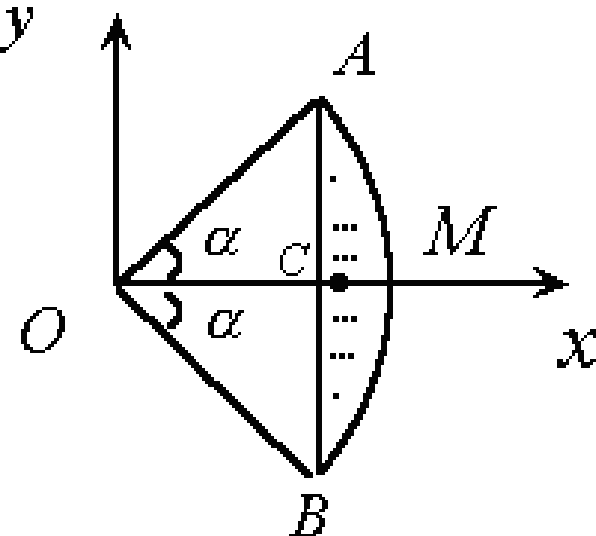
### 1、简单几何形状物体的重心

如果均质物体有对称面，或对称轴，或对称中心，则该物体的重心必相应地在这个对称面，或对称轴，或对称中心上。简单形状物体的重心可从工程手册上查到。

[例] 图示均质等厚物块，其横截面积由半径为 $R$ 的圆弧 $AMB$ 与弦 $AB$ 所围成的弓形，试求其重心在其对称面中的位置。

解 1、在物块的对称面上建立图示直角坐标系 $oxy$ ，由对称性知，弓形体物块的重心必在 $x$ 轴上，故 $y_c=0$ 。

2、图示弓形面积可看成由扇形 $OAMB$ 去掉三角形 $OAB$ 得到，由负面积法可求得弓形的重心。扇形和三角行的面积，重心位置查表可得；故所求弓形体物块的重心的坐标为

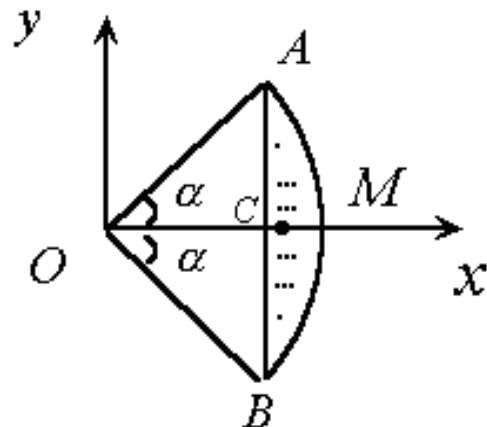


扇形 $OAMB$ 的面积

$$A_1 = R^2 \alpha$$

其重心位置:

$$x_1 = \frac{2}{3} \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$$



三角形 $OAB$ 的面积

$$A_2 = -\frac{1}{2} (2R \sin \alpha)(R \cos \alpha) = -R^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

其重心位置:  $x_2 = \frac{2}{3} (R \cos \alpha)$

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{A_1 + A_2} = \frac{\frac{2}{3} R^3 \sin \alpha - \frac{2}{3} R^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{R^2 \alpha - R^2 \sin \alpha \cos \alpha} \\ &= \frac{2R \sin \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{3(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)} = \frac{4R \sin^3 \alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)} \end{aligned}$$

## 2、用组合法求重心

### ①分割法

如果一个物体由几个简单形状的物体组合而成，而这些物体的重心是已知的，那么整个物体的重心可由下式求出。

$$x_C = \frac{\sum P_i x_i}{\sum P_i}, \quad y_C = \frac{\sum P_i y_i}{\sum P_i}, \quad z_C = \frac{\sum P_i z_i}{\sum P_i}$$

### ②负面积法

若在物体或薄板内切去一部分（例如有空穴或孔的物体），则这类物体的重心，仍可应用与分割法相同的公式求得，只是切去部分的体积或面积应取负值。

[例] 已知均质等厚Z字型薄板尺寸如图所示。求其重心坐标。  
解：用虚线分割如图，为三个小矩形，其面积与坐标分别为：

$$x_1 = -15\text{mm}, \quad y_1 = 45\text{mm}, \quad A_1 = 300\text{mm}^2$$

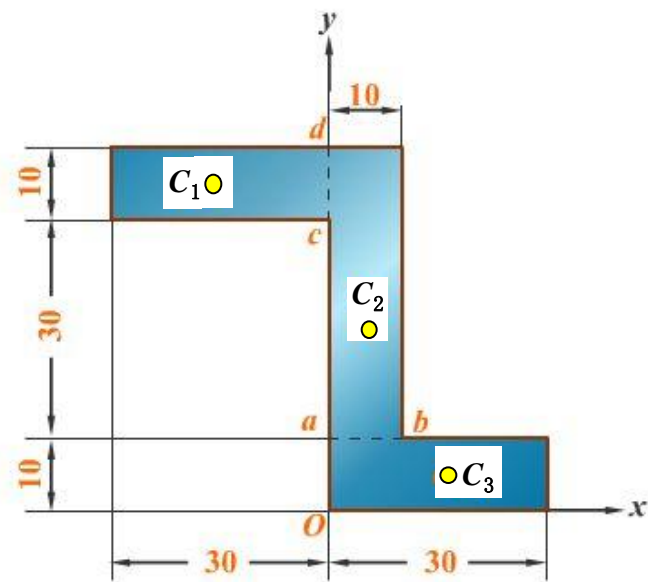
$$x_2 = 5\text{mm}, \quad y_2 = 30\text{mm}, \quad A_2 = 400\text{mm}^2$$

$$x_3 = 15\text{mm}, \quad y_3 = -5\text{mm}, \quad A_3 = 300\text{mm}^2$$

则

$$x_C = \sum \frac{A_i x_i}{A} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{A_1 + A_2 + A_3} = 2\text{mm}$$

$$y_C = \sum \frac{A_i y_i}{A} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = 27\text{mm}$$



[例]已知等厚均质偏心块的 $R=100\text{mm}$ ,  $r=17\text{mm}$ ,  $b=13\text{mm}$ 。  
求其重心坐标。

解：用负面积法，为三部分组成。设大半圆面积为 $A_1$ ，小半圆（半径为 $r+b$ ）面积为 $A_2$ ，小圆（半径为 $r$ ）面积为 $A_3$ 。

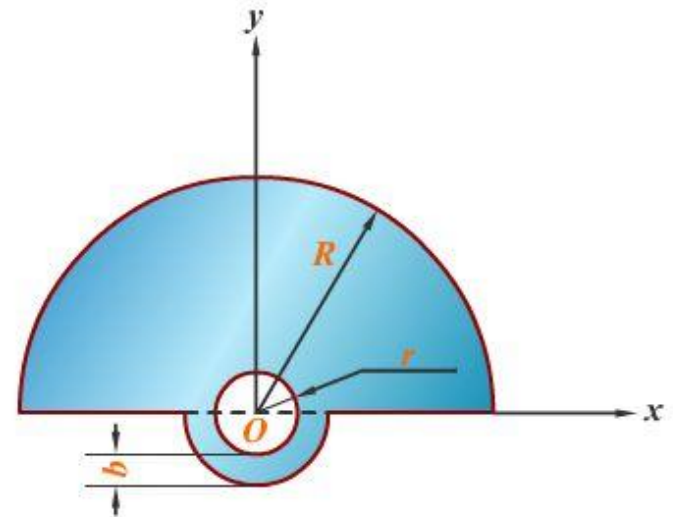
由对称性，有  $x_C = 0$

$$A_1 = \frac{\pi}{2} R^2, \quad A_2 = \frac{\pi}{2} (r+b)^2, \quad A_3 = -\pi r^2$$

$$y_1 = \frac{4R}{3\pi}, \quad y_2 = -\frac{4(r+b)}{3\pi}, \quad y_3 = 0$$

$$\text{由 } y_C = \frac{\sum A_i y_i}{A}$$

$$\text{得 } y_C = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = 40.01\text{mm}$$



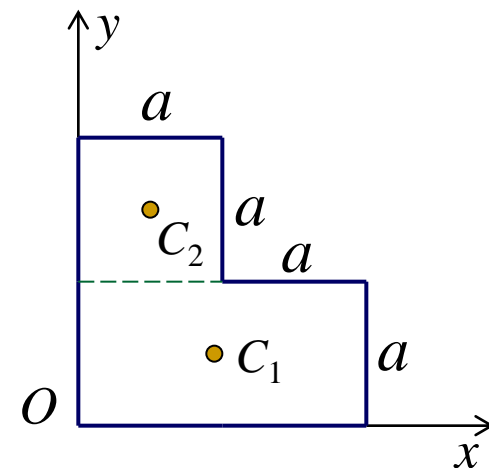


[例] 求图示均质板重心的位置。

解一：（组合法）建立如图坐标：

$$x_C = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{A_1 + A_2} = \frac{2a^2 a + a^2 \frac{1}{2} a}{3a^2} = \frac{5}{6} a$$

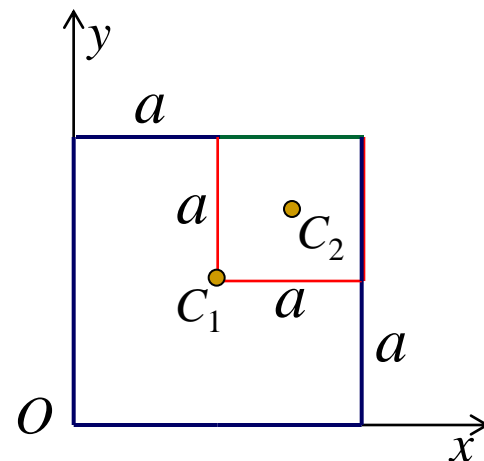
$$y_C = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{2a^2 \frac{1}{2} a + a^2 \frac{3}{2} a}{3a^2} = \frac{5}{6} a$$



解二：（负面积法）

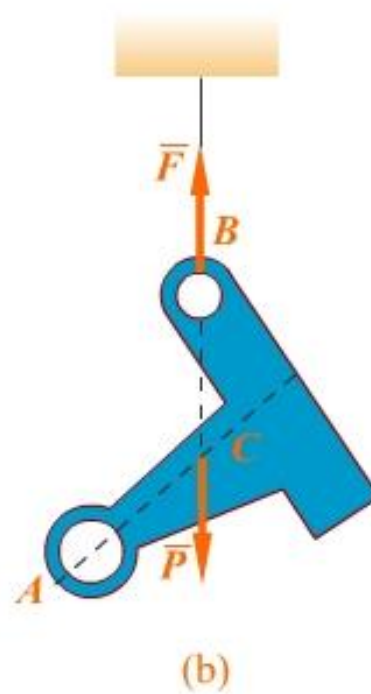
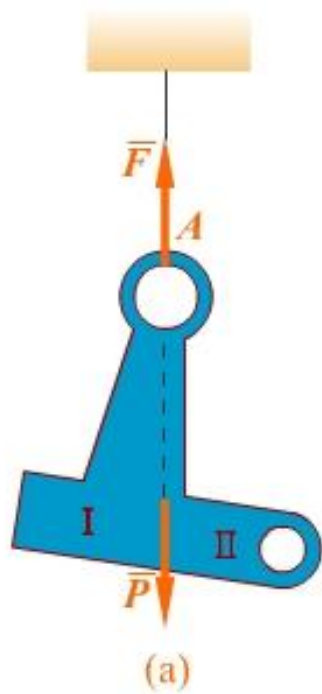
$$x_C = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{A_1 + A_2} = \frac{4a^2 a + (-a^2) \frac{3}{2} a}{4a^2 + (-a^2)} = \frac{5}{6} a$$

$$y_C = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{4a^2 a + (-a^2) \frac{3}{2} a}{4a^2 + (-a^2)} = \frac{5}{6} a$$



### 3、用实验方法测定重心的位置

#### ①悬挂法



## ②称重法

$$P \cdot x_C = F_1 \cdot l \quad \text{则} \quad x_C = \frac{F_1}{P} l$$

$$\text{后轮升高同理有} \quad x_C' = \frac{F_2}{P} l'$$

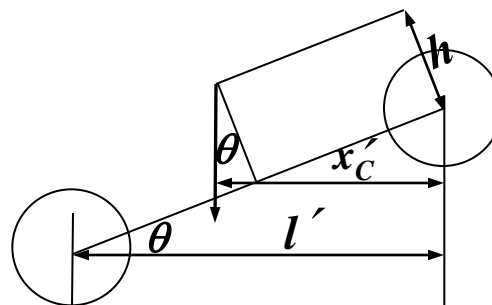
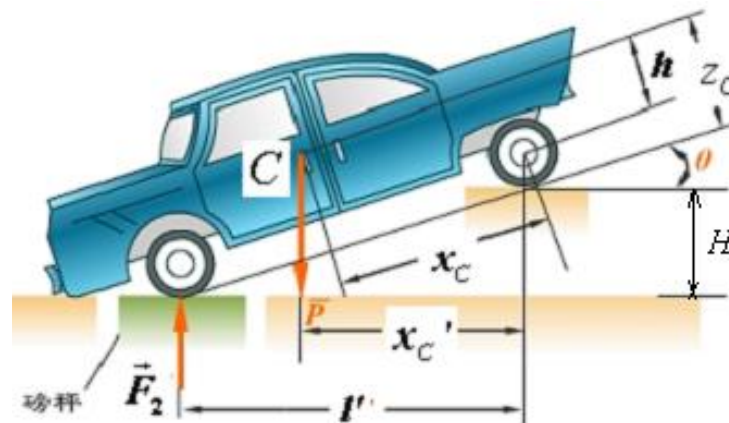
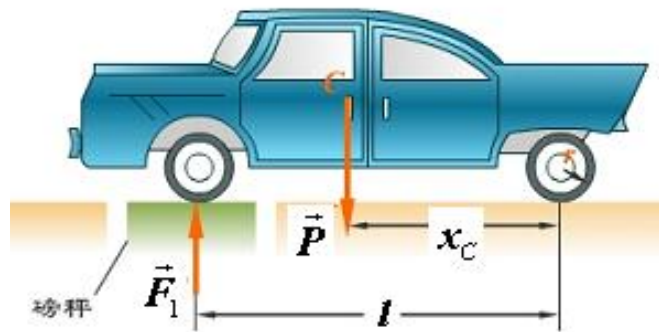
$$\text{图中几何关系} \quad l' = l \cos \theta$$

$$x_C' = x_C \cos \theta + h \sin \theta$$

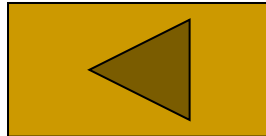
$$\sin \theta = \frac{H}{l} \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{l^2 - H^2}}{l}$$



$$z_C = r + \frac{F_2 - F_1}{P} \cdot \frac{1}{H} \cdot \sqrt{l^2 - H^2}$$



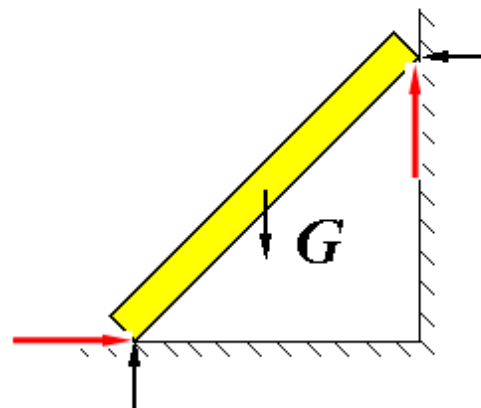
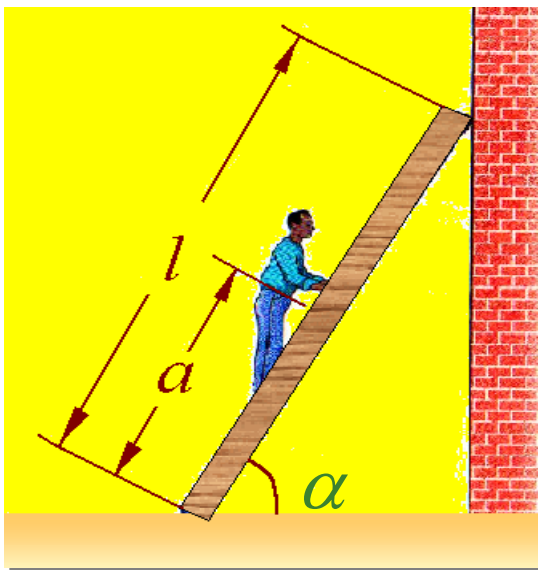
# 本章结束



# 理论力学

## 第四章 摩擦

前几章我们把接触表面都看成是绝对光滑的，忽略了物体之间的摩擦，事实上完全光滑的表面是不存在的，一般情况下都存在有摩擦。[例]



平衡必计摩擦

按接触面的运动情况看摩擦分为：  
滑动摩擦，滚动摩擦

## § 4-1 滑动摩擦

### 一、静滑动摩擦力

1、定义：两接触物体，产生相对滑动趋势时，其接触面产生阻止物体相对运动趋势的力叫静(滑动)摩擦力。

(就是接触面对物体作用的切向约束力)

2、状态： ①静止：  $F_S = F$ ；  $F_S$  随  $F$  的增加而增加，但有一临界值。

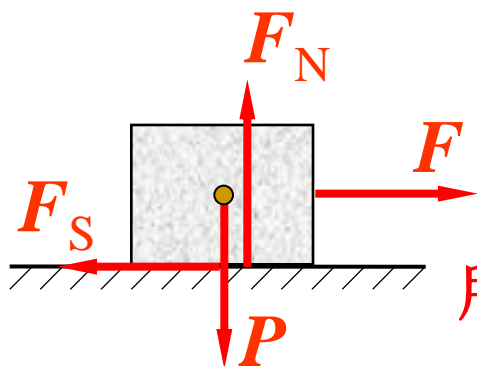
②临界：（将滑未滑）最大静摩擦力

$$F_{\max} = f_S \cdot F_N \quad (f_S \text{—静滑动摩擦因数})$$

所以增大摩擦力的途径为

①加大法向压力  $F_N$ ;

②加大静摩擦因数  $f_S$ 。



3、特征：

**静摩擦力特征：**

- 大小：  $0 \leq F_S \leq F_{\max}$  （平衡范围） 满足  $\sum F_x = 0$
- 方向： 与物体相对滑动趋势方向相反
- 定律：  $F_{\max} = f_S \cdot F_N$

（ $f_s$  只与材料和表面情况有关，与接触面积大小无关。）

## 二、动滑动摩擦力 （与静滑动摩擦力不同的是产生了滑动）

**动摩擦力特征：**

- 大小：  $F_d = f \cdot F_N$  （无平衡范围）
- 方向： 与物体运动方向相反
- 定律：  $F_d = f \cdot F_N$

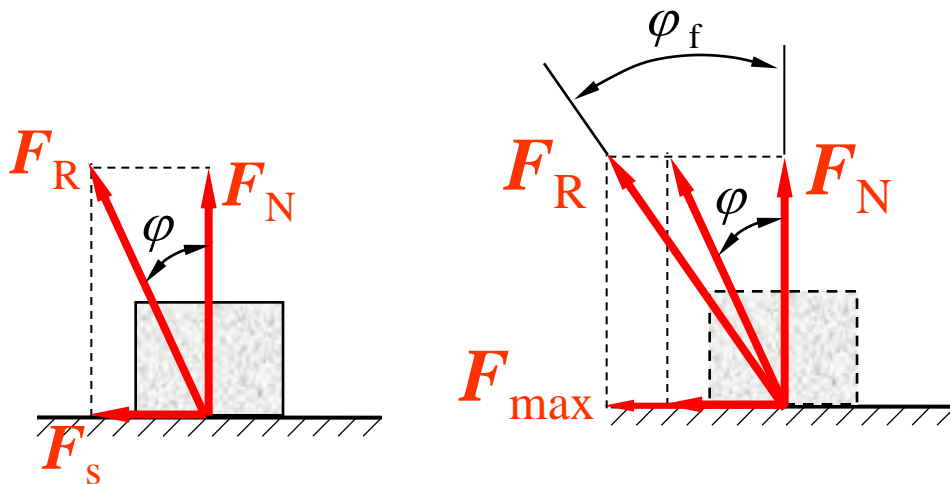
（ $f$  只与材料和表面情况有关，与接触面积大小无关。）



## § 4-2 摩擦角与自锁现象

### 一、摩擦角

① **全约束力** 即  $F_R = F_N + F_S$ ，它与接触面的公法线成一偏角  $\varphi$ ，当物体处于临界平衡状态，即静摩擦力达到最大值  $F_{\max}$  时，偏角  $\varphi$  达到最大值  $\varphi_f$ ，**全约束力与法线夹角的最大值  $\varphi_f$  叫做摩擦角。**



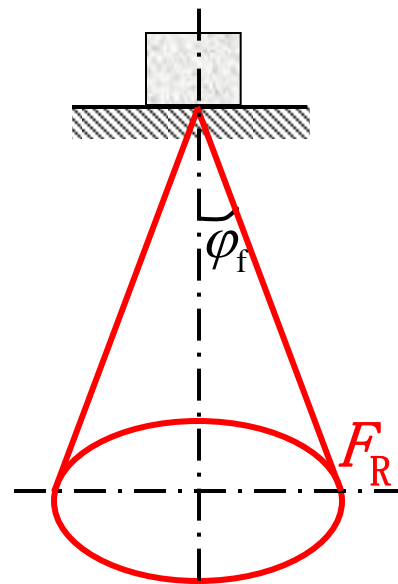
② 计算

$$\tan \varphi_f = \frac{F_{\max}}{F_N} = \frac{f_s F_N}{F_N} = f_s$$

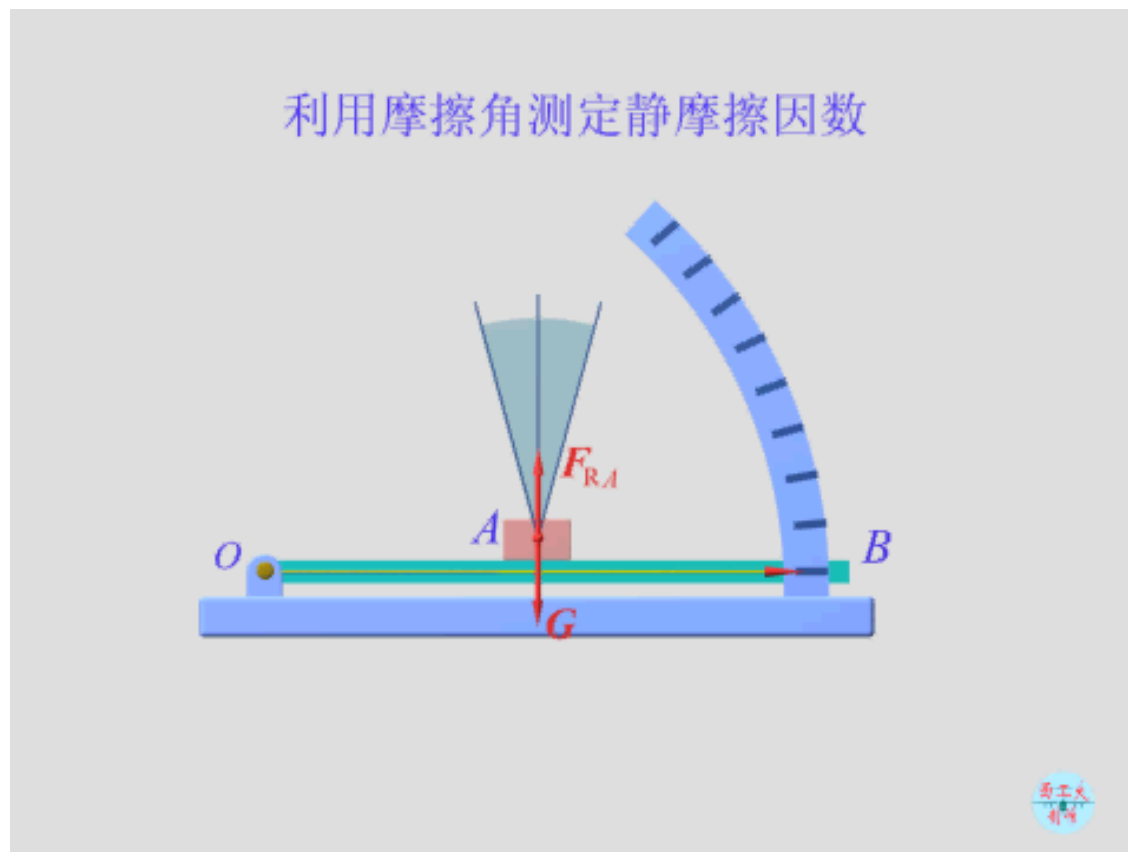
摩擦角的正切等于静摩擦因数。

当物块的滑动趋势方向改变时，全约束力作用线的方位也随之改变；在临界状态下， $F_R$ 的作用线将画出一个以接触点A为顶点的锥面，称为摩擦锥。设物块与支承面间沿任何方向的摩擦因数都相同，即摩擦角都相等，则摩擦锥将是一个顶角为 $2\varphi_f$ 的圆锥。

③摩擦锥：顶角为 $2\varphi_f$ 的锥体。



#### ④测定摩擦因数的一种简易方法



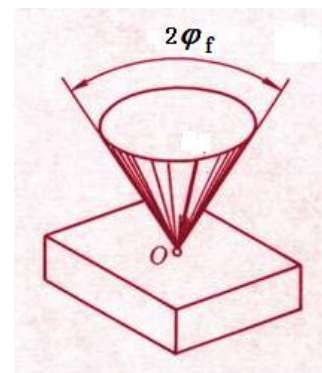
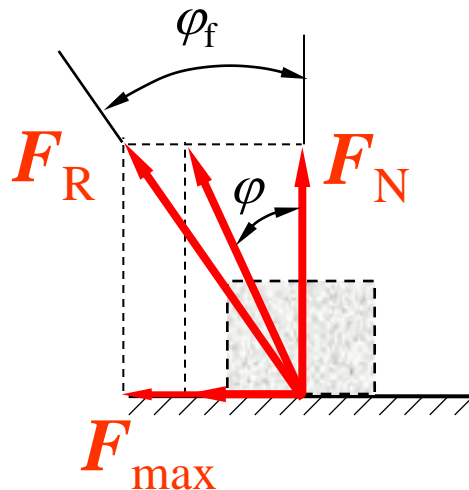
## 二、自锁现象

物块平衡时，静摩擦力不一定达到最大值，可在零与最大值 $F_{\max}$ 之间变化，所以全约束力与法线间的夹角 $\varphi$ 也在零与摩擦角 $\varphi_f$ 之间变化，即

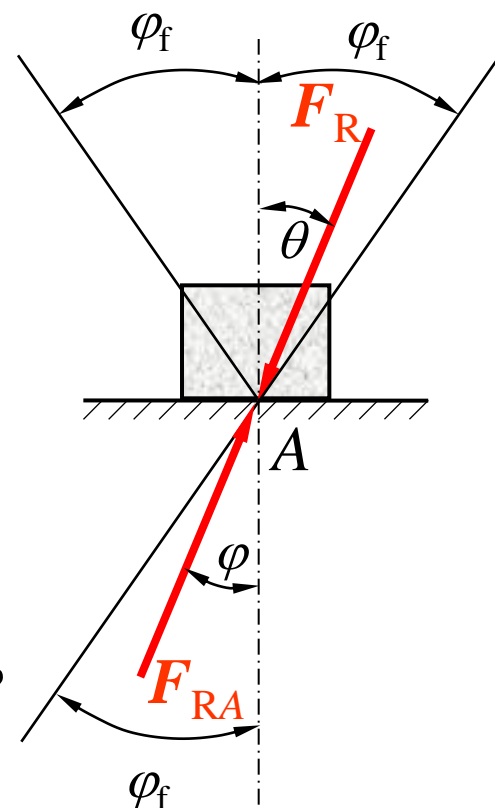
$$0 \leq \varphi \leq \varphi_f$$

由于静摩擦力不可能超过最大值，因此全约束力的作用线也不可能超出摩擦角以外，即全约束力必在摩擦角之内。

将摩擦锥反向，判断主动力是否在反向摩擦锥内来确定是否平衡。



1、如果作用于物块的全部主动力的合力 $F_R$ 的作用线在摩擦角 $\varphi_f$ 之内，则无论这个力怎样大，物块必保持静止。这种现象称为**自锁现象**。因为在这种情况下，主动力的合力 $F_R$ 与法线间的夹角 $\theta < \varphi_f$ ，因此， $F_R$ 和全约束力 $F_{RA}$ 必能满足二力平衡条件，且 $\theta = \varphi < \varphi_f$ 。

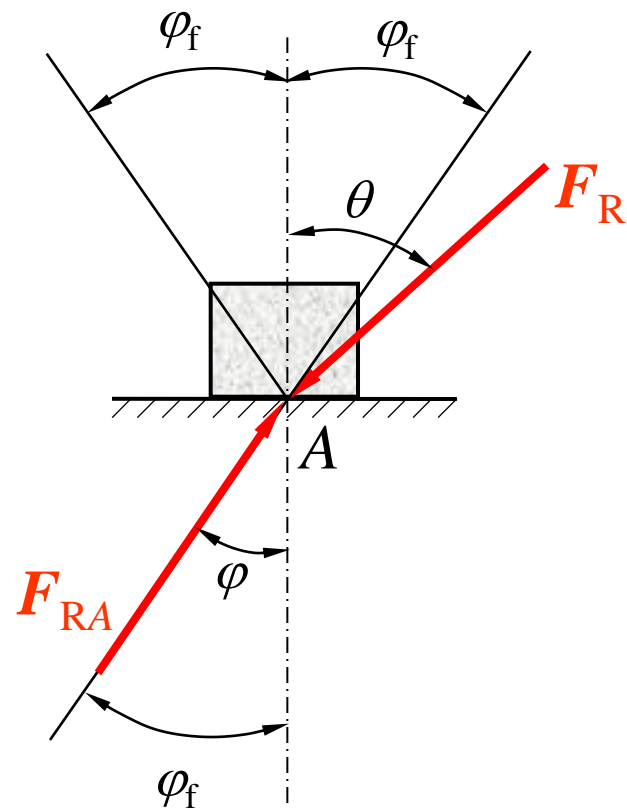


因为在公法线上有  $\sum F_y = 0 \quad F_N = F_R \cos \theta$

而  $F_{Rx} = F_R \sin \theta = F_R \cos \theta \tan \theta = F_N \tan \theta \leq F_N \tan \varphi_f = F_{\max}$

所以在切线上必然平衡。

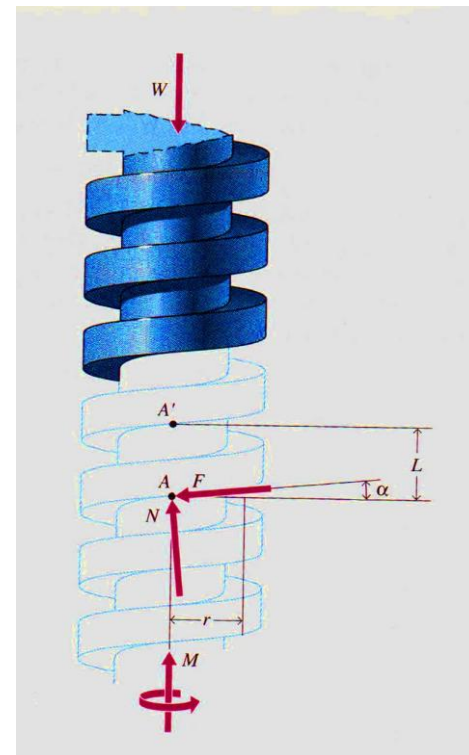
2、如果全部主动力的合力 $F_R$ 的作用线在摩擦角 $\varphi_f$ 之外，则无论这个力怎样小，物块一定会滑动。因为在这种情况下， $\theta > \varphi_f$ ，而 $\varphi \leq \varphi_f$ ，支承面的全约束力 $F_{RA}$ 和主动力的合力 $F_R$ 不能满足二力平衡条件。应用这个道理，可以设法避免发生自锁现象。



### 3、自锁应用举例

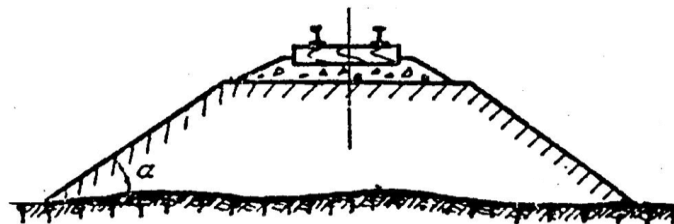
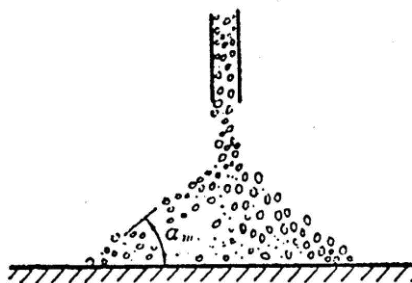
斜面的自锁条件是斜面的倾角小于或等于摩擦角。

斜面的自锁条件就是螺纹的自锁条件。因为螺纹可以看成为绕在一圆柱体上的斜面，螺纹升角 $\alpha$ 就是斜面的倾角。螺母相当于斜面上的滑块A，加于螺母的轴向载荷 $P$ ，相当物块A的重力，要使螺纹自锁，必须使螺纹的升角 $\alpha$ 小于或等于摩擦角 $\varphi_f$ 。因此螺纹的自锁条件是

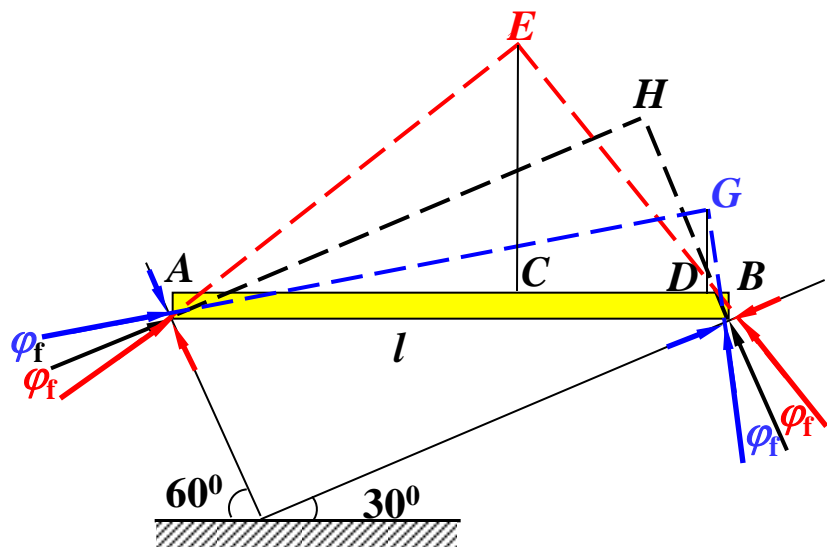


$$\alpha \leq \varphi_f$$

自锁应  
用实例



[例] 水平梯子放在直角V形槽内，略去梯重，梯子与两个斜面间的摩擦因数（摩擦角均为 $\varphi_f$ ），如人在梯子上走动，试分析不使梯子滑动，人的活动应限制在什么范围内？



解：①作法线 $AH$ 和 $BH$

②作 $A$ ， $B$ 点的摩擦角 $\varphi_f$   
交 $E$ ， $G$ 两点

③ $E$ ， $G$ 两点间的水平距离 $CD$ 为人的活动范围



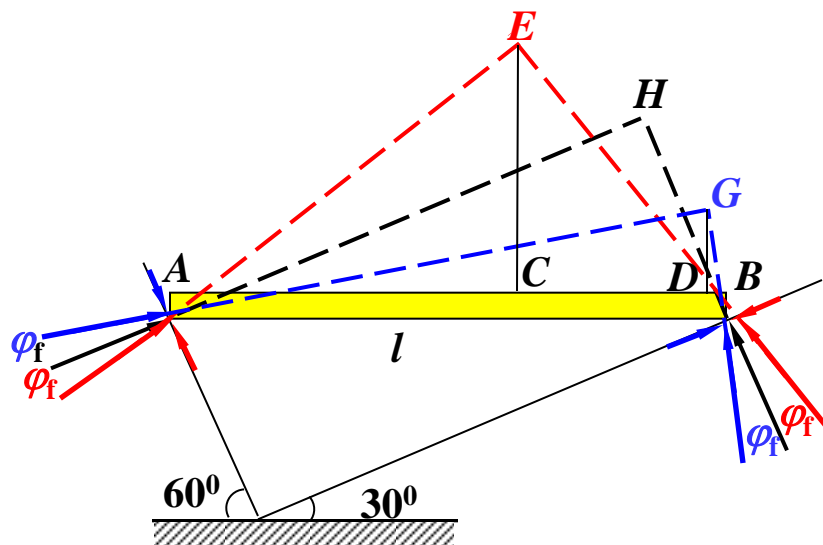
证明：由几何关系

$$\angle AEB = \angle AGB = 90^\circ$$

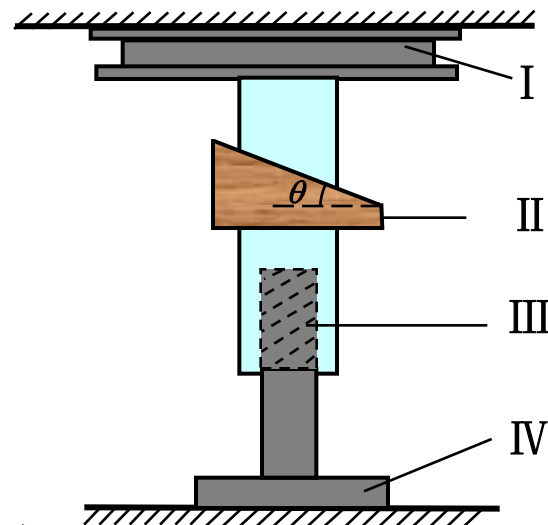
$$AC = AE \cos(30^\circ + \varphi_f) = AB \sin(60^\circ - \varphi_f) \cos(30^\circ + \varphi_f)$$

$$BD = BG \cos(60^\circ + \varphi_f) = AB \sin(30^\circ - \varphi_f) \cos(60^\circ + \varphi_f)$$

所以人在AC和BD段  
活动都不能满足三力  
平衡汇交的原理，**只**  
**有在CD段活动时，**  
才能满足三力平衡  
汇交原理。

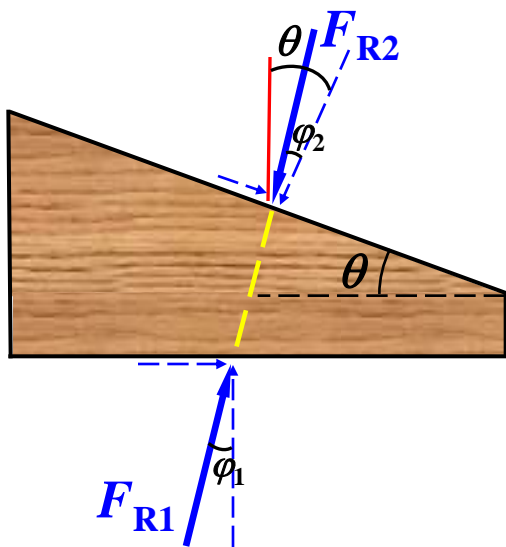


[例]在隧道施工中，广泛采用各种利用摩擦锁紧装置—楔联结。隧道支柱中的联结结构装置如图所示。它包括顶梁I，楔块II，用于调节高度的螺杆III及底座IV。螺旋杆给楔块以向上的推力 $F_{N1}$ 。已知楔块与上下支柱间的静摩擦因数均为 $f_s$ （摩擦角 $\varphi_f$ ）。求楔块不致滑出所需顶角的大小。



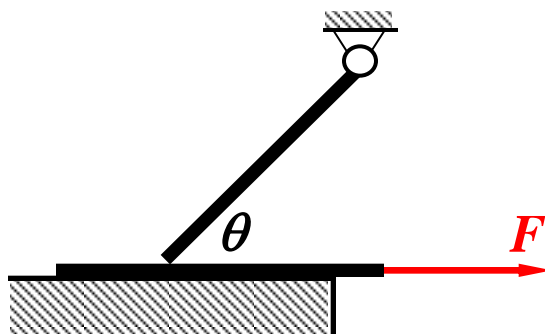
解：研究楔块，受力如图

二力平衡条件  $F_{R1} = F_{R2}$  且两力必在同一直线上



$$\therefore \theta - \varphi_2 = \varphi_1 \quad \therefore \theta = \varphi_1 + \varphi_2 \leq 2\varphi_f$$

各处摩擦相同，  
求能自锁的角 $\theta$ 。

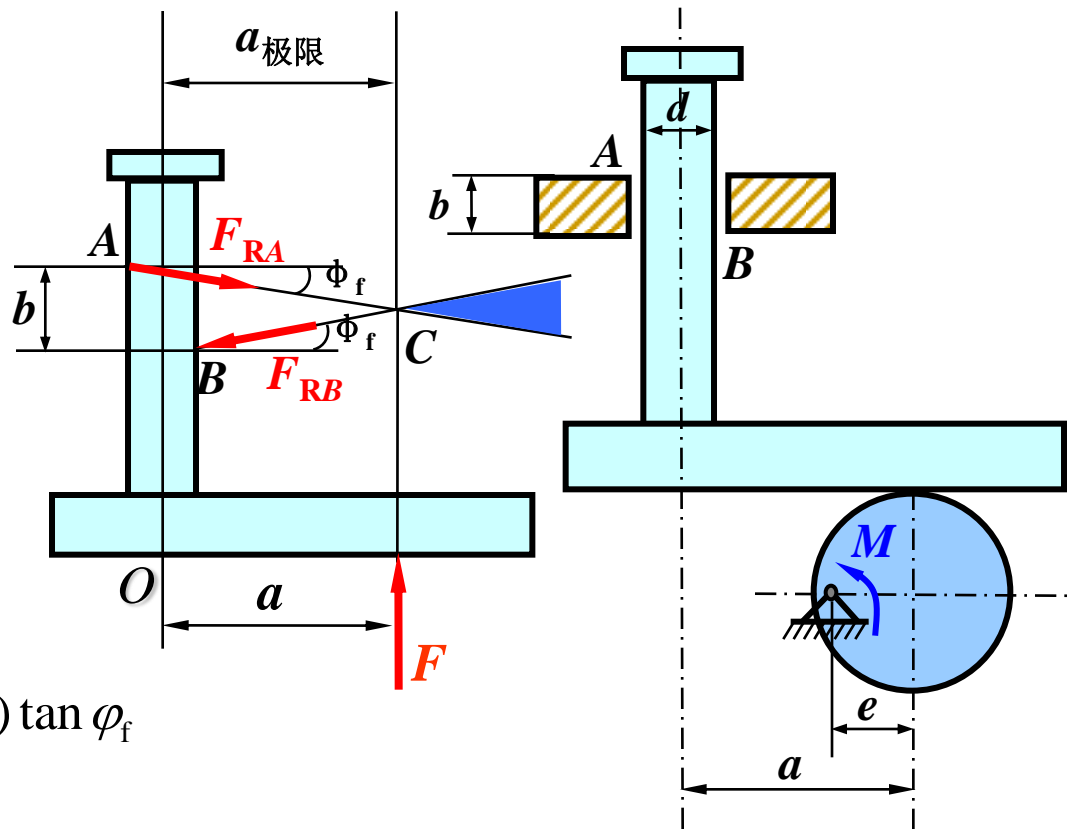


$$\frac{\pi}{2} - \theta \leq \varphi_f$$

$$\cot \theta \leq f_s$$

[例]图示为凸轮机构。已知推杆和滑道间的摩擦因数为 $f_s$ ，滑道宽度为 $b$ 。设凸轮与推杆接触处的摩擦忽略不计。问 $a$ 为多大，推杆才不致被卡住。

解：A、B处的全约束力只能在摩擦角以内，即两力作用线的交点只能在C或C的右侧。由三力平衡汇交定理可知，三力在C点右侧汇交时，摩擦力未达到临界状态，可以平衡。因此 $a < a_{\text{极限}}$ 时，推杆不会被卡住。



$$b = \left(a_{\text{lim}} + \frac{d}{2}\right) \tan \varphi_f + \left(a_{\text{lim}} - \frac{d}{2}\right) \tan \varphi_f$$

$$= 2a_{\text{lim}} \tan \varphi_f = 2a_{\text{lim}} f_s$$

$$a_{\text{lim}} = \frac{b}{2f_s}$$

$$a < \frac{b}{2f_s}$$

挺杆不被卡住。

## § 4-3 考虑摩擦时物体的平衡问题

考虑摩擦时的平衡问题 { 判断物体是否平衡问题  
求平衡范围问题  
临界平衡问题

### 一、判断物体是否平衡问题

- ①假定物体平衡，将摩擦力 $F_S$ 作为未知力，指向可假设；
- ②由平衡方程求 $F_S$ 和 $F_N$ 。若 $F_S$ 为负值则与假设指向相反；
- ③计算 $F_{\max}=f_S F_N$ ，根据不等式 $|F_S| \leq F_{\max}$ 是否满足来判断物体是否平衡。满足不等式则平衡，否则不平衡。

## 二、求平衡范围问题（包括力与几何范围）

- ①设物体处于某种临界平衡，摩擦力达到最大值 $F_{\max}$ ，其方向不能假设，要根据物体运动趋势来判断；
- ②补充方程 $F_{\max}=f_S F_N$ ，由平衡方程求未知量；
- ③根据求得的某种临界平衡条件，分析其平衡范围。

## 三、临界平衡问题

- ①设物体处于临界平衡，摩擦力达到最大值 $F_{\max}$ ，其方向不能假设，要根据物体运动趋势来判断；
- ②补充方程 $F_{\max}=f_S F_N$ ，由平衡方程求未知量。

[例]在倾角 $\alpha$ 大于摩擦角 $\varphi_f$ 的固定斜面上放有重 $G$ 的物块，为了维持这物块在斜面上静止不动，在物块上作用了水平力 $F_1$ 。试求该水平力的大小。

解：取物块为研究对象

1. 求 $F_1$ 的最大值 $F_{1\max}$ ，受力分析如图。

列平衡方程

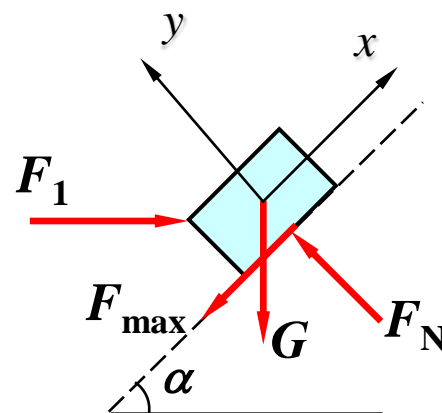
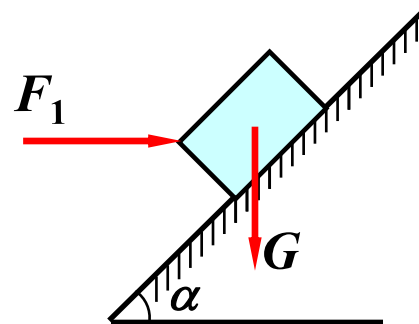
$$\sum F_x = 0 \quad F_1 \cos \alpha - F_{\max} - G \sin \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_N - G \cos \alpha - F_1 \sin \alpha = 0$$

补充方程  $F_{\max} = f_s F_N$

联立求解得

$$F_{1\max} = G \frac{\tan \alpha + \tan \varphi_f}{1 - \tan \varphi_f \tan \alpha} = G \tan(\alpha + \varphi_f)$$



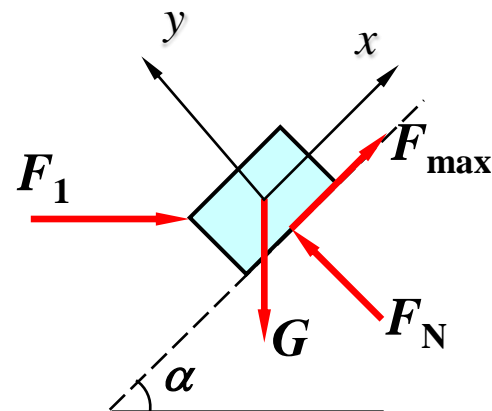
2. 求 $F_1$ 的最小值 $F_{1\min}$ ，受力分析如图。

同理求解得

$$F_{1\min} = G \frac{\tan \alpha - \tan \varphi_f}{1 + \tan \varphi_f \tan \alpha} = G \tan(\alpha - \varphi_f)$$

平衡时， $F_1$ 的大小满足

$$G \tan(\alpha - \varphi_f) \leq F_1 \leq G \tan(\alpha + \varphi_f)$$



## 解2: (几何法)

当物体处于向上滑动的临界平衡状态时, 受力如图, 可得力三角形如图。  
由力三角形可得:

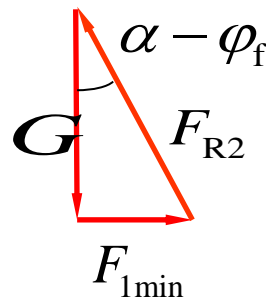
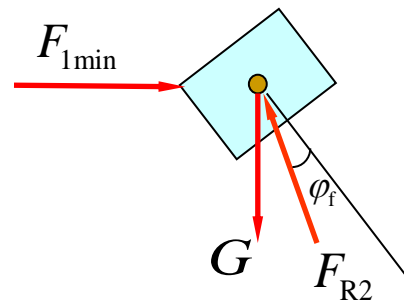
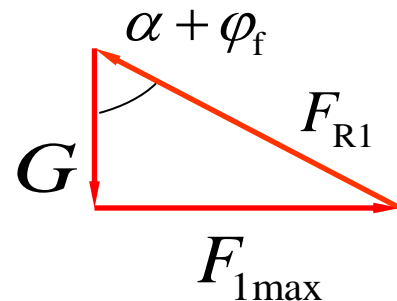
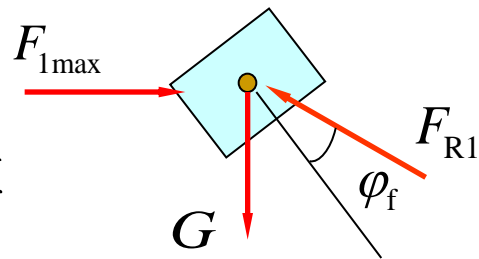
$$F_{1\max} = G \tan(\alpha + \varphi_f)$$

当物体处于向下滑动的临界平衡状态时, 受力如图, 可得力三角形如图。  
由力三角形可得:

$$F_{1\min} = G \tan(\alpha - \varphi_f)$$

故力 $F_1$  应满足的条件为:

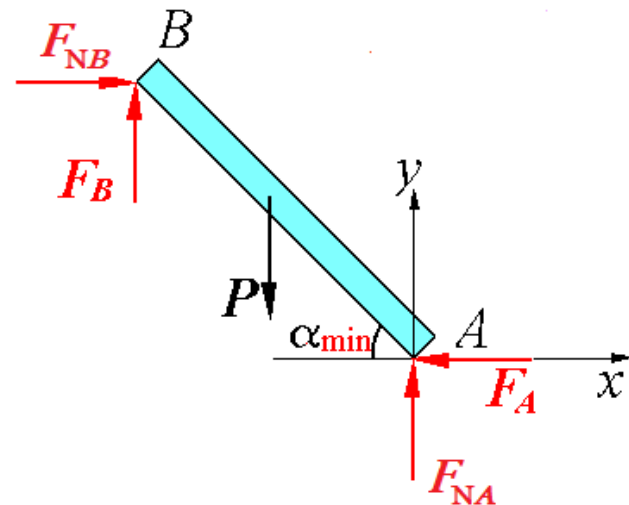
$$G \tan(\alpha - \varphi_f) \leq F_1 \leq G \tan(\alpha + \varphi_f)$$





[例] 梯子长 $AB=l$ ，重为 $P$ ，若梯子与墙和地面的静摩擦因数 $f_s=0.5$ ，求 $\alpha$ 多大时，梯子能处于平衡？

解：考虑到梯子在临界平衡状态有下滑趋势，做受力图。



$$\sum F_x = 0 \quad F_{NB} - F_A = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{NA} + F_B - P = 0 \quad (2)$$

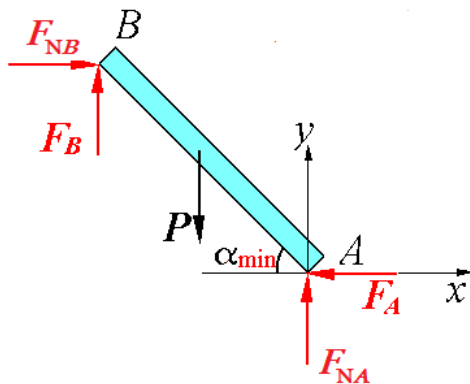
$$F_A = f_s \cdot F_{NA} \quad F_B = f_s \cdot F_{NB}$$

$$\sum M_A = 0 \quad P \cdot \frac{l}{2} \cos \alpha_{\min} - F_B \cdot l \cos \alpha_{\min} - F_{NB} \cdot l \sin \alpha_{\min} = 0 \quad (3)$$

解得  $F_{NA} = \frac{P}{1+f_s^2}, F_{NB} = \frac{f_s P}{1+f_s^2}, F_B = \frac{f_s^2 P}{1+f_s^2}$  代入 (3)

得  $\tan \alpha_{\min} = \frac{1-f_s^2}{2f_s} = \frac{1-\tan^2 \varphi_f}{2\tan \varphi_f} = \operatorname{ctg} 2\varphi_f = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi_f\right)$

$$\alpha_{\min} = \frac{\pi}{2} - 2\varphi_f = 36^{\circ}87'$$



注意，由于 $\alpha$ 不可能大于 $90^\circ$ ，  
所以梯子平衡倾角 $\alpha$ 应满足

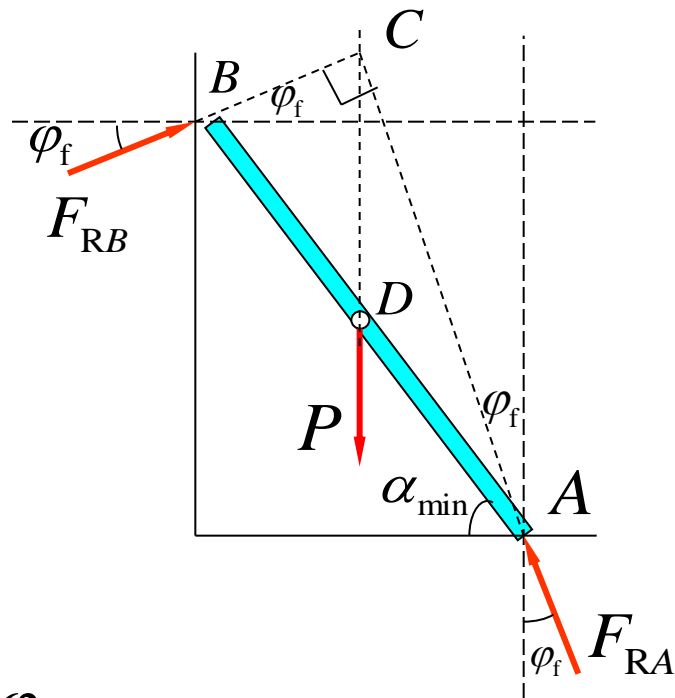
$$36^{\circ}87' \leq \alpha \leq 90^{\circ}$$

## 解2：（几何法）

当梯子处于向下滑动的临界平衡状态时，受力如图，显然  $F_{RA} \perp F_{RB}$ ，于是

$$\begin{aligned}\alpha_{\min} &= \frac{\pi}{2} - \varphi_f - \angle CAD \\ &= \frac{\pi}{2} - \varphi_f - \angle ACD = \frac{\pi}{2} - 2\varphi_f\end{aligned}$$

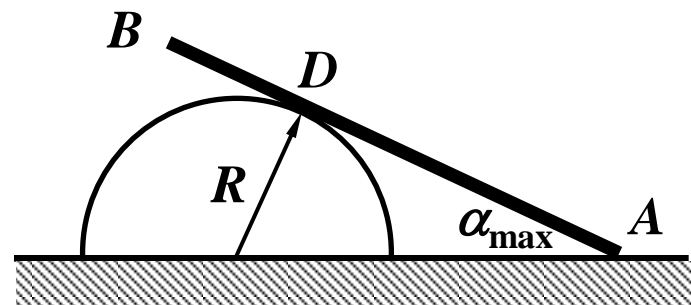
故  $\alpha$  应满足的条件是：
$$\frac{\pi}{2} - 2\varphi_f \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$



[例] 均质杆 $AB$ 长为 $2b$ ，重为 $P$ ，放在半径为 $R$ 的固定半圆柱上，设各处摩擦因数均为 $f_s$ ，求杆处于平衡时 $\alpha$ 的最大值。

解： $\alpha$ 取最大值时杆处于临界平衡状态，摩擦力为最大静摩擦力。

画 $AB$ 的受力图，列平衡方程。



$$\sum F_x = 0 \quad F_{ND} \sin \alpha - F_{D\max} \cos \alpha - F_{A\max} = 0 \quad (1)$$

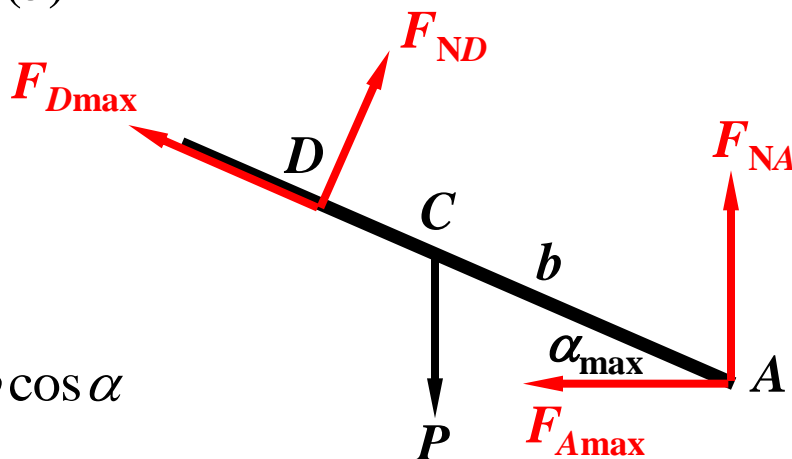
$$\sum F_y = 0 \quad F_{ND} \cos \alpha + F_{D\max} \sin \alpha + F_{NA} - P = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_A(F) = 0 \quad F_{ND} R \cot \alpha - Pb \cos \alpha = 0 \quad (3)$$

补充方程  $F_{D\max} = f_s F_{ND} \quad F_{A\max} = f_s F_{NA}$

$$(1)+(2) \times f_s \text{ 得 } F_{ND} = \frac{f_s P}{(1 + f_s^2) \sin \alpha} \quad (4)$$

$$(4) \text{ 代入 } (3) \text{ 得 } \frac{f_s P}{(1 + f_s^2) \sin \alpha} R \cot \alpha = Pb \cos \alpha$$



最后求得 
$$\sin^2 \alpha_{\max} = \frac{f_s}{1 + f_s^2} \frac{R}{b}$$

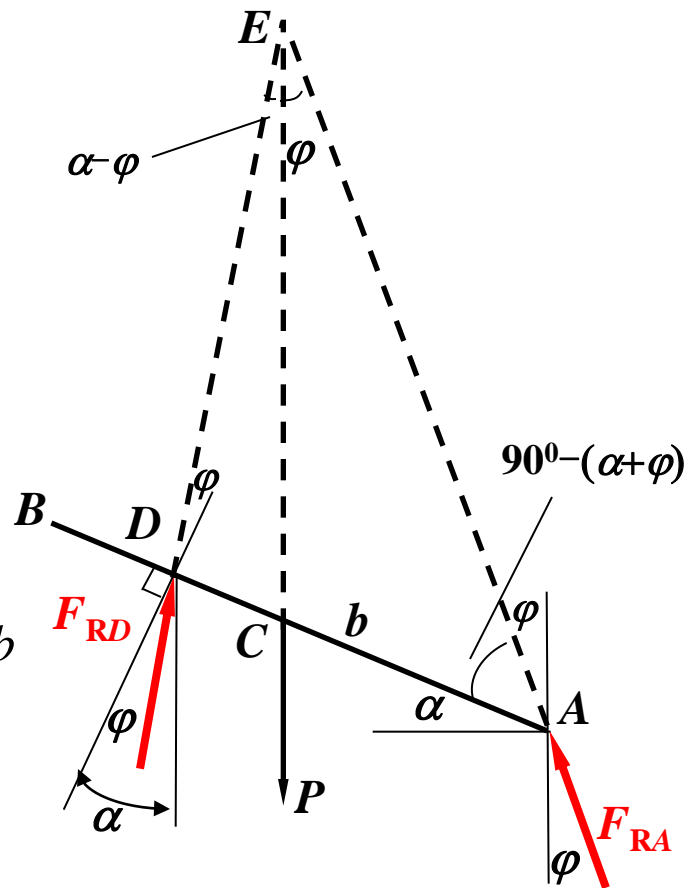
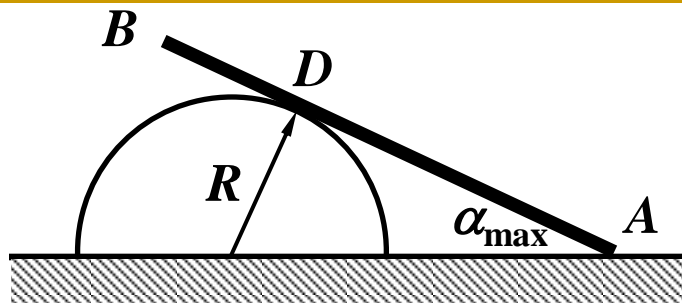
几何法：因为A、D两点同时达到临界状态，所以两点处的全约束力与法线的夹角均为摩擦角 $\varphi$ ，画受力图如图所示。

$$\Delta ACE \quad \frac{CE}{\sin[90^\circ - (\alpha + \varphi)]} = \frac{b}{\sin \varphi}$$

$$\therefore CE = \frac{\cos(\alpha + \varphi)}{\sin \varphi} b$$

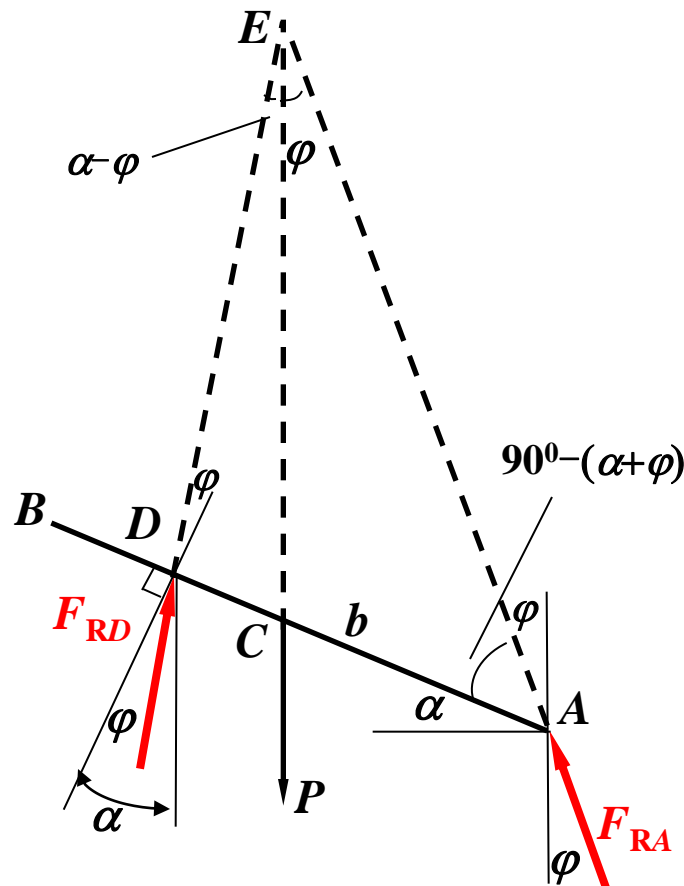
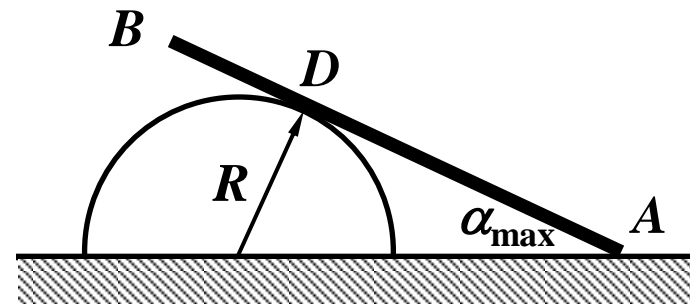
$$\Delta CDE \quad \frac{CD}{\sin(\alpha - \varphi)} = \frac{CE}{\sin(90^\circ + \varphi)}$$

$$\begin{aligned} \therefore CD &= \frac{CE}{\cos \varphi} \sin(\alpha - \varphi) = \frac{\sin(\alpha - \varphi) \cos(\alpha + \varphi)}{\sin \varphi \cos \varphi} b \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin \varphi \cos \varphi} b - b \end{aligned}$$



$$\therefore CD + b = AD = R \cot \alpha = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin \varphi \cos \varphi} b$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin^2 \alpha &= \sin \varphi \cos \varphi \frac{R}{b} = \tan \varphi \cos^2 \varphi \frac{R}{b} \\ &= \frac{\tan \varphi}{1 + \tan^2 \varphi} \frac{R}{b} \\ &= \frac{f_s}{1 + f_s^2} \frac{R}{b} \end{aligned}$$



[例]均质杆放在粗糙的水平面上，杆与地面的摩擦因数为 $f_s$ ，杆与水平面上的夹角为 $45^\circ$ 。杆端用绳子拉住，试求绳子对水平线的倾角为多大时，杆开始向右滑动。

解：因为A处达到临界状态，其全约束力与法线的夹角为摩擦角 $\varphi$ ，画受力图如图。三力平衡汇交如图所示。

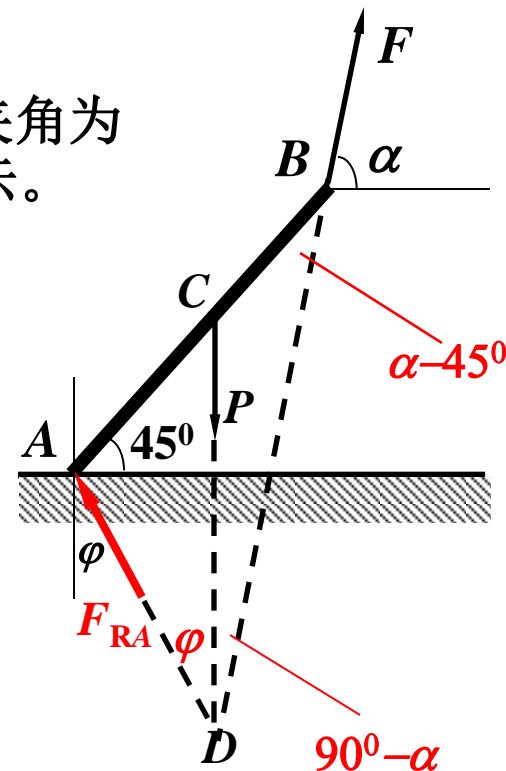
$$\triangle ACD \quad \frac{CD}{\sin(135^\circ - \varphi)} = \frac{AC}{\sin \varphi}$$

$$\triangle BCD \quad \frac{CD}{\sin(\alpha - 45^\circ)} = \frac{BC}{\sin(90^\circ - \alpha)}$$

$$BC=AC \quad \therefore \frac{\sin(\alpha - 45^\circ)}{\cos \alpha} = \frac{\sin(135^\circ - \varphi)}{\sin \varphi}$$

$$\text{展开得} \quad \tan \alpha = 2 + \frac{1}{\tan \varphi} = 2 + \frac{1}{f_s}$$

解析法自己考虑求解



[例]图示均质木箱重 $P=5\text{kN}$ ，它与地面间的静摩擦因数 $f_s=0.4$ 。图中 $h=2a=2\text{m}$ ， $\theta=30^\circ$ 。求（1）当 $D$ 处的拉力 $F=1\text{kN}$ 时，木箱是否平衡？（2）能保持木箱平衡的最大拉力。

解：取木箱为研究对象，受力分析如图。

欲保持木箱平衡，必须

① 不发生滑动，即 $F_s \leq F_{\max} = f_s F_N$ 。

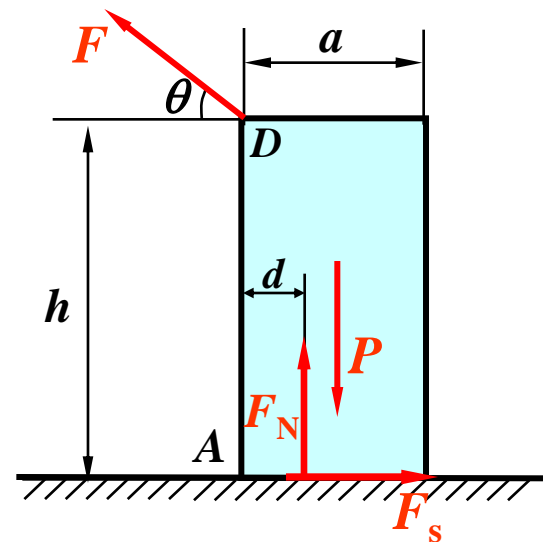
② 不绕点 $A$ 翻倒，即 $d > 0$ 。

(1) 判断是否平衡问题，假设木箱平衡，  
列平衡方程

$$\sum F_x = 0 \quad F_s - F \cos \theta = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_N - P + F \sin \theta = 0$$

$$\sum M_A(F) = 0 \quad hF \cos \theta - P \frac{a}{2} + F_N d = 0$$



$$F_s = 0.866\text{kN}$$

解方程得  $F_N = 4.5\text{kN}$

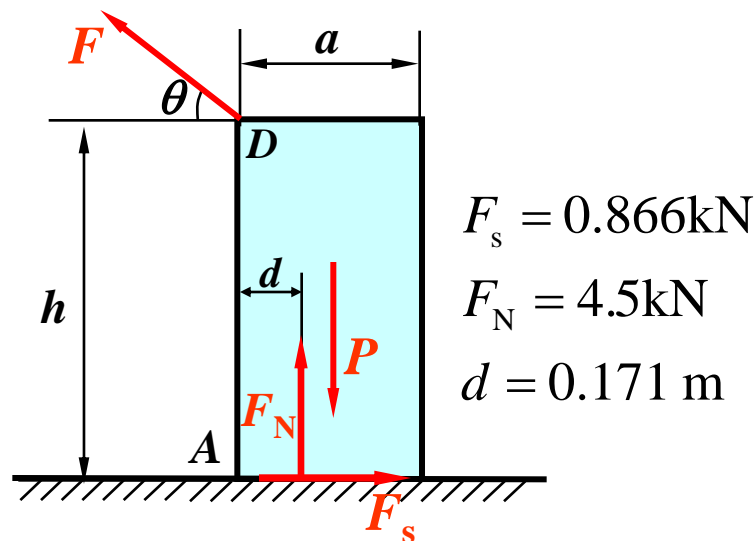
$$d = 0.171\text{ m}$$



木箱与地面之间的最大摩擦力为

$$F_{\max} = f_s F_N = 1.8 \text{ kN}$$

因为  $F_s < F_{\max}$ ，所以木箱不滑动。  
又因为  $d > 0$ ，所以木箱不会翻倒。



(2)求平衡时最大拉力，即求滑动临界与翻倒临界中的最小力 $F$ 。

木箱发生滑动的条件为  $F_s = F_{\max} = f_s F_N$

平衡  $\sum F_x = 0 \quad F_s - F \cos \theta = 0$

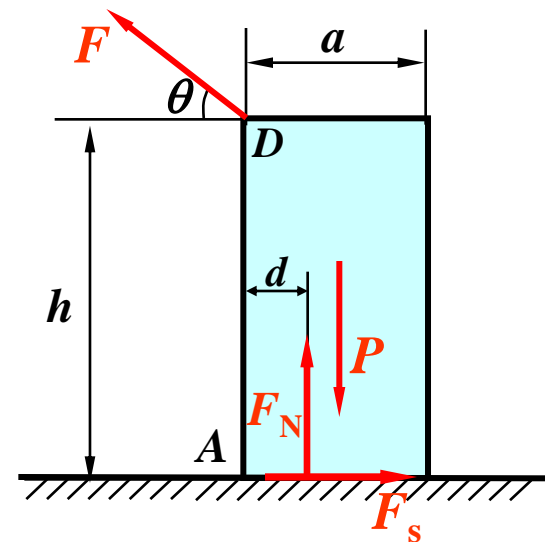
方程  $\sum F_y = 0 \quad F_N - P + F \sin \theta = 0$

联立平衡方程，求得  $F_{\text{滑}} = \frac{f_s P}{\cos \theta + f_s \sin \theta} = 1.876 \text{ kN}$

木箱绕 A 点翻倒的条件为  $d=0$ ，  
代入下列平衡方程，得

$$\sum M_A(F) = 0 \quad hF \cos \theta - P \frac{a}{2} + F_N d = 0$$

$$F_{\text{翻}} = \frac{Pa}{2h \cos \theta} = 1.443 \text{ kN}$$



由于  $F_{\text{翻}} < F_{\text{滑}}$ ，所以保持木箱平衡的最大拉力为

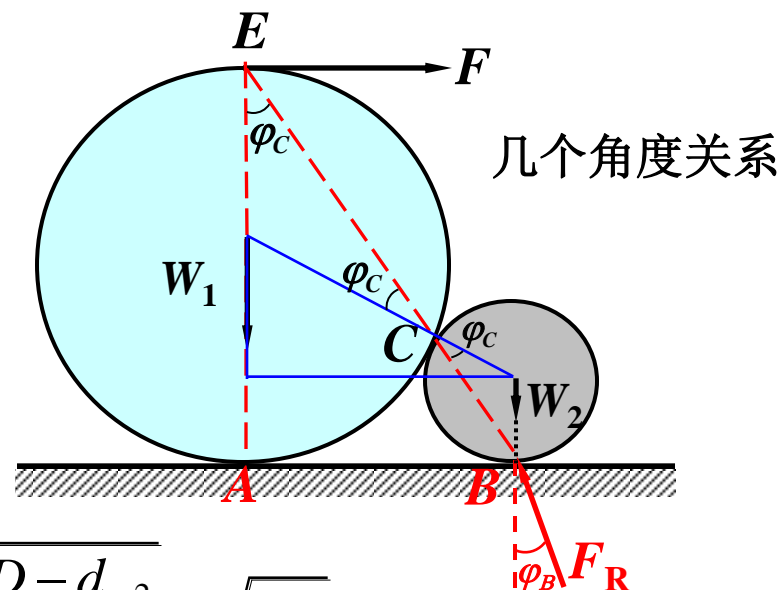
$$F = F_{\text{翻}} = 1.443 \text{ kN}$$

# P130习题4-18

大圆能越过小圆的条件是：大圆A点无约束力；小圆B点的全约束力与法线的夹角不大于摩擦角。

根据三力平衡汇交定理：大圆重力 $W_1$ 和拉力 $F$ 交于 $E$ 点，则C点处的全约束力必通过 $E$ 点。

对于小圆而言，小圆重力 $W_2$ 和B点全约束力 $F_R$ 交于B点，根据三力平衡汇交定理，则C点处的全约束力必通过B点。



由图示三角形得： $AB = \sqrt{\left(\frac{D+d}{2}\right)^2 - \left(\frac{D-d}{2}\right)^2} = \sqrt{Dd}$

根据几何关系有： $\tan \varphi_C = \frac{AB}{AE} = \frac{\sqrt{Dd}}{D} = \sqrt{\frac{d}{D}} \leq \tan \varphi_f = f_s$

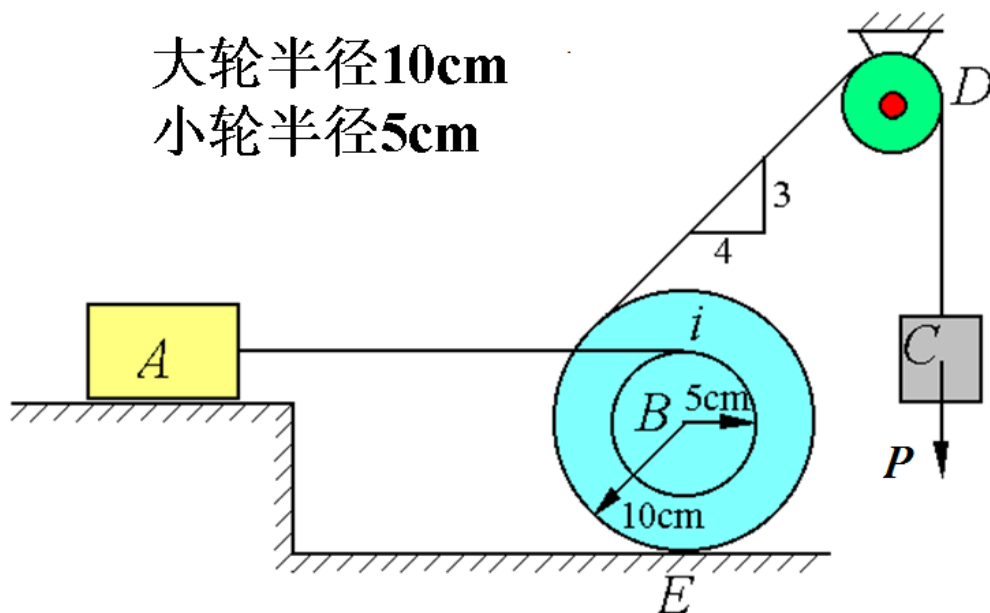
注意： $\varphi_C > \varphi_B$ ，说明C处先达到临界状态。为什么？

小球平衡时力三角形自行封闭！

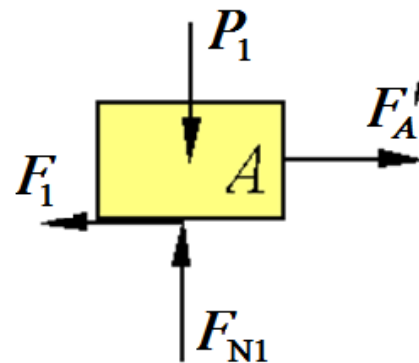
[例] P131、4-22: 已知A块重500N，轮B重1000N，D轮无摩擦，E点的静摩擦因数  $f_{SE}=0.2$ ，A点的静摩擦因数  $f_{SA}=0.5$ 。

求：使物体平衡时块C的重量。

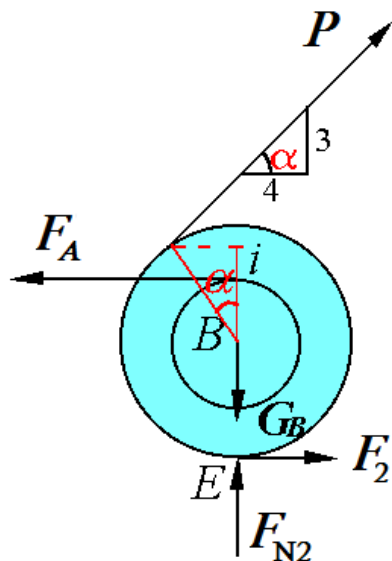
解：① A不动（即*i*点不产生移动）求*P*



由于  $F_A' \leq F_1 = f_{SA} \cdot F_{N1}$   
 $= 0.5 \times 500 = 250\text{N}$



## 分析轮有



$$F_A = F'_A \leq 0.5 \times 500 = 250 \text{ N}$$

由  $\sum M_E(F) = 0$  得

$$F_A \cdot 15 - (P \cdot 10 + P \cos \alpha \cdot 10) = 0$$

$P$ 对 $E$ 点取矩用力线平移定理和合力矩定理

$$\therefore P = \frac{15F_A}{10[1 + \cos \alpha]} \leq \frac{15 \times 250}{10 \times (1 + \frac{4}{5})} = 208.3(\text{N})$$

教材为20.83

## ② $E$ 点不产生水平移动

$$\text{即 } F_2 \leq f_{SE} F_{N2} = 0.2 \times F_{N2} = 0.2(1000 - P \cdot \frac{3}{5})$$

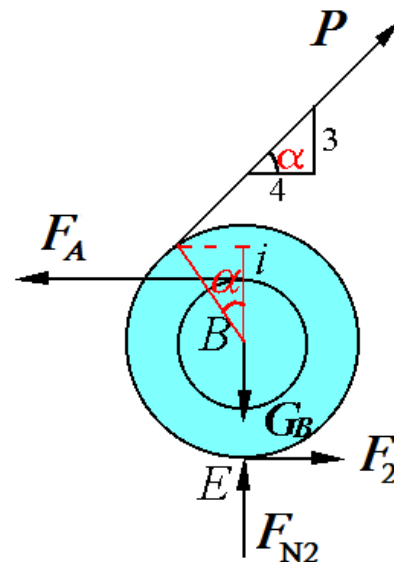
由  $\sum M_i(F) = 0$  可得  $P$

$$F_2 \cdot 15 - P \cdot 10 + P \cos \alpha \cdot 5 = 0$$

$$P(10 - 5 \cos \alpha) = F_2 \cdot 15 \leq 3(1000 - \frac{3}{5} P)$$

$$P(10 - 5 \cdot \frac{4}{5} + \frac{9}{5}) \leq 3000$$

$$P \leq \frac{3000}{7.8} = 384.6(\text{N})$$



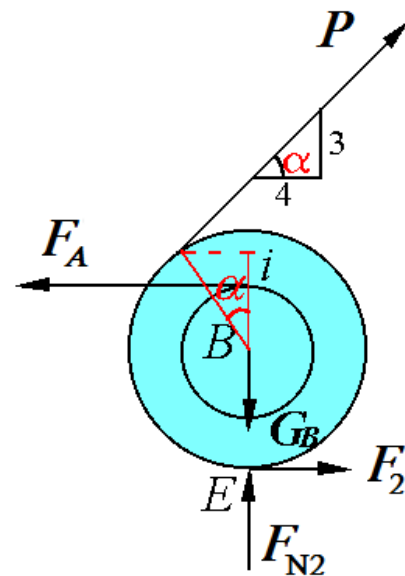
③  $B$ 轮不向上运动，即 $F_{N2} \geq 0$

$$\sum F_y = 0 \quad \therefore F_{N2} - G_B + P \sin \alpha = 0;$$

$$\therefore F_{N2} = G_B - P \sin \alpha = 1000 - P \frac{3}{5} \geq 0 \quad \therefore P \leq \frac{1000}{0.6} = 1666.7(\text{N})$$

显然，如果 $i$ ， $E$ 两点均不产生运动， $P$ 必须小于208.3N，即

$$P_{\max} = 208.3(\text{N})$$



[例]长为 $2l$ 的均质杆 $AB$ 搁在半径 $r$ 为的均质圆柱体上，杆轴与圆柱轴互相垂直，杆轴与圆柱重心在同一竖直平面内。 $A$ 点为光滑铰支，其余接触处的摩擦因数均为 $f_s$ 。求平衡时杆与水平面夹角 $\theta$ 的最大值。

解：多点接触问题，以圆柱为研究对象

$$\sum M_O(F) = F_D r - F_C r = 0$$

$$\Rightarrow F_D = F_C$$

$$\sum M_A(F) = F_{NC} \cdot AC - F_{ND} \cdot AD - W \cdot AC = 0$$

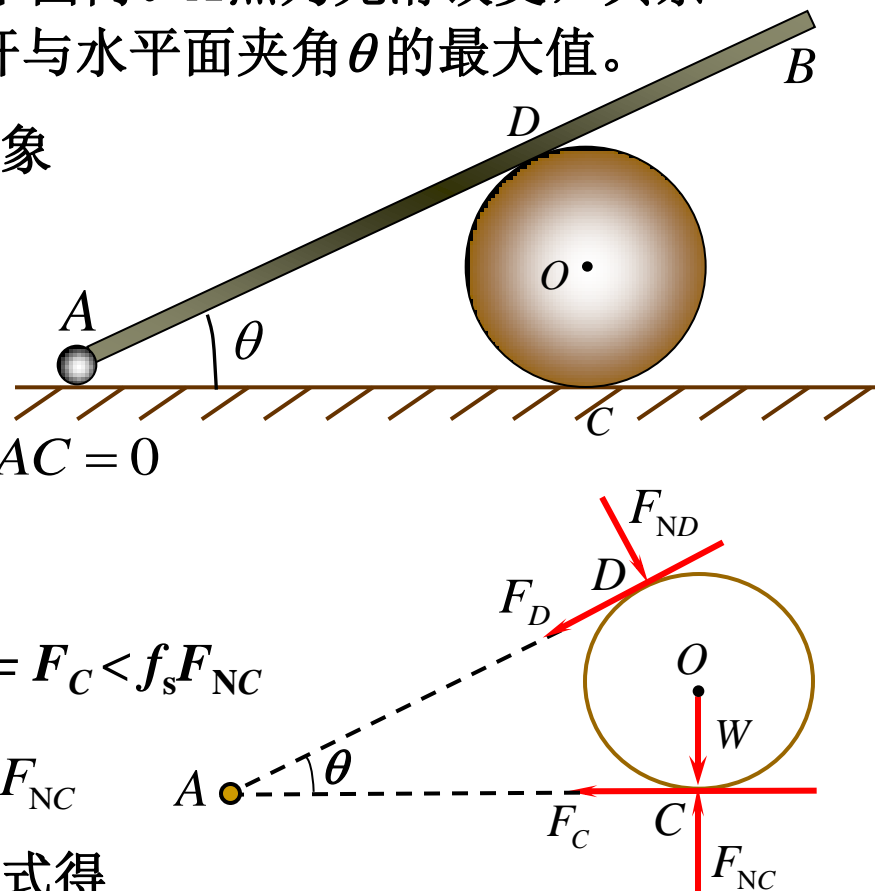
$$\Rightarrow F_{NC} = W + F_{ND} > F_{ND}$$

$D$ 点首先达到临界状态。  $\therefore F_D = f_s F_{ND} = F_C < f_s F_{NC}$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{ND} \cos \theta + F_D \sin \theta + W = F_{NC}$$

$$F_{NC} = W + F_{ND} : F_D = f_s F_{ND} \quad \text{代入上式得}$$

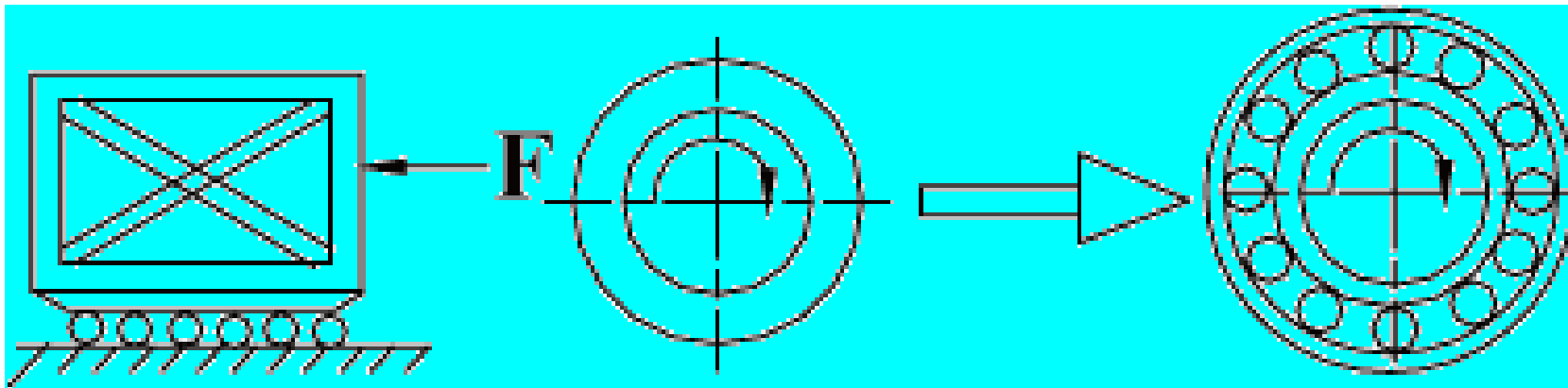
$$\cos \theta + f_s \sin \theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \theta &= 0 \quad (\text{不合题意}) \\ \theta &= 2 \arctan f_s \end{aligned}$$



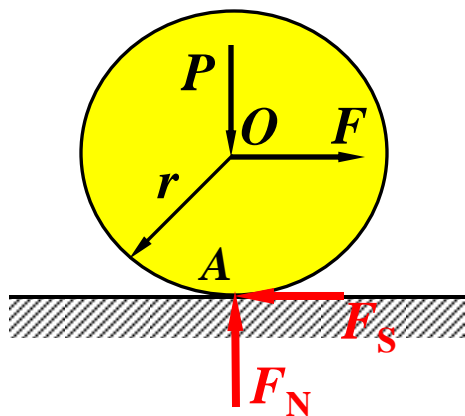


## § 4-4 滚动摩阻的概念

当搬运重物时，若在重物底下垫上辊轴，则比直接将重物放在地面上推或拉要省力得多，这说明用辊轴的滚动来代替箱底的滑动，所受到的阻力要小。车辆用轮子“行走”，机器重用滚动轴承，都是为了减少摩擦阻力。



由实践可知，使滚子滚动比使它滑动省力，下图的受力分析看出一个问题，即若此物体平衡，但不能完全满足平衡方程。



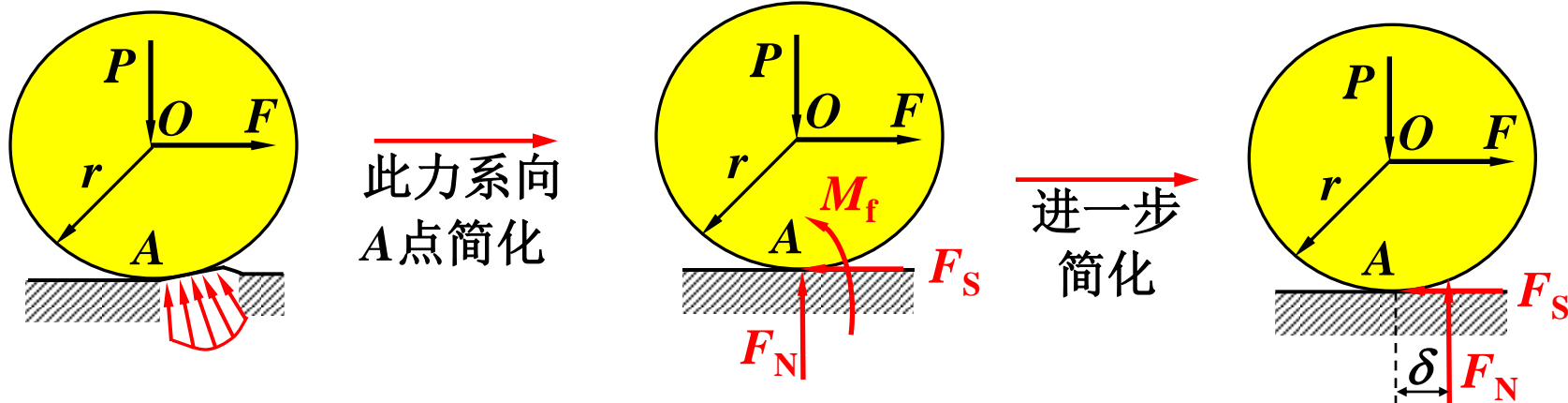
$F$ 与 $F_S$ 形成主动力偶使轮滚动，但轮却可以平衡。

$$\sum F_x = 0 \quad F - F_S = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_N - P = 0$$

$$\sum M_A(F) = 0 \quad F \cdot r = 0 \text{ (不成立)}$$

出现这种现象的原因是，实际接触面并不是刚体，它们在力的作用下都会发生一些变形，如图：

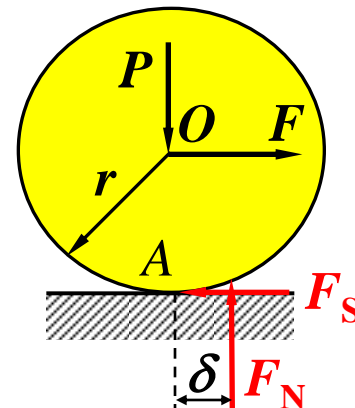


## 滚动摩阻力偶 $M_f$ 与主动力偶 $(F, F_S)$ 相平衡

- 滚动摩阻
- ① 滚阻力偶  $M_f$  随主动力偶  $(F, F_S)$  的增大而增大;
  - ②  $0 \leq M_f \leq M_{\max}$ , 有个平衡范围;
  - ③  $M_{\max}$  与滚子半径无关;
  - ④ 滚动摩阻定律:  $M_{\max} = \delta F_N$ ,  $\delta$  为滚动摩阻系数。

滚动摩阻系数  $\delta$  的说明:

- ①有长度量纲，单位一般用mm,cm;
- ②与滚子和支承面的材料的硬度和温度有关。
- ③  $\delta$  的物理意义见图示。



从图中看出，滚阻力偶 $M_f$ 的力偶臂正是 $\delta$ （滚阻系数），所以， $\delta$ 具有长度量纲。

由于滚阻系数很小，所以在工程中大多数情况下滚阻力偶不计，即滚动摩擦忽略不计。

滚动所需的主动力

$$F_{\text{滚}} = \frac{M_{\text{max}}}{r} = \frac{\delta F_N}{r} = \frac{\delta}{r} P$$

滑动所需的主动力

$$F_{\text{滑}} = F_{\text{max}} = f_s F_N = f_s P$$

一般情况下

$$\frac{\delta}{r} \ll f_s$$

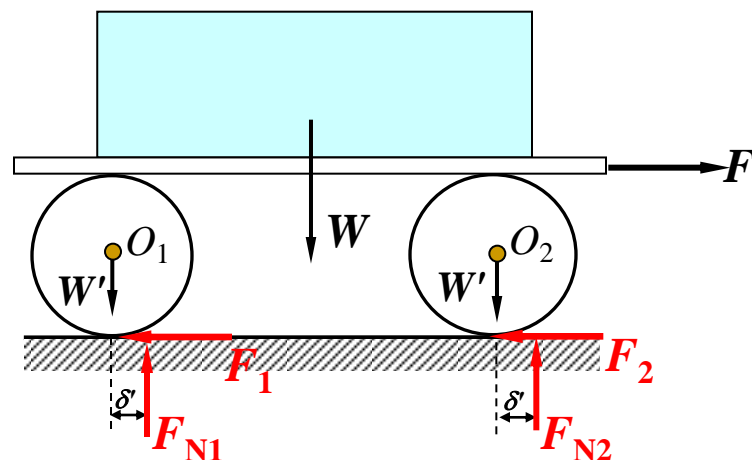
滚动比滑动容易。

[例]搬运重物时下面常垫以滚木，如图所示。设重物重 $W$ ，滚木重 $W'$ ，半径为 $r$ ，滚木与重物间的滚阻系数为 $\delta$ ，与地面间的滚阻系数为 $\delta'$ 。求即将拉动时水平力 $F$ 的大小。P1334-29

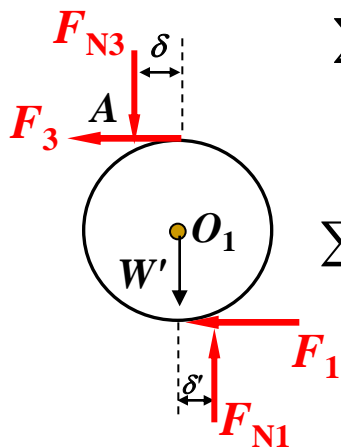
解:1、取整体为研究对象画受力图。

$$\sum F_x = 0 \quad F - F_1 - F_2 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad -W - 2W' + F_{N1} + F_{N2} = 0 \quad (2)$$



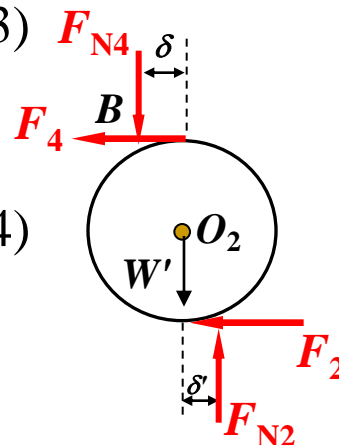
2、取左面的滚木为研究对象画受力图。



$$\sum M_A(F_i) = 0 \quad F_{N1}(\delta + \delta') - 2F_1r - W'\delta = 0 \quad (3)$$

3 取右面的滚木为研究对象得:

$$\sum M_B(F_i) = 0 \quad F_{N2}(\delta + \delta') - 2F_2r - W'\delta = 0 \quad (4)$$



联立(1)(2)(3)(4)式得:

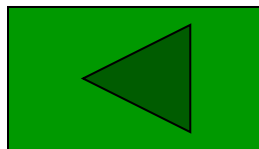
$$F = \frac{W(\delta + \delta') + 2W'\delta'}{2r}$$

讨论: (1) 设  $W=1000\text{kN}$ ,  $W'=0$ ,  $\delta=0.05\text{cm}$ ,

$\delta'=0.20\text{cm}$ ,  $r=12.5\text{cm}$ 。代入得:  $F=10\text{kN}$ 。

(2) 当  $\delta = \delta' = 0$  时  $F = 0$ 。此时相当于把重物放在一个理想光滑面上。

# 本章结束





# 理论力学






---

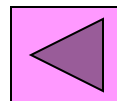
## 第五章 刚体的平面运动



刚体的平面运动是工程上常见的一种运动，这是一种较为复杂的运动。对它的研究可以在研究刚体的平动和定轴转动的基础上，通过运动合成和分解的方法，将平面运动分解为上述两种基本运动。然后应用合成运动的理论，推导出平面运动刚体上一点的速度和加速度的计算公式。

## 第五章 刚体的平面运动

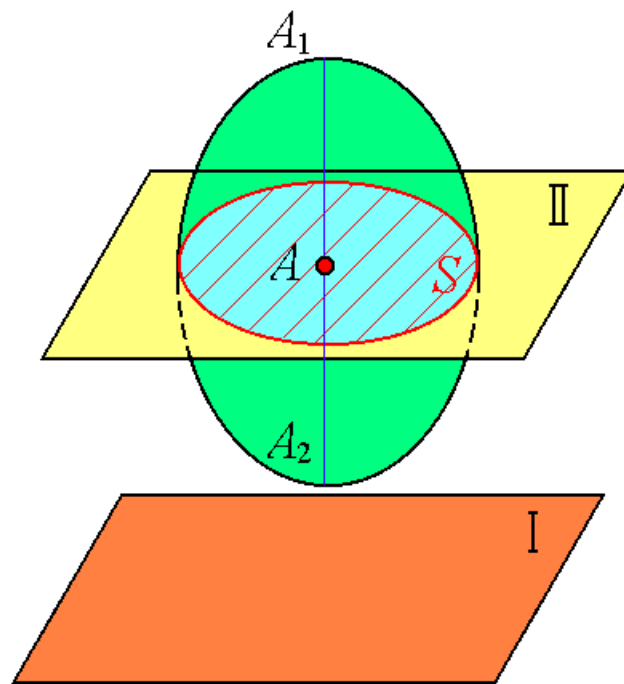
-  § 5-1 刚体平面运动的研究方法
-  § 5-2 平面图形内各点的速度
-  § 5-3 平面图形内各点的加速度
-  § 5-4 机构运动分析
-  习题课

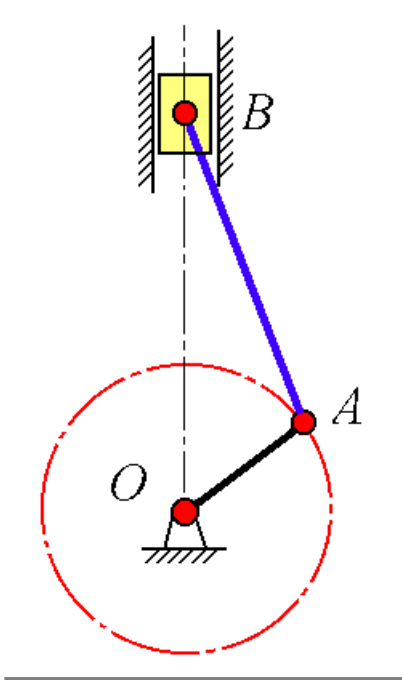


## § 5-1 刚体的平面运动方程

### 一. 平面运动的定义

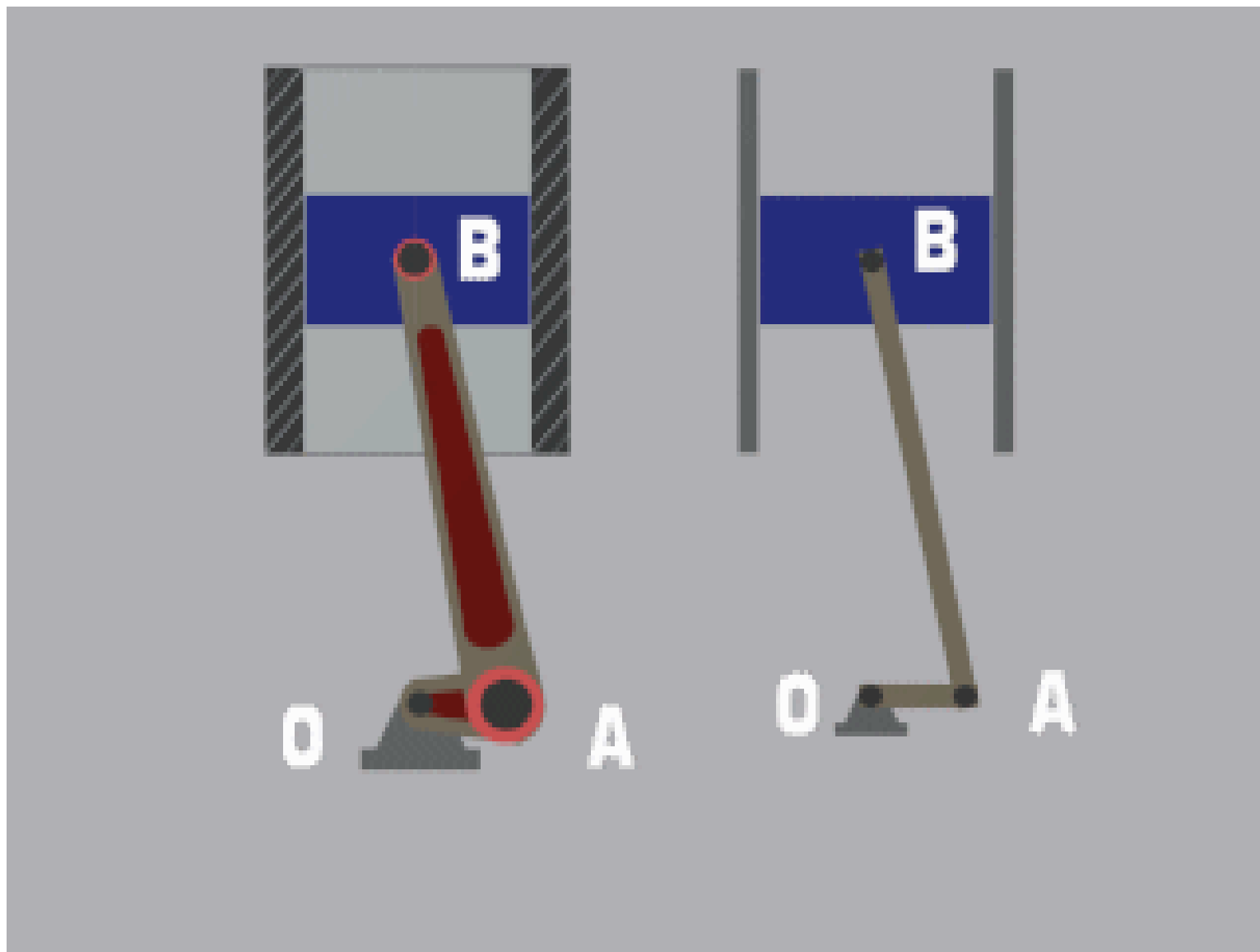
在运动过程中，刚体上任一点到某一固定平面的距离始终保持不变。也就是说，刚体上任一点都在与该固定平面平行的某一平面内运动。具有这种特点的运动称为刚体的平面运动。





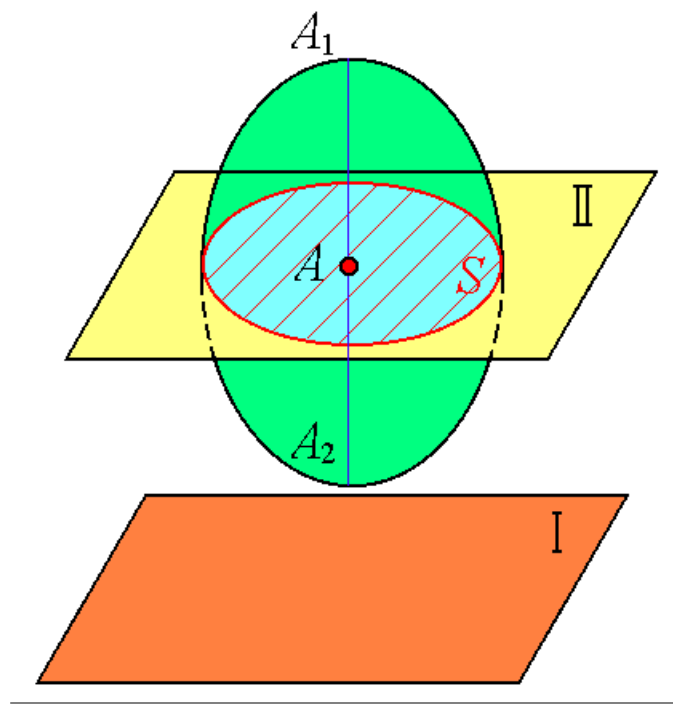
例如：曲柄连杆机构中连杆 $AB$ 的运动，  
 $A$ 点作圆周运动， $B$ 点作直线运动，因此，  
 $AB$  杆的运动既不是平动也不是定轴转动，  
而是平面运动。

请看动画



## 二. 平面运动的简化

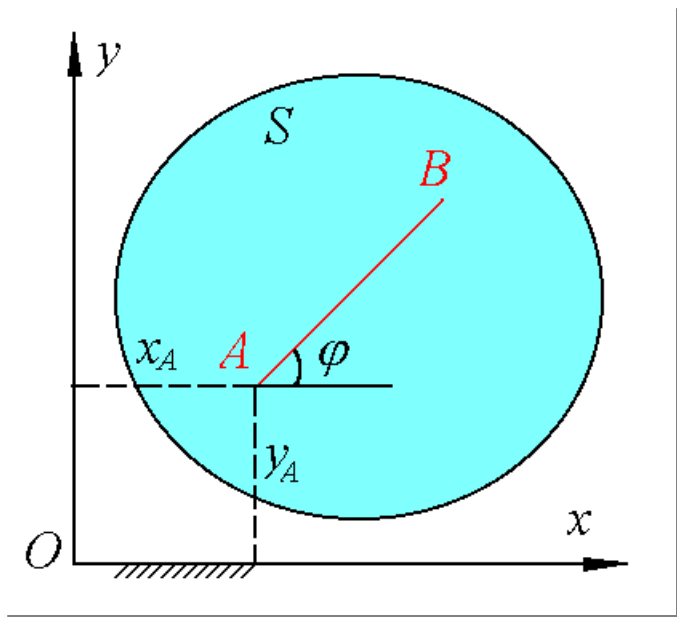
刚体的平面运动可以简化为平面图形 $S$ 在其自身平面内的运动. 即在研究平面运动时, 不需考虑刚体的形状和尺寸, 只需研究平面图形的运动, 确定平面图形上各点的速度和加速度.



### 三、平面运动分解为平动和转动

#### 1. 平面运动方程

为了确定代表平面运动刚体的平面图形的位置，我们只需确定平面图形内任意一条线段的位置。



任意线段 $AB$ 的位置可用 $A$ 点的坐标和 $AB$ 与 $x$ 轴夹角表示. 因此图形 $S$  的位置决定于  $x_A, y_A, \varphi$  三个独立的参变量. 所以

$$\text{平面运动方程} \begin{cases} x_A = f_1(t) \\ y_A = f_2(t) \\ \varphi = f_3(t) \end{cases}$$

对于每一瞬时  $t$ ，都可以求出对应的  $x_A, y_A, \varphi$ ，图形  $S$  在该瞬时的位置也就确定了。

## 2. 平面运动分解为平动和转动

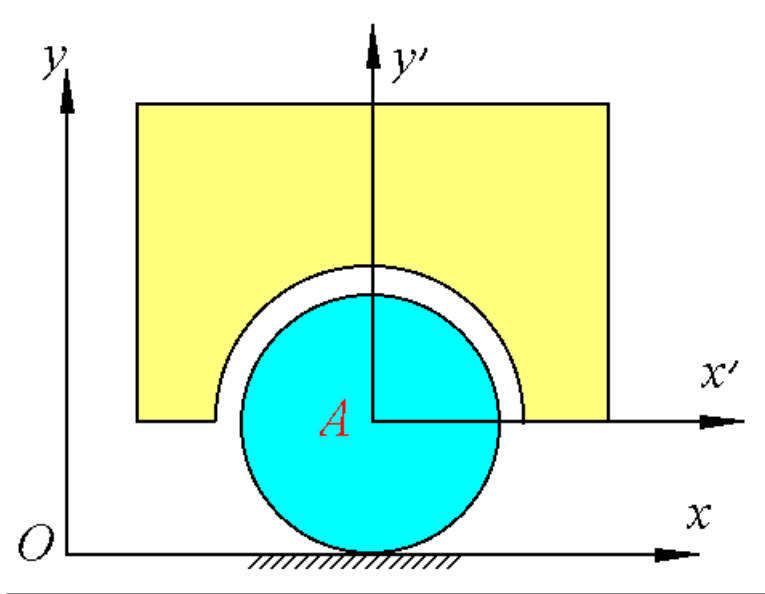
当图形  $S$  上  $A$  点不动时，则刚体作定轴转动

当图形  $S$  上  $\varphi$  角不变时，则刚体作平动。

故刚体平面运动可以看成是平动和转动的合成运动。



例如 车轮的运动.



车轮的平面运动可以看成  
是车轮随同车厢的平动和相对  
车厢的转动的合成.

车轮对于静系的平面运动 (绝对运动)

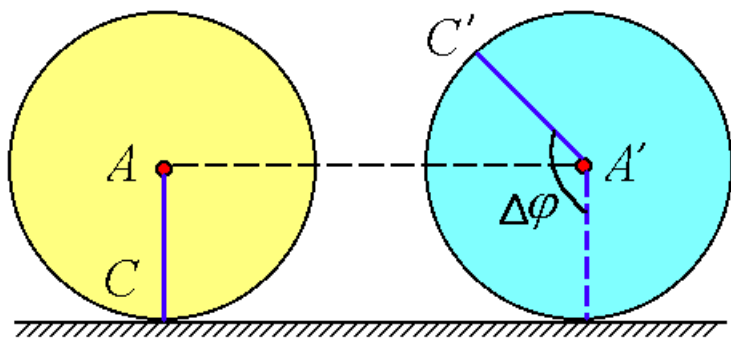
车厢 (动系 $Ax'y'$ ) 相对静系的平动 (牵连运动)

车轮相对车厢 (动系 $Ax'y'$ ) 的转动 (相对运动)

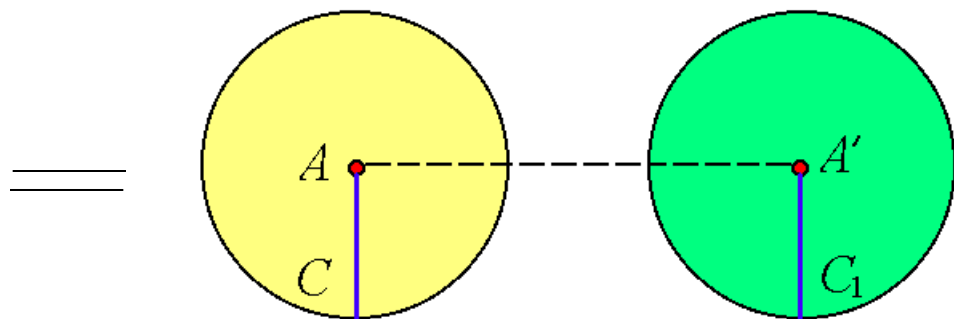
我们称动系上的原点  $A$  为基点，于是

刚体的平面运动可以  
分解为随基点的平动  
和绕基点的转动。

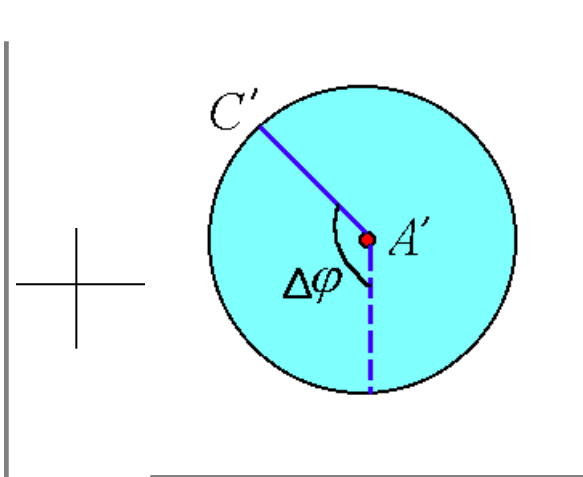
I - II



车轮的平面运动



随基点  $A$  的平动

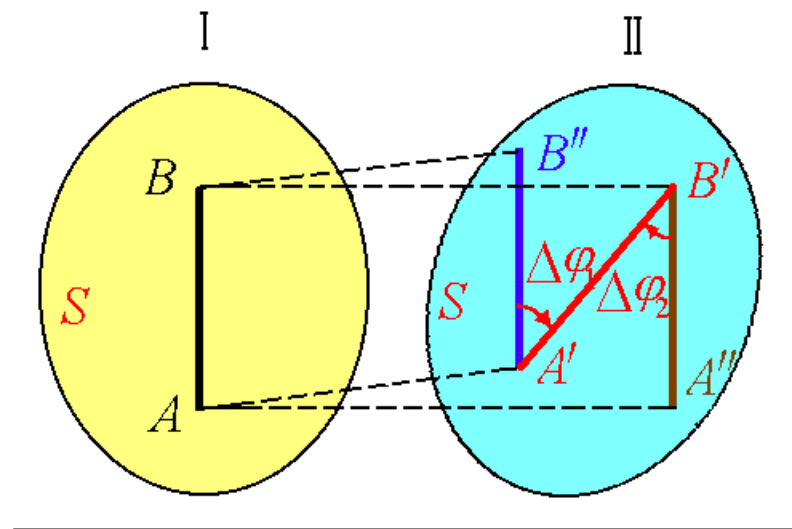


绕基点  $A'$  的转动

## 3.刚体平面运动的角速度

### 和角加速度

平面图形  $S$  在  $\Delta t$  时间内从位置 I 运动到位置 II



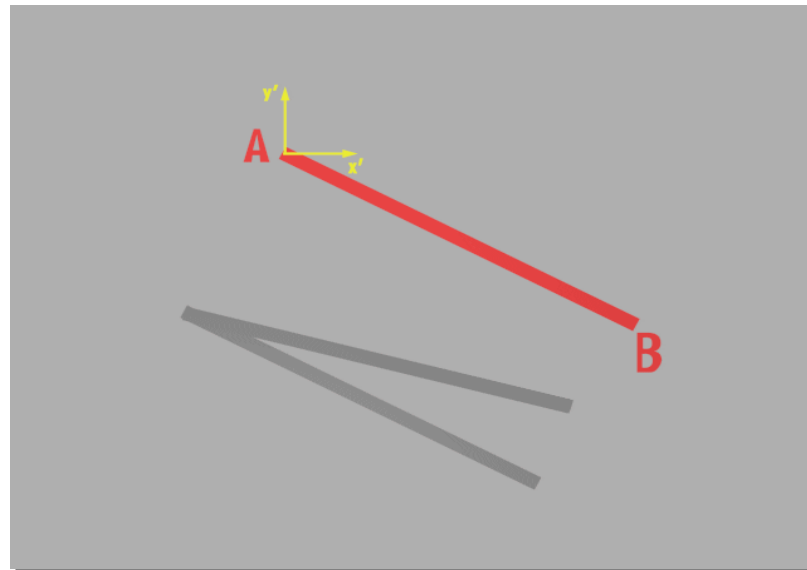
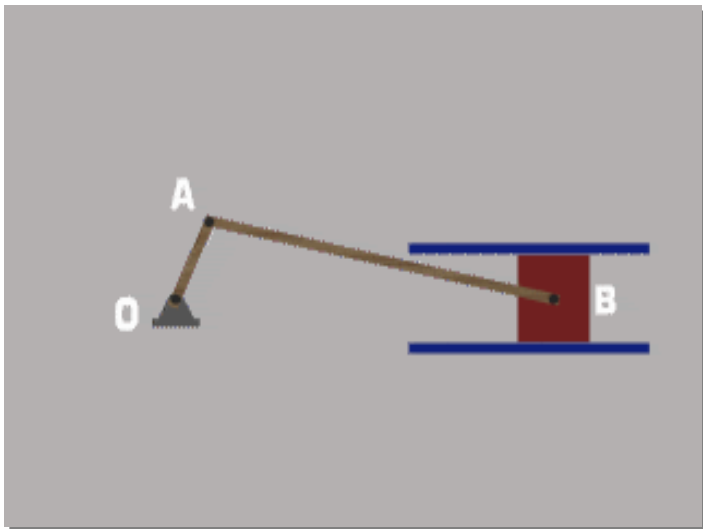
**a.** 以  $A$  为基点：随基点  $A$  平动到  $A'B''$  后，绕基点转  $\Delta\varphi_1$  角到  $A'B'$

**b.** 以  $B$  为基点：随基点  $B$  平动到  $A''B'$  后，绕基点转  $\Delta\varphi_2$  角到  $A'B'$

图中看出：  $AB \parallel A'B'' \parallel A''B'$  ,  $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2$  于是有

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi_2}{\Delta t}, \omega_1 = \omega_2; \quad \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{d\omega_2}{dt}, \varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

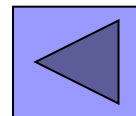
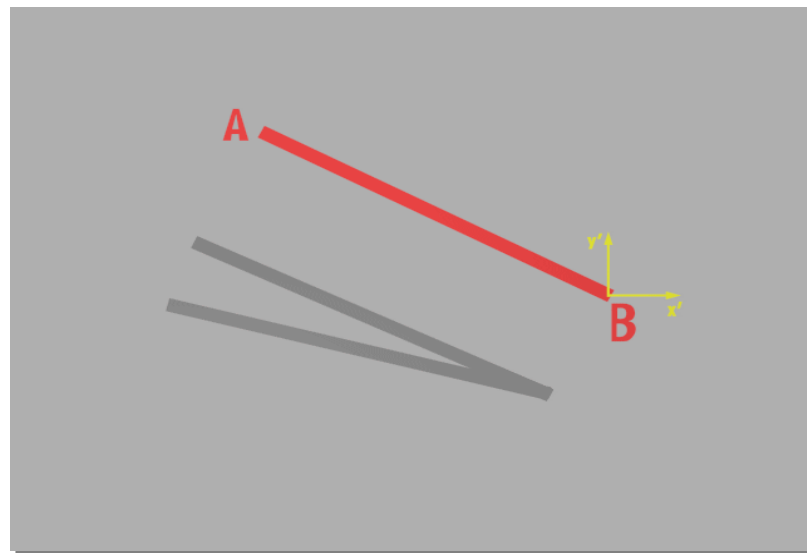
所以，平面运动随基点平动的运动规律与基点的选择有关，而绕基点转动的规律与基点选取无关。（即在同一瞬间，图形绕任一基点转动的 $\varepsilon$ ， $\omega$ 都是相同的）基点的选取是任意的。（通常选取运动情况已知的点作为基点）



曲柄连杆机构

AB杆作平面运动  
平面运动的分解

(请看动画)



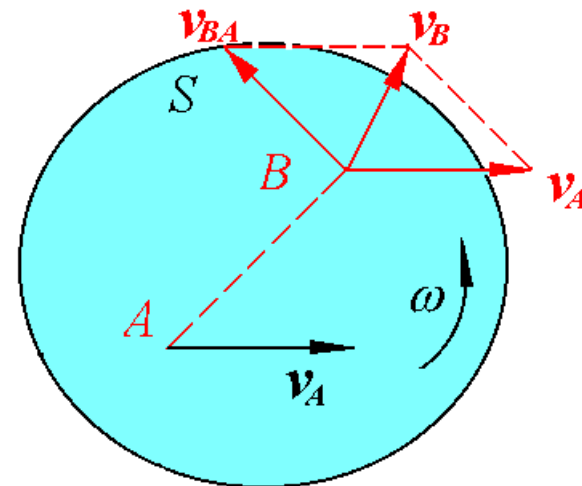
## § 5-2 平面图形内各点的速度

## 一. 基点法 (合成法)

已知: 图形 $S$ 内一点 $A$ 的速度  $\bar{v}_A$  ,

图形角速度 $\omega$  求:  $\bar{v}_B$

取 $A$ 为基点, 将动系固结于 $A$ 点,  
动系作平动。



取 $B$ 为动点, 则 $B$ 点的运动可视为牵连运动为平动和相对运动  
为圆周运动的合成  $\bar{v}_a = \bar{v}_B; \bar{v}_e = \bar{v}_A; \bar{v}_r = \bar{v}_{BA}$ , 大小 $\omega \cdot AB$ , 方向 $\perp AB$ ,

指向与 $\omega$  转向一致.

根据速度合成定理  $\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r$ , 则  $B$  点速度为:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$$

即平面图形上任一点的速度等于基点的速度与该点随图形绕基点转动的速度的矢量和。这种求解速度的方法称为**基点法**，也称为**合成法**。它是求解平面图形内一点速度的基本方法。

## 二. 速度投影法

由于A, B点是任意的，因此  $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$  表示了图形上任意两点速度间的关系。由于恒有  $\bar{v}_{BA} \perp AB$ ，因此将上式在AB上投影，有

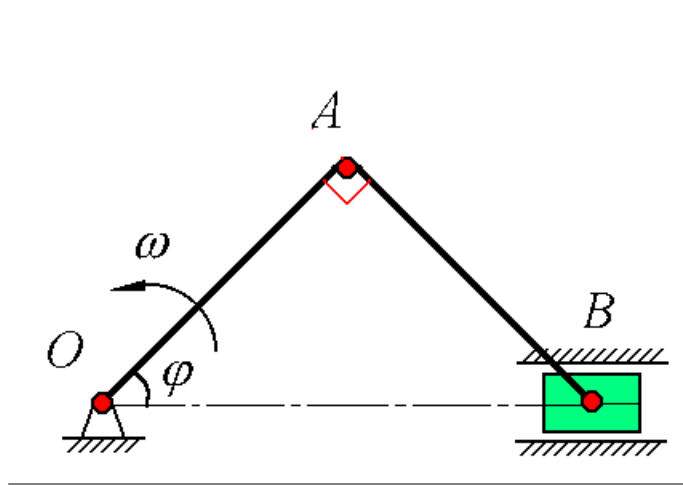
$$\boxed{[\bar{v}_B]_{AB} = [\bar{v}_A]_{AB}} \quad \text{—速度投影定理}$$

即 平面图形上任意两点的速度在该两点连线上的投影彼此相等。这种求解速度的方法称为 **速度投影法**。

**例1.** 曲柄连杆机构  $OA=AB=l$ ，取柄  $OA$  以匀  $\omega$  转动。求：  
当  $\varphi=45^\circ$  时，滑块  $B$  的速度及  $AB$  杆的角速度。

a. 基点法

b. 速度投影法





解：机构中,  $OA$  作定轴转动,  $AB$  作平面运动, 滑块  $B$  作平动。

## ★ 基点法（合成法）

研究  $AB$ , 以  $A$  为基点,  
且  $v_A = l\omega$ , 方向如图所示。

根据  $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$ ,

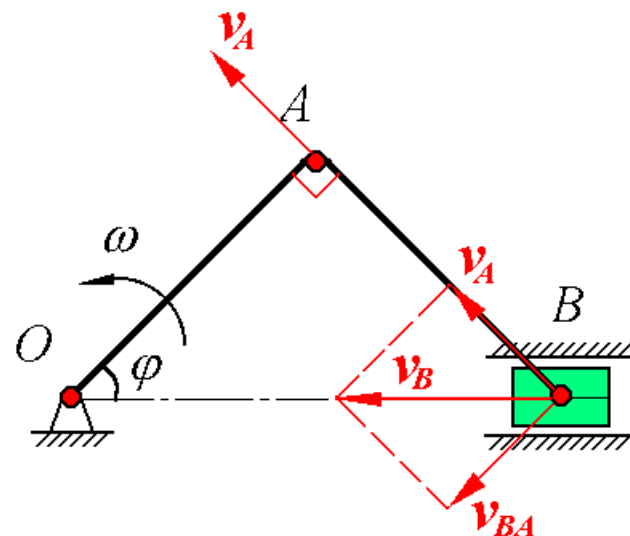
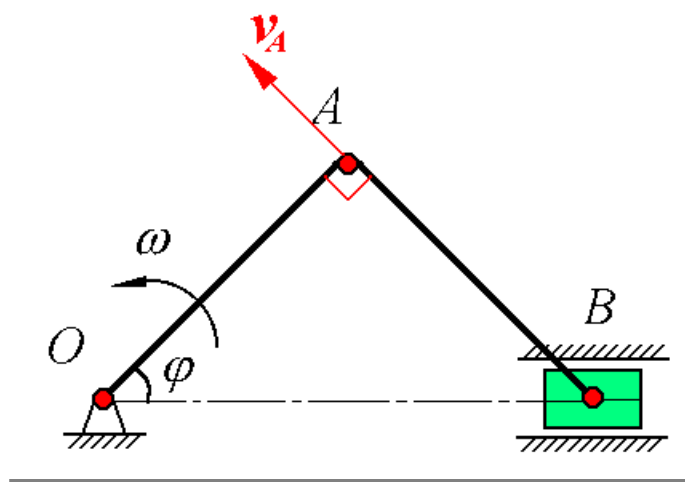
在  $B$  点做速度平行四边形, 如图示。

$$v_B = v_A / \cos\varphi$$

$$= l\omega / \cos 45^\circ = \sqrt{2}l\omega (\leftarrow)$$

$$v_{BA} = v_A \tan\varphi = l\omega \cdot \tan 45^\circ = l\omega$$

$$\therefore \omega_{AB} = v_{BA} / AB = l\omega / l = \omega \quad (\curvearrowright)$$



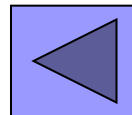
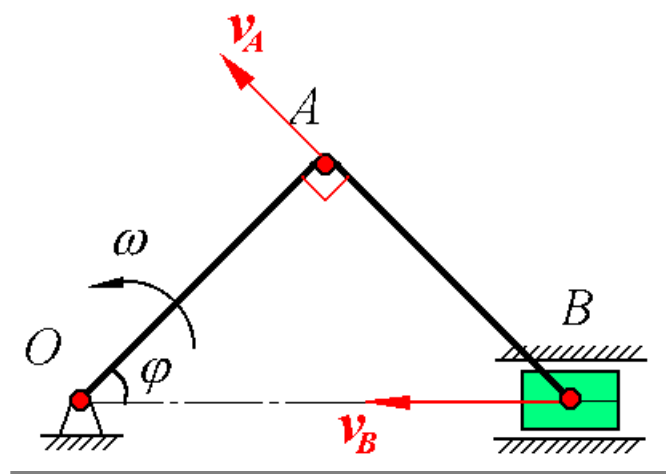
★速度投影法 研究AB,  $v_A = l\omega$ ,  
方向 $\perp OA$ ,  $\bar{v}_B$ 方向沿BO直线

根据速度投影定理  $[\bar{v}_B]_{AB} = [\bar{v}_A]_{AB}$

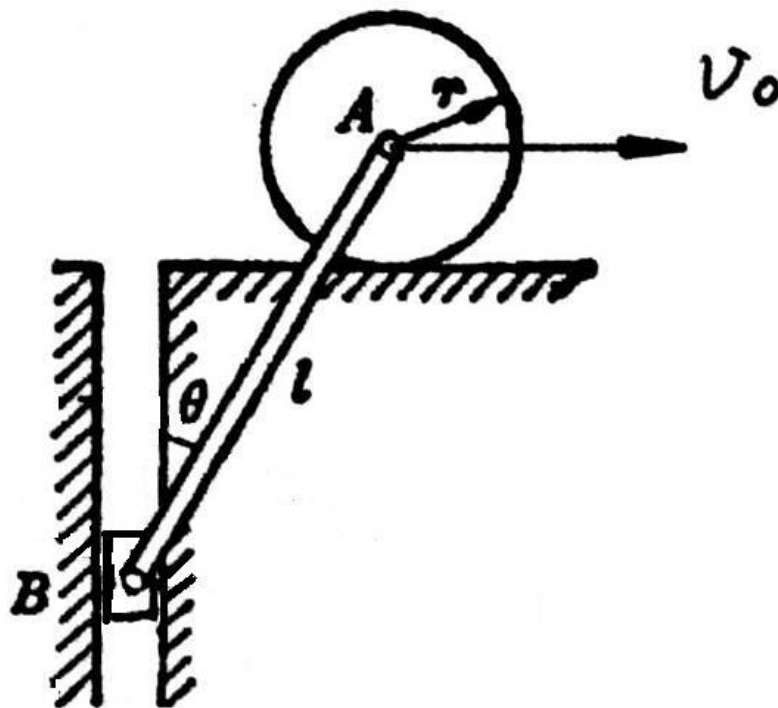
$$v_A = v_B \cos \varphi$$

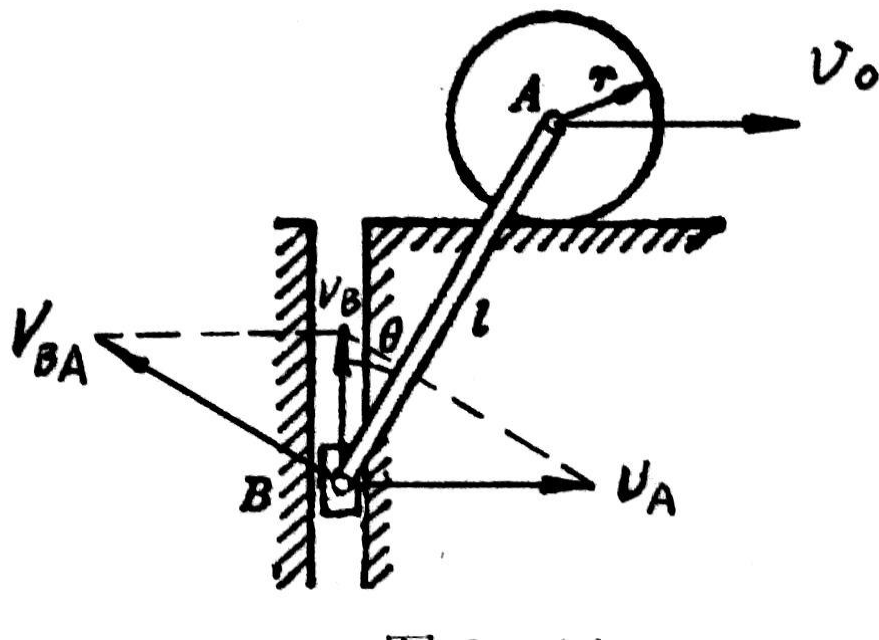
$$\therefore v_B = v_A / \cos \varphi$$

$$= l\omega / \cos 45^\circ = \sqrt{2}l\omega (\leftarrow) \text{ 不能求出 } \omega_{AB}$$



**课堂练习.** 滚子A沿水平面作纯滚动，通过连杆AB带动滑块B沿铅垂轴向上滑动。设连杆长 $l = 0.8\text{m}$ ，轮心速度 $v_0 = 3\text{m/s}$ 。求当A B与铅垂线成 $\theta = 30^\circ$ 时，滑块B的速度及连杆的角速度。





解：1.基点法

取A为基点，B点的速度

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}$$

$$v_B = v_A \tan 30^\circ = \sqrt{3} \quad (\text{m/s})$$

$$v_{BA} = 2\sqrt{3} \quad (\text{m/s})$$

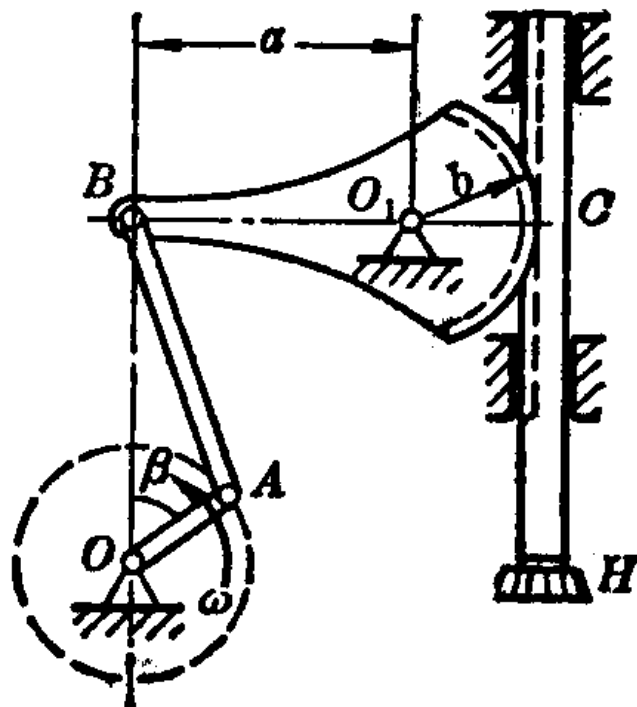
$$\omega_{AB} = \frac{v_{BA}}{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{0.8} = \frac{5}{2}\sqrt{3} \quad (\text{rad/s})$$

2.速度投影法  $[\bar{v}_B]_{AB} = [\bar{v}_A]_{AB}$

$$v_B \cos 30^\circ = v_A \cos 60^\circ \quad v_B = \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} v_A = \sqrt{3} \quad (\text{m/s})$$

## 课堂练习

二、插齿机传动机构如图所示。曲柄 $OA$ 通过连杆 $AB$ 带动摆杆 $BC$ 绕轴 $O_1$ 摆动，与摆杆连成一体扇齿轮带动齿条使插刀 $H$ 上下运动。设曲柄 $OA$ 长为 $r$ ，其角速度为 $\omega$ 。求在图示位置时插刀的速度。



答案: 
$$v_M = \frac{br\omega \sin(\alpha + \beta)}{a \cos \alpha}$$

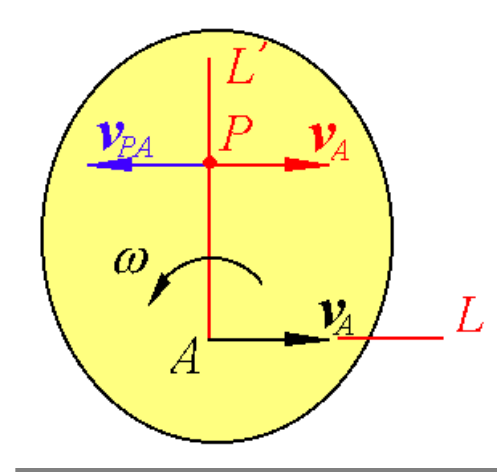
### 三. 瞬时速度中心法 (速度瞬心法)

#### 1. 问题的提出

若选取速度为零的点作为基点, 求解速度问题的计算会大大简化. 于是, 自然会提出, 在某一瞬时图形是否有一点速度等于零? 如果存在的话, 该点如何确定?

#### 2. 速度瞬心的概念

平面图形 $S$ , 某瞬时其上一点 $A$ 速度 $\bar{v}_A$ , 图形角速度 $\omega$ , 沿 $\bar{v}_A$ 方向取半直线 $AL$ , 然后顺 $\omega$ 的转向转 $90^\circ$ 至 $AL'$ 的位置, 在 $AL'$ 上取长度  $AP = v_A / \omega$  则:  $\bar{v}_P = \bar{v}_A + \bar{v}_{PA}$



$v_{PA} = AP \cdot \omega = v_A$ , 方向 $\perp PA$ , 恰与 $\bar{v}_A$ 反向. 所以

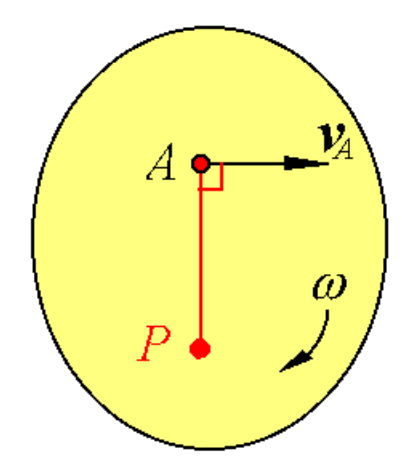
$$v_P = 0$$

即在某一瞬时必唯一存在一点速度等于零，该点称为平面图形在该瞬时的瞬时速度中心，简称速度瞬心。

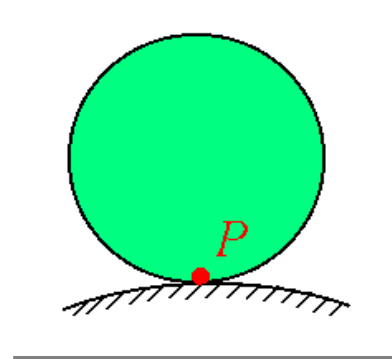
### 3. 几种确定速度瞬心位置的方法

- ① 已知图形上一点的速度  $\vec{v}_A$  和图形角速度  $\omega$ ，  
可以确定速度瞬心的位置。 ( $P$ 点)

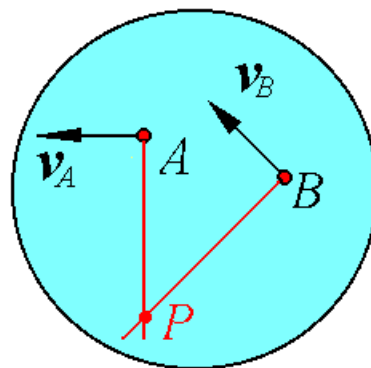
$AP = \frac{v_A}{\omega}$ ， $AP \perp \vec{v}_A$ ，且  $P$  在  $\vec{v}_A$  顺  $\omega$  转向绕  $A$  点  
转  $90^\circ$  的方向一侧。



- ② 已知一平面图形在固定面上作无滑动的滚动，则图形与固定面的接触点  $P$  为速度瞬心。



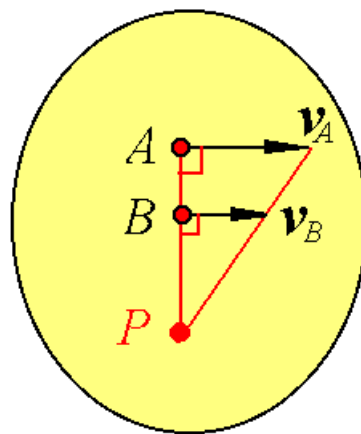
- ③ 已知某瞬间平面图形上 $A, B$ 两点速度  $\bar{v}_A, \bar{v}_B$  的方向, 且  $\bar{v}_A$  不平行  $\bar{v}_B$   
过 $A, B$ 两点分别作速度  $\bar{v}_A, \bar{v}_B$  的垂线, 交点  $P$  即为该瞬间的速度瞬心.



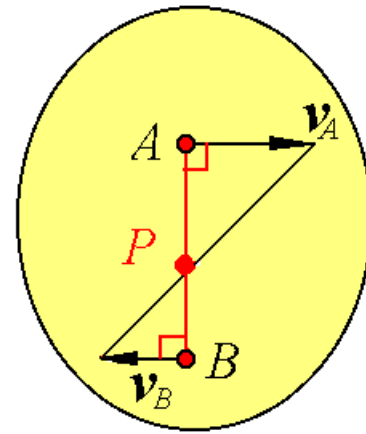
- ④ 已知某瞬时图形上 $A, B$ 两点速度  $\bar{v}_A, \bar{v}_B$  大小, 且  $\bar{v}_A \perp AB, \bar{v}_B \perp AB$

(a)  $\bar{v}_A$  与  $\bar{v}_B$  同向,  $\omega = \frac{|v_A - v_B|}{AB}$

(b)  $\bar{v}_A$  与  $\bar{v}_B$  反向,  $\omega = \frac{v_A + v_B}{AB}$



(a)



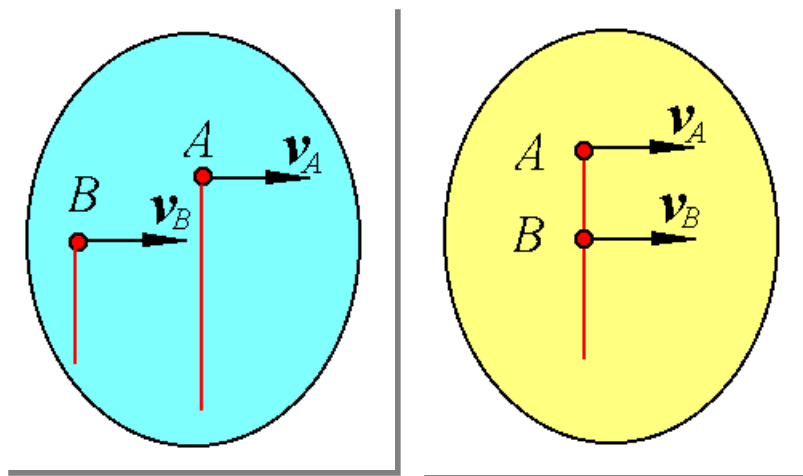
(b)



⑤ 已知某瞬时图形上 $A, B$ 两点的速度方向相同，且不与 $AB$ 连线垂直。

此时，图形的瞬心在无穷远处，图形的角速度 $\omega = 0$ ，图形上各点速度相等，这种情况称为**瞬时平动**。(此时各点的加速度不相等)

另：对✳种(a)的情况，若 $v_A = v_B$ ，  
则是瞬时平动。



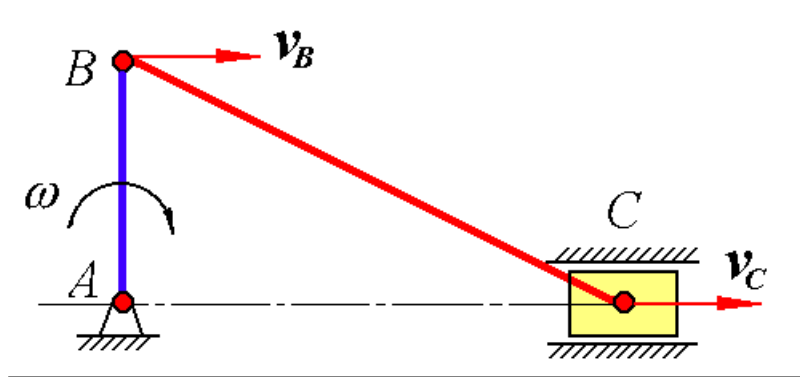
**注意：** 瞬时平动与平动不同

**瞬时平动**构件上各点的速度都相等，但各点的加速度并不相等。

例如：曲柄连杆机构在图示位置时，连杆 $BC$ 作瞬时平动。

此时连杆 $BC$ 的图形角速度  $\omega_{BC}=0$  ，

$BC$ 杆上各点的速度都相等，但各点的加速度并不相等。



设匀 $\omega$ ，则  $a_B = a_B^n = AB \cdot \omega^2 (\downarrow)$

而  $\bar{a}_c$  的方向沿AC的,  $\bar{a}_B \neq \bar{a}_c$  。 瞬时平动与平动不同

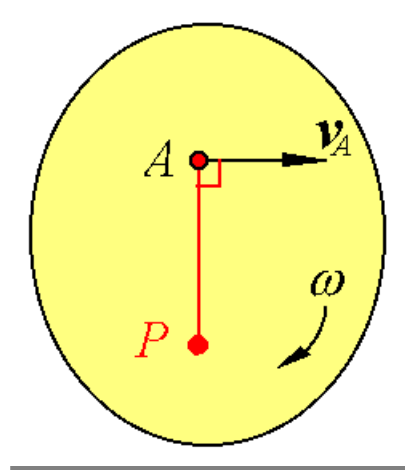
## 4. 速度瞬心法

利用速度瞬心求解平面图形上点的速度的方法,称为速度瞬心法.

平面图形在任一瞬时的运动可以视为绕速度瞬心的瞬时转动, 速度瞬心又称为平面图形的瞬时转动中心。

若 $P$ 点为速度瞬心, 则任意一点 $A$ 的速度

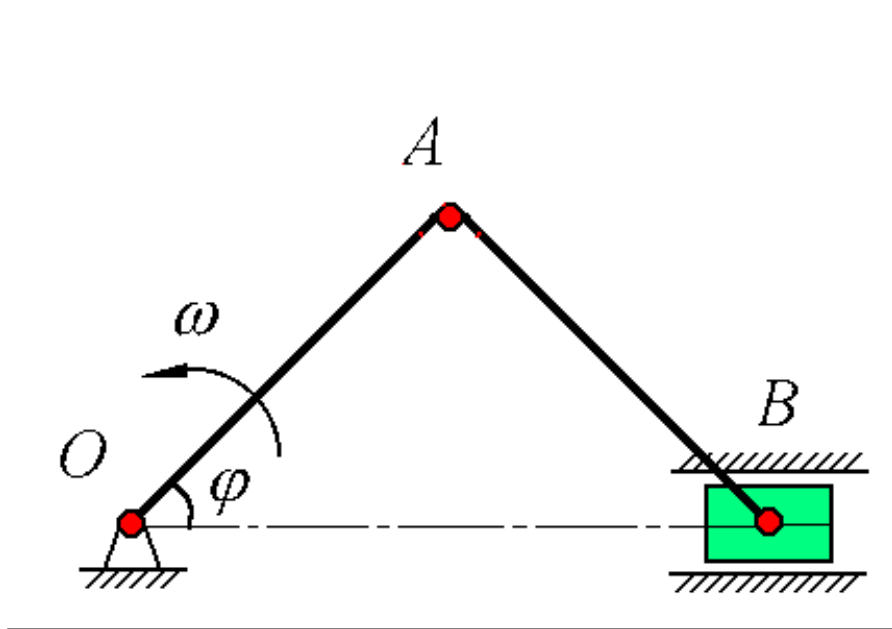
$$\mathbf{v}_A = \mathbf{AP} \cdot \omega \quad \text{方向} \perp \mathbf{AP}, \quad \text{指向与} \omega \text{ 一致。}$$



## 5. 注意的问题

- ★速度瞬心在平面图形上的位置不是固定的，而是随时间不断变化的。在任一瞬时是唯一存在的。
- ★速度瞬心处的速度为零，加速度不一定为零。不同于定轴转动
- ★刚体作瞬时平动时，虽然各点的速度相同，但各点的加速度是不一定相同的。不同于刚体作平动。

**例2.** 曲柄连杆机构  $OA=AB=l$ ，取柄  $OA$  以匀  $\omega$  转动。用瞬心法求：当  $\varphi=45^\circ$ ； $0^\circ$ ； $90^\circ$  时，滑块  $B$  的速度及  $AB$  杆的角速度。



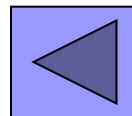
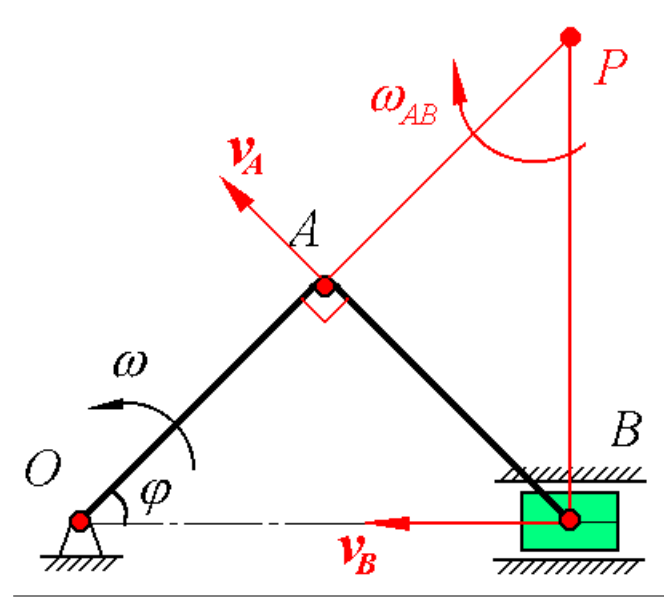
$\varphi = 45^\circ$  时

研究  $AB$ ，已知  $\vec{v}_A, \vec{v}_B$  的方向，因此可确定出  $P$  点为速度瞬心

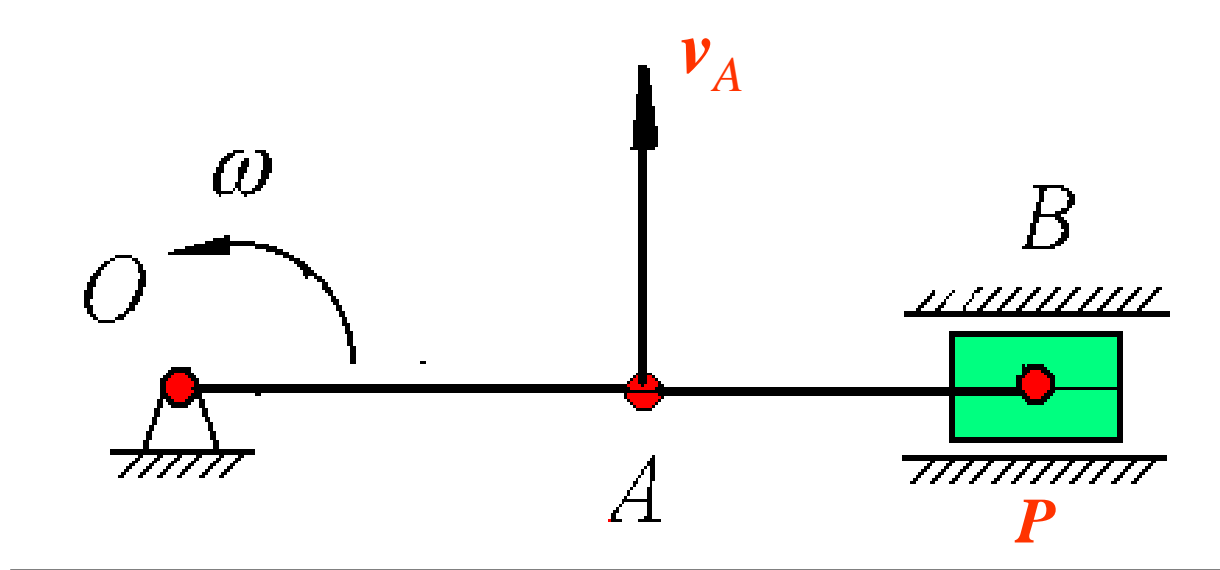
$$\because v_A = l\omega, AP = l$$

$$\therefore \omega_{AB} = v_A / AP = l\omega / l = \omega \quad (\curvearrowright)$$

$$v_B = BP \cdot \omega_{AB} = \sqrt{2}l\omega (\leftarrow)$$



$\varphi = 0$  时

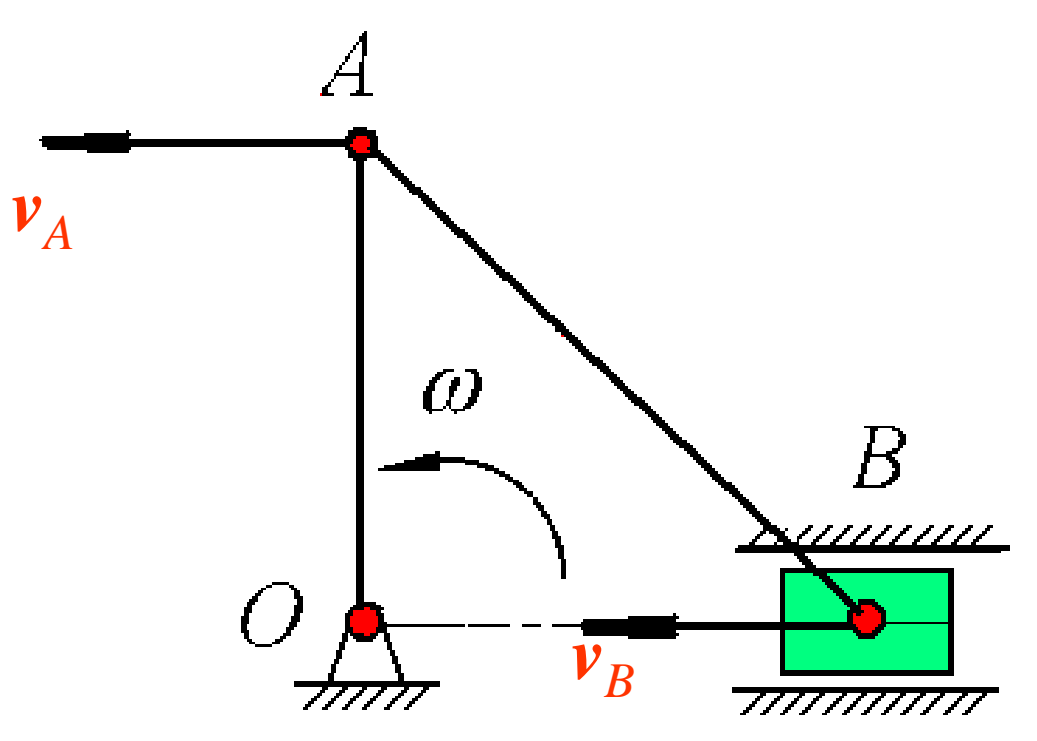


$$\because v_A = l\omega, AP = AB = l$$

$$\therefore \omega_{AB} = v_A / AP = l\omega / l = \omega \quad (\curvearrowright)$$

$$v_B = 0$$

$\varphi = 90^\circ$  时



$$v_A = l\omega, v_B = v_A = l\omega$$

$$\omega_{AB} = 0$$

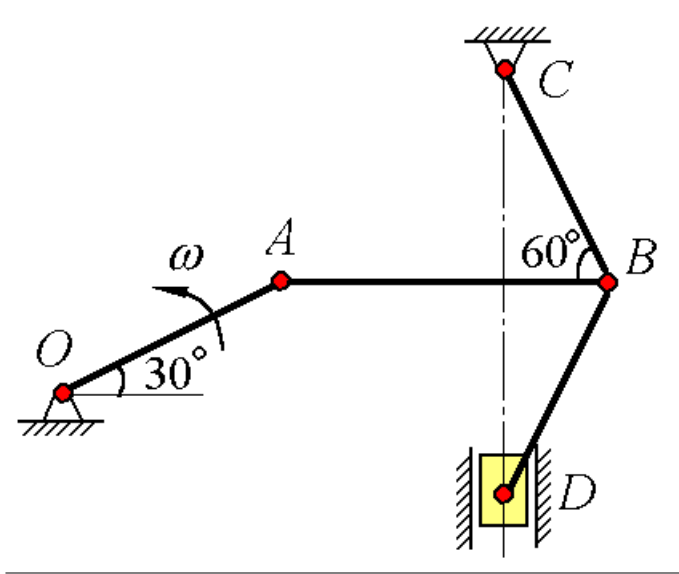


### 例3 曲柄肘杆压床机构

已知：  $OA=0.15\text{m}$  ,  $n=300\text{ rpm}$  ,  $AB=0.76\text{m}$  ,

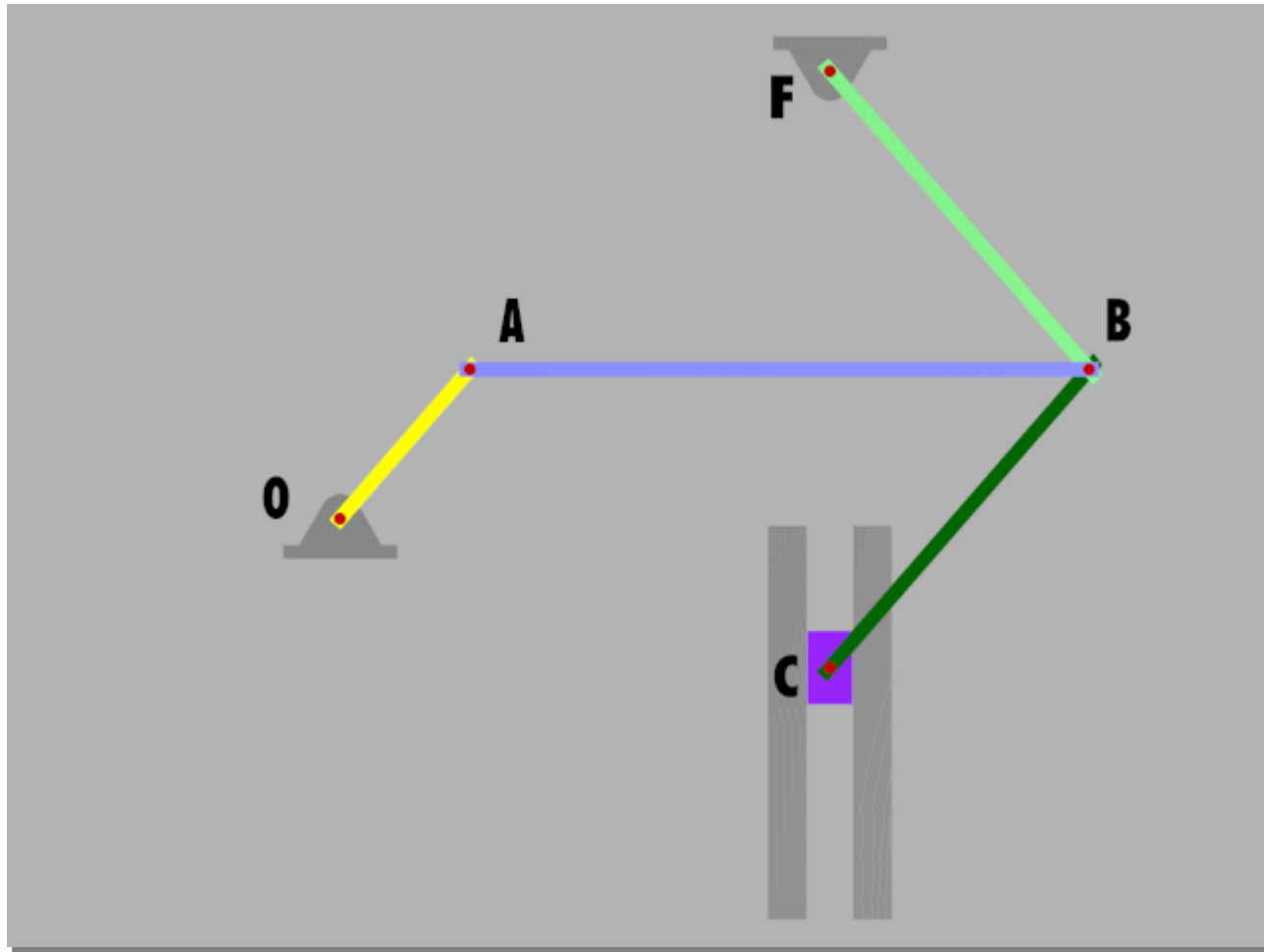
$BC=BD=0.53\text{m}$ . 图示位置时,  $AB$  水平

求该位置时的  $\omega_{BD}$   $\omega_{AB}$  及  $\bar{v}_D$



翻页请看动画

请看动画



## 例3 曲柄肘杆压床机构

已知:  $OA=0.15\text{m}$ ,  $n=300\text{ rpm}$ ,  $AB=0.76\text{m}$ ,  
 $BC=BD=0.53\text{m}$ . 图示位置时,  $AB$  水平.  
 求该位置时的  $\omega_{BD}$ ,  $\omega_{AB}$  及  $\bar{v}_D$

解:  $OA, BC$  作定轴转动,  
 $AB, BD$  均作平面运动

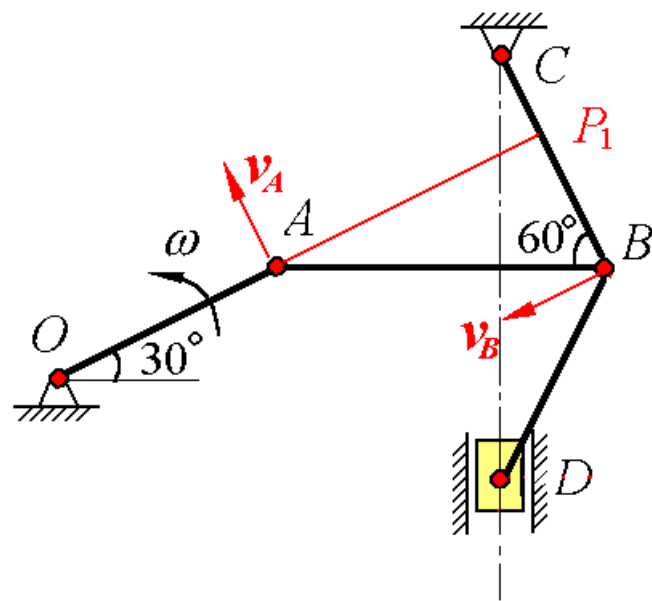
根据题意:  $\omega = \frac{n\pi}{30} = \frac{300\pi}{30} = 10\pi \text{ rad/s}$

研究  $AB$ ,  $P_1$  为其速度瞬心

$$v_A = OA \cdot \omega = 0.15 \times 10\pi = 1.5\pi \text{ m/s}$$

$$\therefore \omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_1} = \frac{1.5\pi}{AB \sin 60^\circ} = \frac{1.5\pi \times 2}{0.76 \times \sqrt{3}} = 7.16 \text{ rad/s} \quad (\curvearrowright)$$

$$v_B = BP_1 \cdot \omega_{AB} = AB \cos 60^\circ \times 7.16 = 0.76 \times 0.5 \times 7.16 = 2.72 \text{ m/s}$$

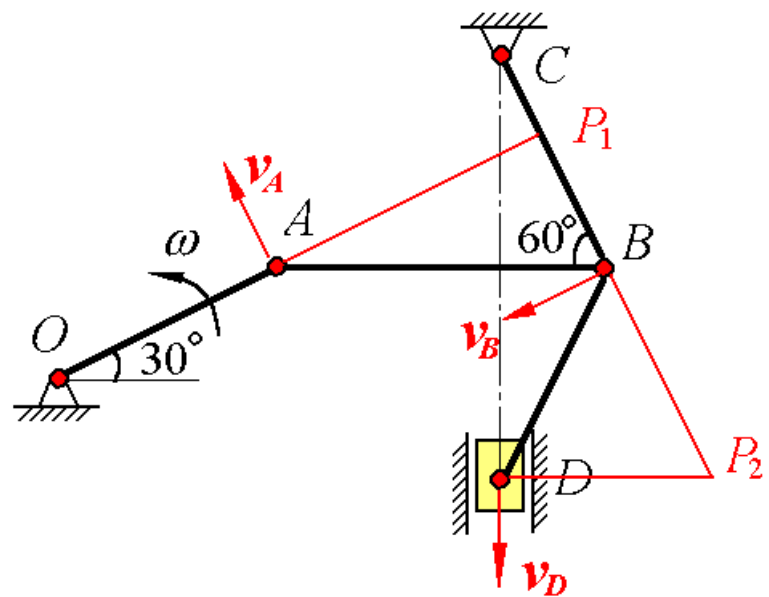


$$v_B = BP_1 \cdot \omega_{AB} = 2.72 \text{ m/s}$$

研究BD,  $P_2$ 为其速度瞬心,

$\triangle BDP_2$ 为等边三角形

$$DP_2 = BP_2 = BD$$

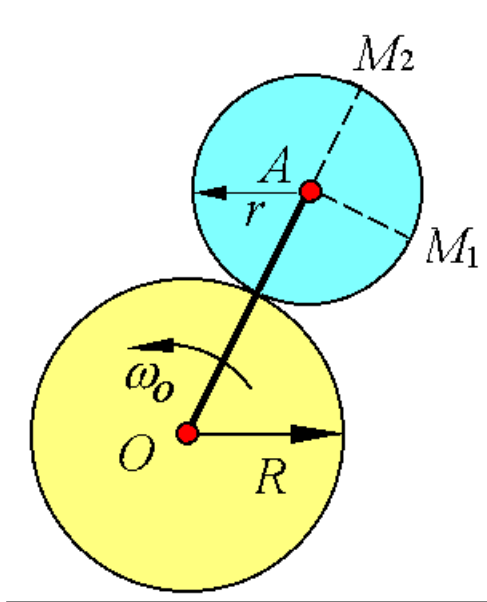


$$\therefore \omega_{BD} = \frac{v_B}{BP_2} = \frac{2.73}{0.53} = 5.13 \text{ rad/s} \quad (\curvearrowright)$$

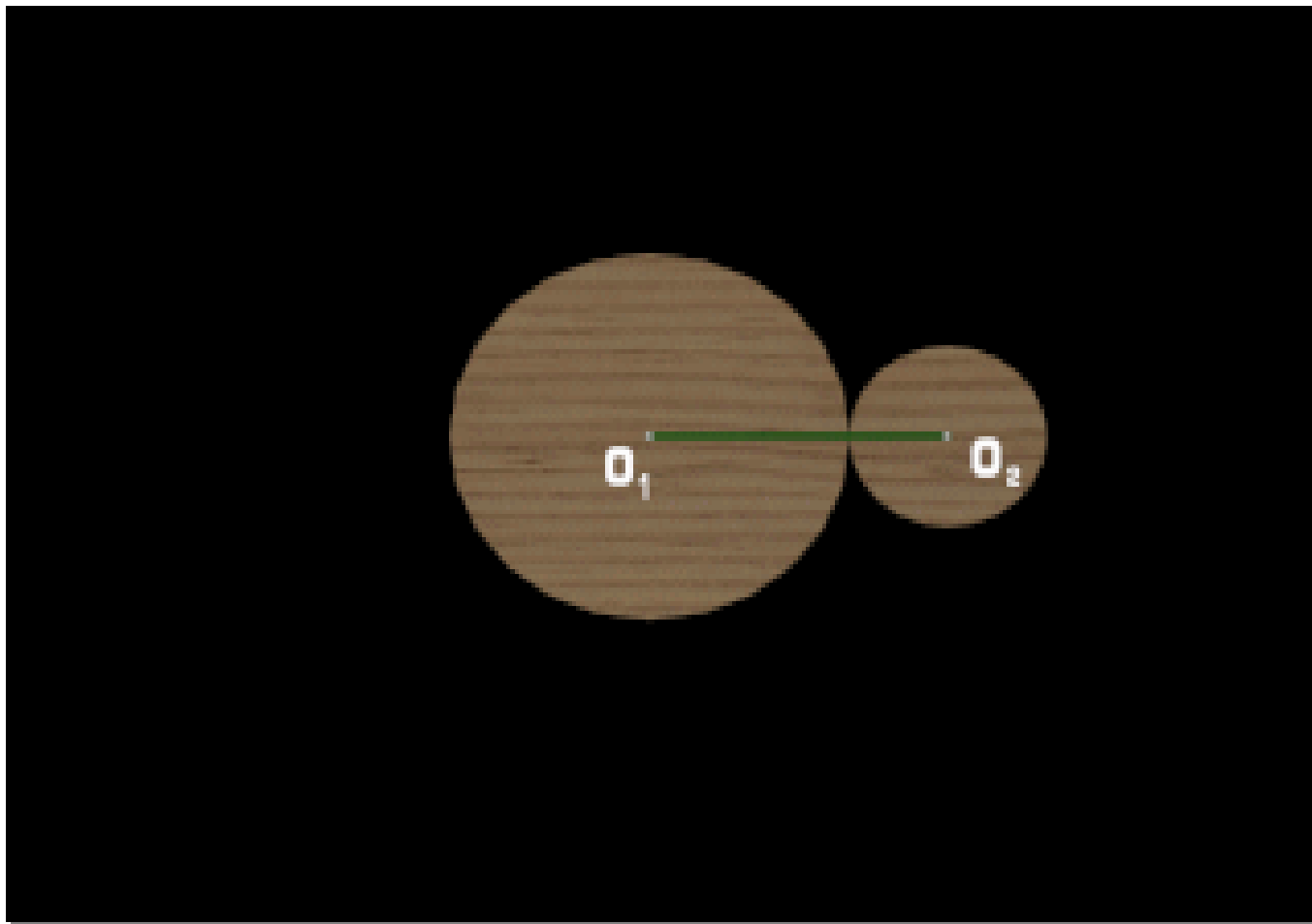
$$v_D = DP_2 \cdot \omega_{BD} = 0.53 \times 5.13 = 2.72 \text{ m/s} \quad (\downarrow)$$

# 例4 行星齿轮机构

已知:  $R, r, \omega_o$ 。轮A作纯滚动, 求  $\bar{v}_{M_1}, \bar{v}_{M_2}$



## 例4 行星齿轮机构



请看动画

## 例4 行星齿轮机构

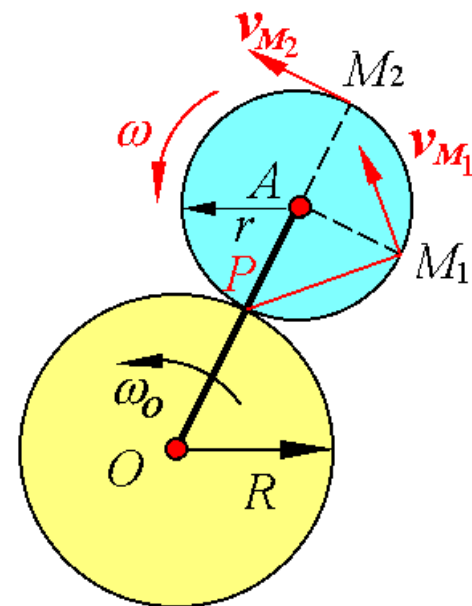
已知:  $R, r, \omega_o$ . 轮A作纯滚动, 求  $\bar{v}_{M_1}, \bar{v}_{M_2}$

解:  $OA$ 定轴转动; 轮A作平面运动, 瞬心 $P$ 点

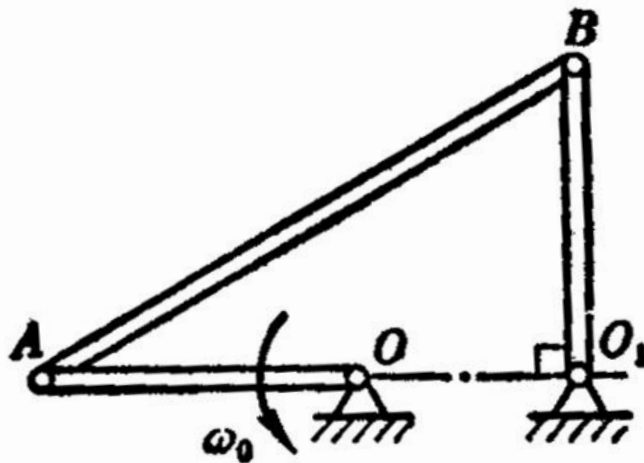
$$v_A = (R+r)\omega_o = r\omega \quad \therefore \omega = \frac{R+r}{r}\omega_o \quad (\curvearrowright)$$

$$v_{M_1} = PM_1 \cdot \omega = \sqrt{2}r \cdot \frac{R+r}{r}\omega_o = \sqrt{2}(R+r)\omega_o,$$

$$v_{M_2} = PM_2 \cdot \omega = 2r \cdot \frac{R+r}{r}\omega_o = 2(R+r)\omega_o, \text{方向均如图示}$$



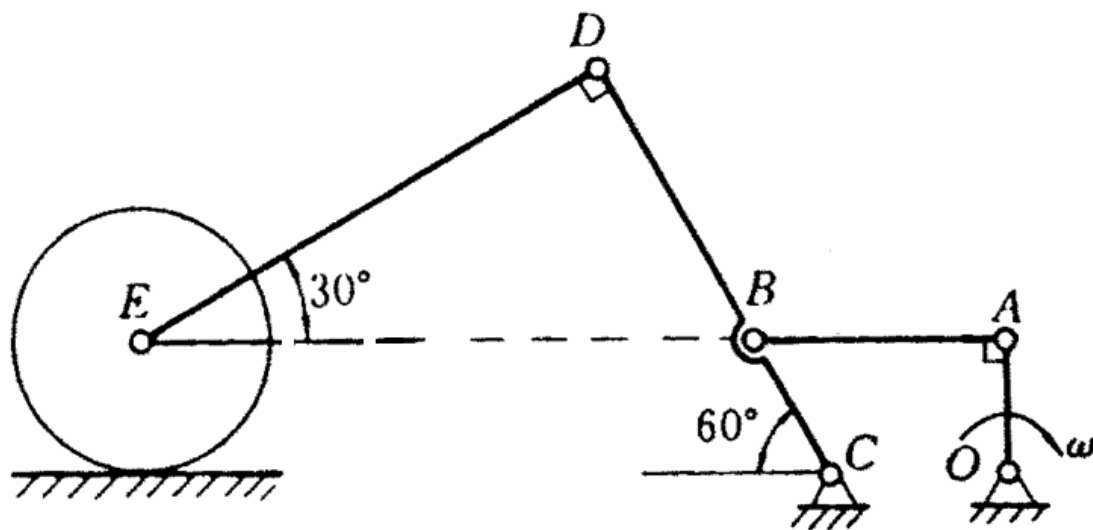
**课堂练习.** 在四连杆机构中，曲柄 $OA$ 的角速度 $\omega_0=3 \text{ rad/s}$ ，当它在图示水平位置时，曲柄 $O_1B$ 恰好在铅垂位置。求此时连杆 $AB$ 和 $O_1B$ 的角速度。设 $OA=O_1B=l$ ， $AB=2l$ 。

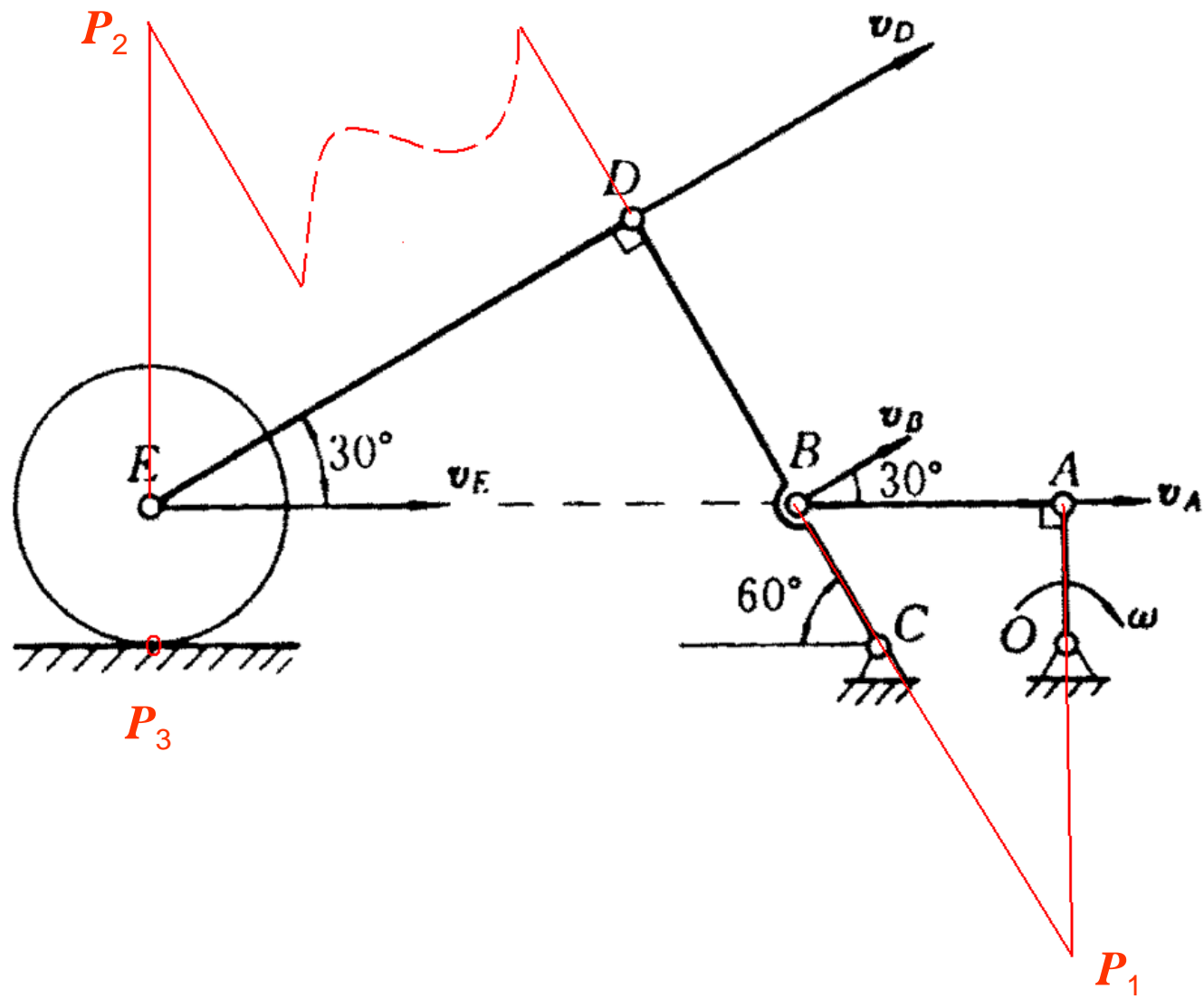


答案：  $\omega_{AB}=\omega_{O_1B}=1.73(\text{rad/s})$



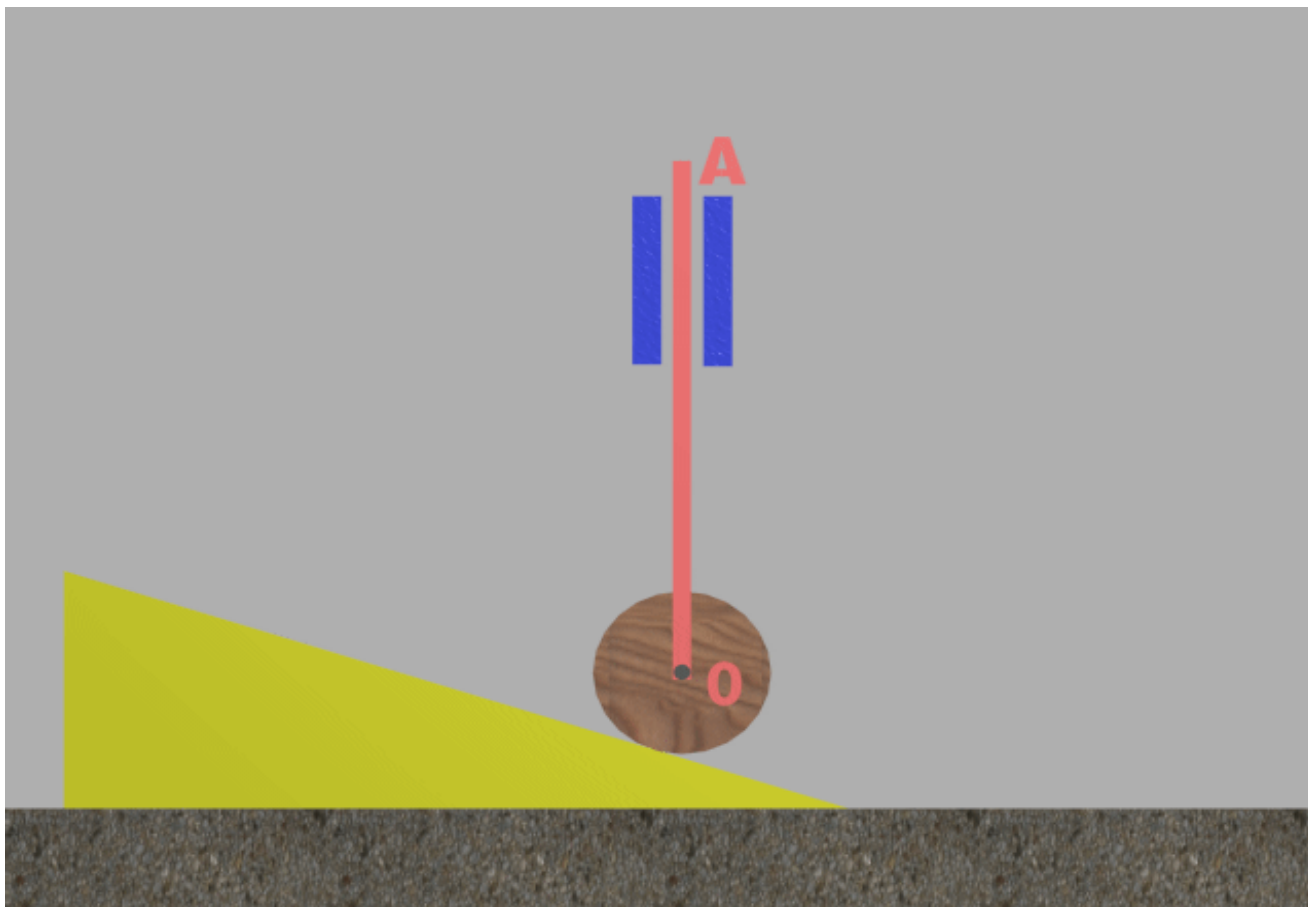
**课堂练习.** 平面机构如图所示，曲柄 $OA=100\text{mm}$ ，以匀角速度转动。连杆 $AB$ 带动摇杆 $CD$ ，并拖动轮 $E$ 沿水平面作纯滚动。已知 $CD=3CB$ ，图示位置 $A$ 、 $B$ 、 $E$ 三点在同一水平线上， $O$ 、 $C$ 和轮 $E$ 与地面接触点也在同一水平直线上。且 $CD \perp ED$ ，试求此瞬时 $E$ 点的速度及轮 $E$ 的角速度。





## 研究性学习

- 一、平面机构中, 楔块 $M$ :  $\alpha = 30^\circ$ ;  $v = 12\text{cm/s}$ ; 盘:  $r = 4\text{cm}$ , 与楔块间无滑动. 求圆盘的 $\omega$ 及轴 $O$ 的速度和 $B$ 点速度.



请看动画

解：轴 $O$ ，杆 $OC$ ，楔块 $M$ 均作平动，  
圆盘作平面运动， $P$ 为速度瞬心

$$v_A = v = 12 \text{ cm/s},$$

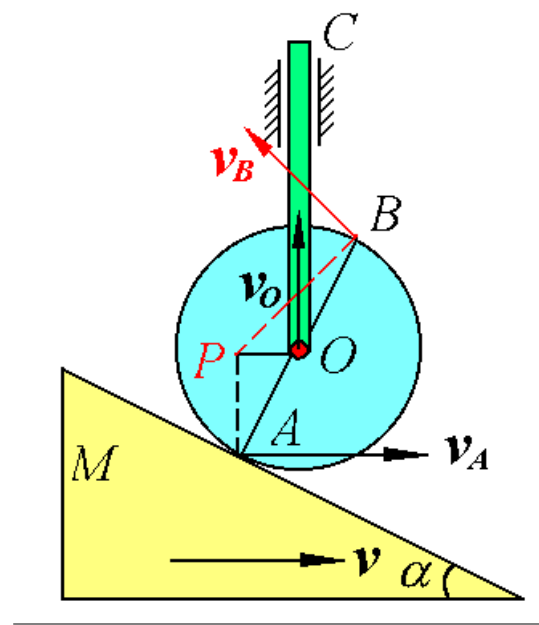
$$\omega = v_A / PA = 12 / r \cos \alpha = 12 / 4 \cos 30^\circ = 2\sqrt{3} \text{ rad/s}$$



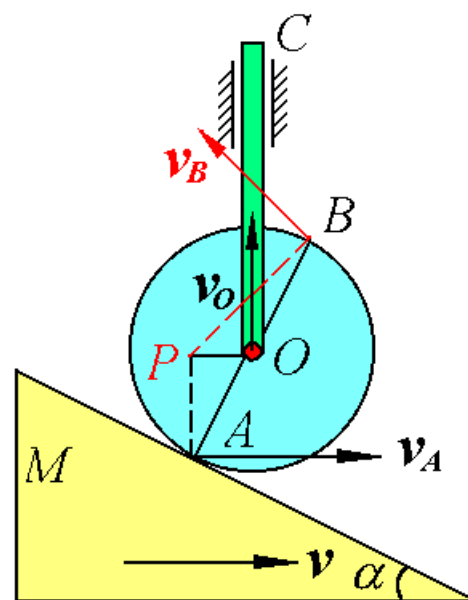
$$v_o = PO \cdot \omega = r \sin \alpha \cdot \omega = 4 \sin 30^\circ \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ m/s} (\uparrow)$$

$$PB = \sqrt{PO^2 + OB^2 - 2 \cdot PO \cdot OB \cos 120^\circ} = \sqrt{2^2 + 4^2 + 2 \times 2 \times 4 \times \frac{1}{2}} = 2\sqrt{7} \text{ m}$$

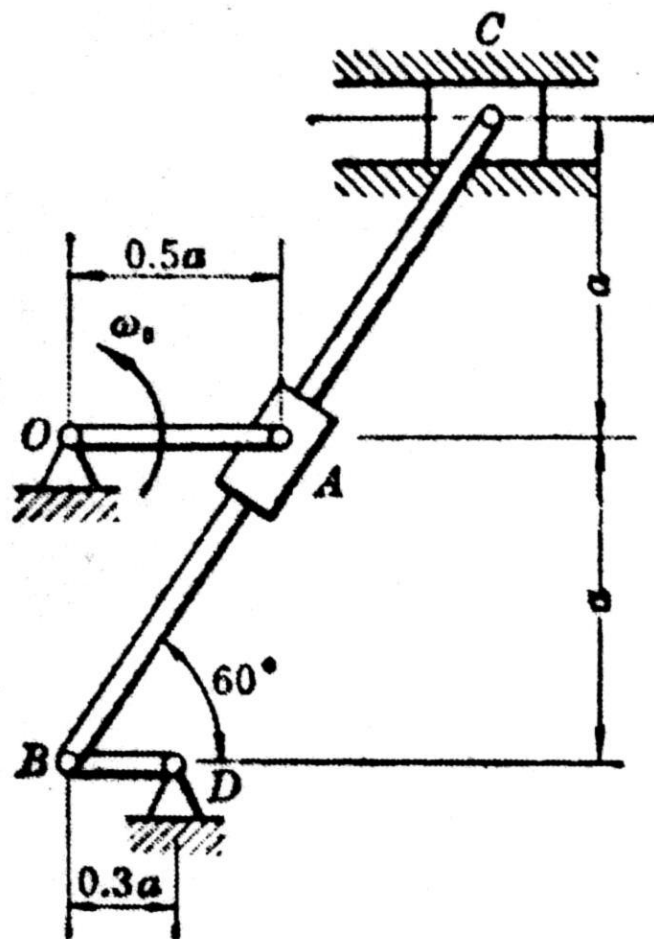
$$v_B = PB \cdot \omega = 2\sqrt{7} \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{21} \approx 18.3 \text{ m/s} \quad (\perp PB)$$



## 用点的合成运动法求解



二、一摆动导杆机构的尺寸和角度如图所示。已知角速度  $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$ ，求滑块  $C$  的速度  $v_C$ 。

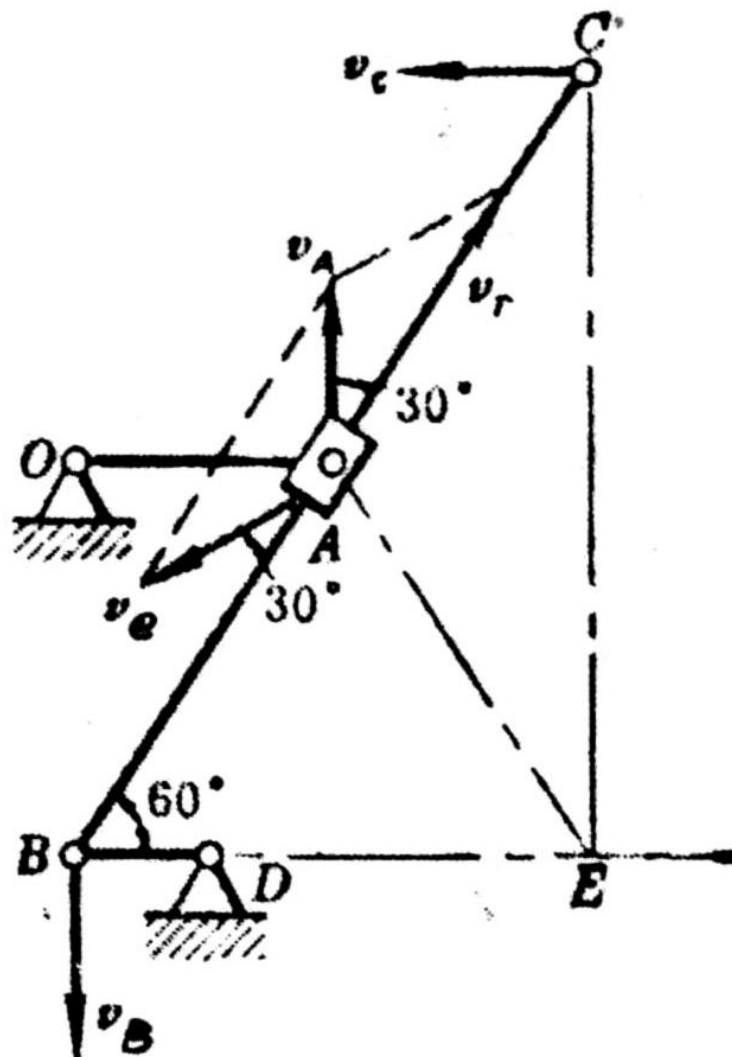
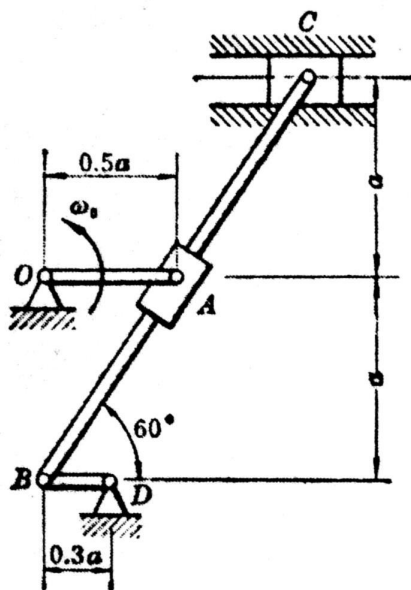


解：A点的速度为  $v_A = \omega \cdot OA = 0.5a$

取滑块为动点，摇杆为动参考系，则

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$$

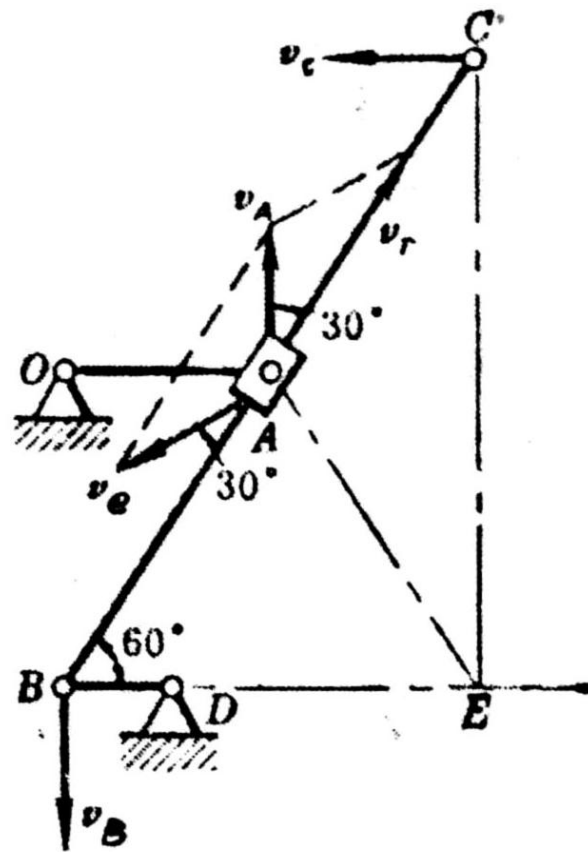
于是  $v_e = v_A$



摆杆瞬心为 $E$ 点  $\frac{v_C}{v_e} = \frac{CE}{AE}$

所以

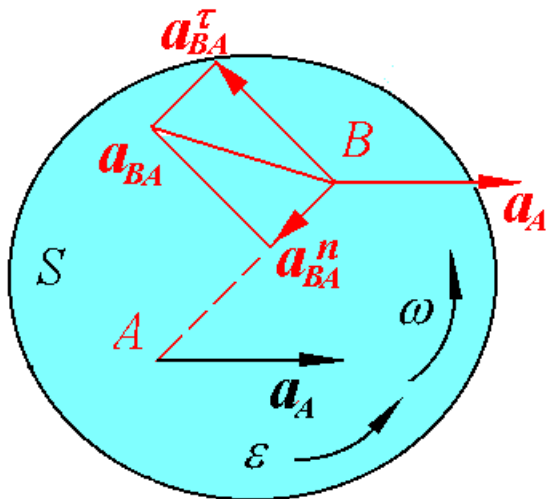
$$v_C = v_e \frac{CE}{AE} = v_A \cdot \frac{2a}{a \cos 30^\circ} = 0.5a \cdot 2 \cos 30^\circ = 0.866a$$





## § 5-3 平面图形内各点的加速度

### 一. 基点法 (合成法)



已知：图形  $S$  内一点  $A$  的加速度  $\vec{a}_A$  和图形的  $\omega, \varepsilon$  (某一瞬时)。

求：该瞬时图形上任一点  $B$  的加速度。

取  $A$  为基点，将平动坐标系固结于  $A$  点  
取  $B$  动点，则  $B$  点的运动分解为相对运动为圆周运动和牵连运动为平动。

$$\vec{a}_a = \vec{a}_B ; \vec{a}_e = \vec{a}_A ; \vec{a}_r = \vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^n$$

于是,由牵连平动时加速度合成定理  $\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r$  可得如下公式.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^n$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^n$$

其中： $a_{BA}^{\tau} = AB \cdot \varepsilon$ ，方向 $\perp AB$ ，指向与 $\varepsilon$ 一致；  
 $a_{BA}^n = AB \cdot \omega^2$ ，方向沿 $AB$ ，指向 $A$ 点。

即平面图形内任一点的加速度等于基点的加速度与该点随图形绕基点转动的切向加速度和法向加速度的矢量和。这种求解加速度的方法称为基点法，也称为合成法。是求解平面图形内一点加速度的基本方法。

上述公式是一平面矢量方程。需知其中六个要素，方能求出其余两个。由于  $\bar{a}_{BA}^{\tau}, \bar{a}_{BA}^n$  方位总是已知，所以在使用该公式中，只要再知道四个要素，即可解出问题的待求量。

## 二. 加速度瞬心.

由于 $\bar{a}_{BA}^{\tau}$ ,  $\bar{a}_{BA}^n$ 的大小和方向随 $B$ 点的不同而不同, 所以总可以在图形内找到一点 $Q$ , 在此瞬时, 相对加速度  $\bar{a}_{QA}$  大小恰与基点 $A$ 的加速度  $\bar{a}_A$  等值反向, 其绝对加速度  $a_Q = 0$   
 $Q$ 点就称为图形在该瞬时的**加速度瞬心**.

[注] **a.**一般情况下, 加速度瞬心与速度瞬心不是同一个点.

**b.**一般情况下, 对于加速度没有类似于速度投影定理的关系式. 即一般情况下, 图形上任意两点 $A, B$ 的加速度

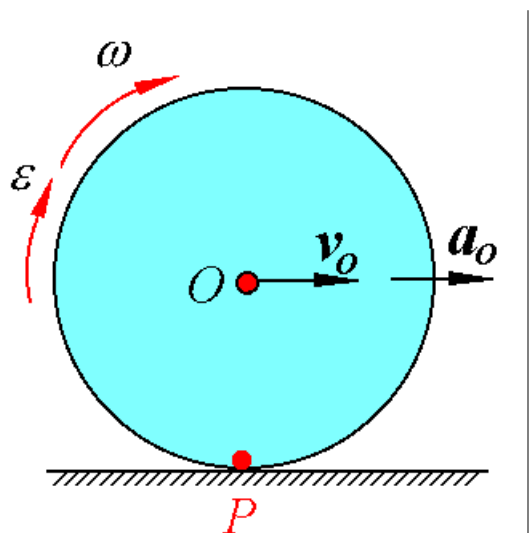
$$[\bar{a}_A]_{AB} \neq [\bar{a}_B]_{AB}$$

若某瞬时图形 $\omega = 0$ , 即瞬时平动, 则有  $[\bar{a}_A]_{AB} = [\bar{a}_B]_{AB}$

即若平面图形在运动过程中某瞬时的角速度等于零, 则该瞬时图形上任意两点的加速度在这两点连线上的投影相等.

**C.** 由于加速度瞬心的位置不象速度瞬心那样容易确定，且一般情况下又不存在类似于速度投影定理的关系式，故常采用基点法求图形上各点的加速度或图形角加速度。

**例4** 半径为 $R$ 的车轮沿直线作纯滚动，已知轮心 $O$ 点的速度  $\bar{v}_O$  及加速度  $\bar{a}_O$ ，求车轮与轨道接触点 $P$ 的加速度。



分析:  $\bar{a}_P = \bar{a}_O + \bar{a}_{PO}^{\tau} + \bar{a}_{PO}^n$

大小 ?  $\sqrt{R^2 \varepsilon^2 + R^2 \omega^2}$

方向 ?  $\sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad}$

故应先求出  $\omega, \varepsilon$ 。

解: 轮 $O$ 作平面运动， $P$ 为速度瞬心，

$$\therefore \omega = v_O / R \quad (\curvearrowright)$$

由于此式在任何瞬时都成立，且 $O$ 点作直线运动，故而

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dv_O}{dt} = \frac{a_O}{R} \quad (\curvearrowright)$$

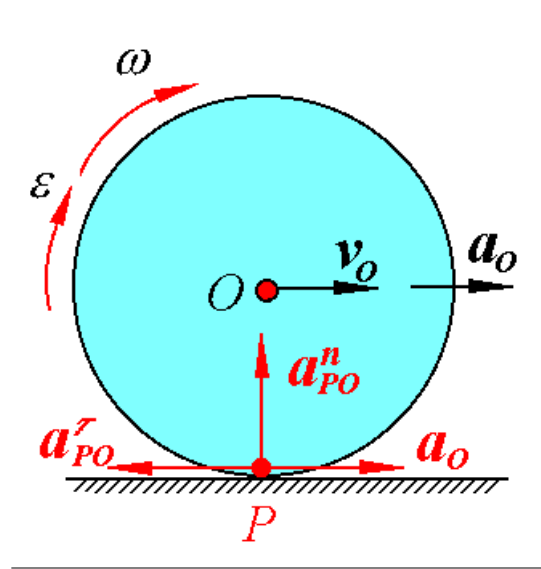
以 $O$ 为基点，有  $\bar{a}_P = \bar{a}_O + \bar{a}_{PO}^\tau + \bar{a}_{PO}^n$  其中：

$$a_{PO}^\tau = R \cdot \varepsilon = a_O, \quad a_{PO}^n = R\omega^2 = R \cdot \left(\frac{v_O}{R}\right)^2 = \frac{v_O^2}{R}$$

做出加速度矢量图，由图中看出：

$$\bar{a}_P = \bar{a}_{PO}^n \quad (\bar{a}_O \text{ 与 } \bar{a}_{PO}^\tau \text{ 等值反向})$$

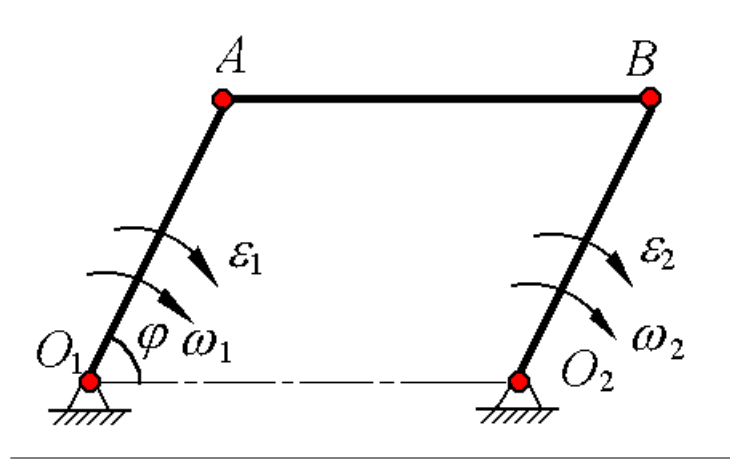
$$\text{即} \quad a_P = v_O^2 / R (\uparrow)$$



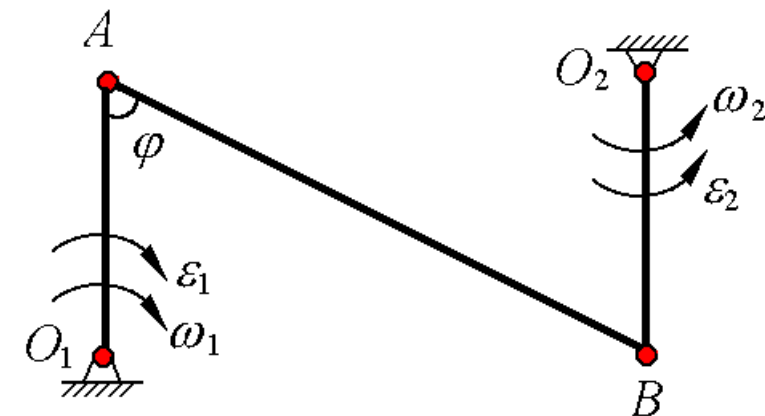
由此看出，速度瞬心 $P$ 的加速度并不等于零，即它不是加速度瞬心。当车轮沿固定的直线轨道作纯滚动时，其速度瞬心 $P$ 的加速度指向轮心。

例5 已知  $O_1A = O_2B$ , 图示瞬时  $O_1A \parallel O_2B$

试问(a),(b)两种情况下  $\omega_1$  和  $\omega_2$ ,  $\varepsilon_1$  和  $\varepsilon_2$  是否相等?



(a)



(b)

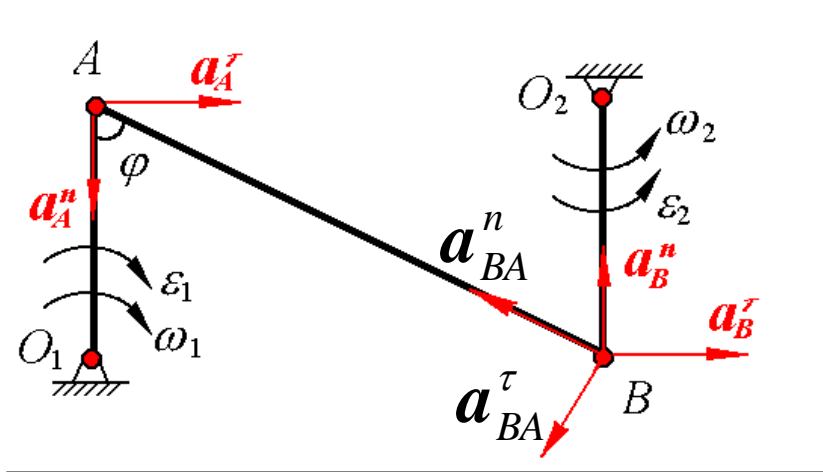
解: (a)  $AB$  作平动,  $\therefore \bar{v}_A = \bar{v}_B, \bar{a}_A = \bar{a}_B$  ( $\bar{a}_A^\tau = \bar{a}_B^\tau, \bar{a}_A^n = \bar{a}_B^n$ )

又  $\because \omega_1 = v_A / O_1A, \omega_2 = v_B / O_2B;$

$\varepsilon_1 = a_A^\tau / O_1A, \varepsilon_2 = a_B^\tau / O_2B;$

而  $O_1A = O_2B$

$$\therefore \omega_1 = \omega_2; \varepsilon_1 = \varepsilon_2.$$



(b)  $AB$ 作平面运动, 图示瞬时作瞬时平动, 此时  $\omega_{AB} = 0, \bar{v}_A = \bar{v}_B$

$$\because O_1A = O_2B, \omega_1 = v_A / O_1A, \omega_2 = v_B / O_2B, \therefore \omega_1 = \omega_2$$

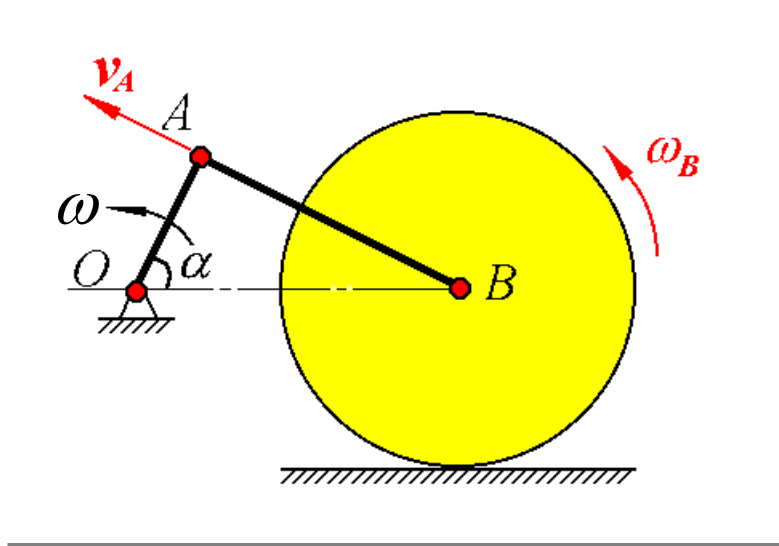
加速度

$$\mathbf{a}_B^\tau + \mathbf{a}_B^n = \mathbf{a}_A^\tau + \mathbf{a}_A^n + \mathbf{a}_{BA}^\tau + \mathbf{a}_{BA}^n$$

$$AB \text{轴投影: } O_1A \cdot \epsilon_1 \sin \varphi + O_1A \cdot \omega_1^2 \cos \varphi = O_2B \cdot \epsilon_2 \sin \varphi - O_2B \cdot \omega_2^2 \cos \varphi$$

$$\therefore \epsilon_2 = \epsilon_1 + 2\omega_1^2 \operatorname{ctg} \varphi \quad \text{即 } \epsilon_1 \neq \epsilon_2 \quad \text{并由此看出, } AB \text{作瞬时平动时 } \overline{a_A} \neq \overline{a_B}$$

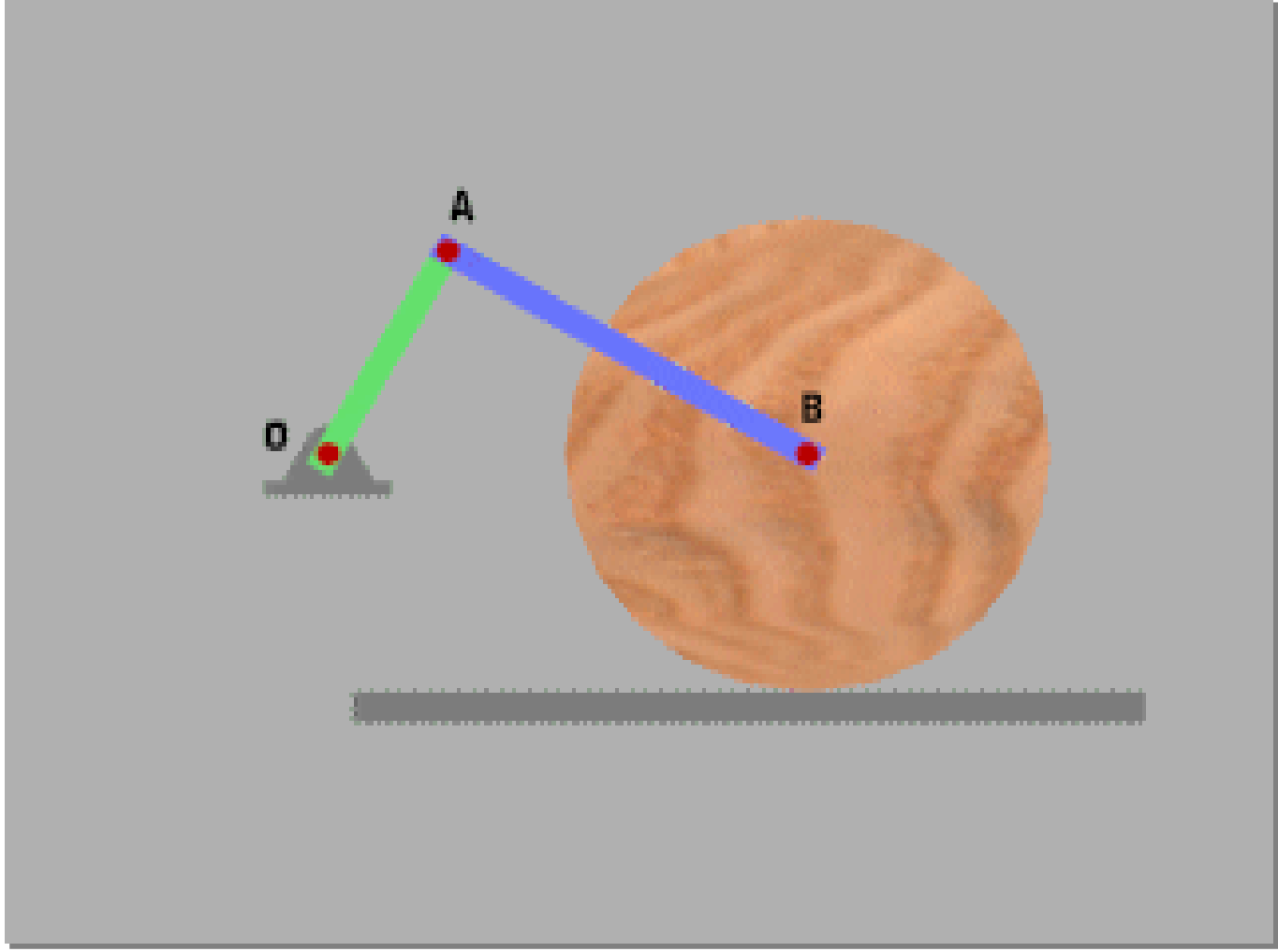
例6 曲柄滚轮机构，曲柄 $OA=15\text{cm}$ ， $n=60\text{ rpm}$ ，滚子半径 $R=15\text{cm}$ 。求：当 $\alpha=60^\circ$ 时 ( $OA\perp AB$ )，滚轮的 $\omega_B$ ， $\varepsilon_B$ 。



翻页请看动画



请看动画



分析: 要想求出滚轮的  $\omega_B, \varepsilon_B$  先要求出  $v_B, a_B$

解:  $OA$  定轴转动,  $AB$  杆和轮  $B$  作平面运动

研究  $AB$ :

$$\omega = n\pi/30 = 60\pi/30 = 2\pi \text{ rad/s}$$

$$v_A = OA \cdot \omega = 15 \times 2\pi = 30\pi \text{ cm/s}$$

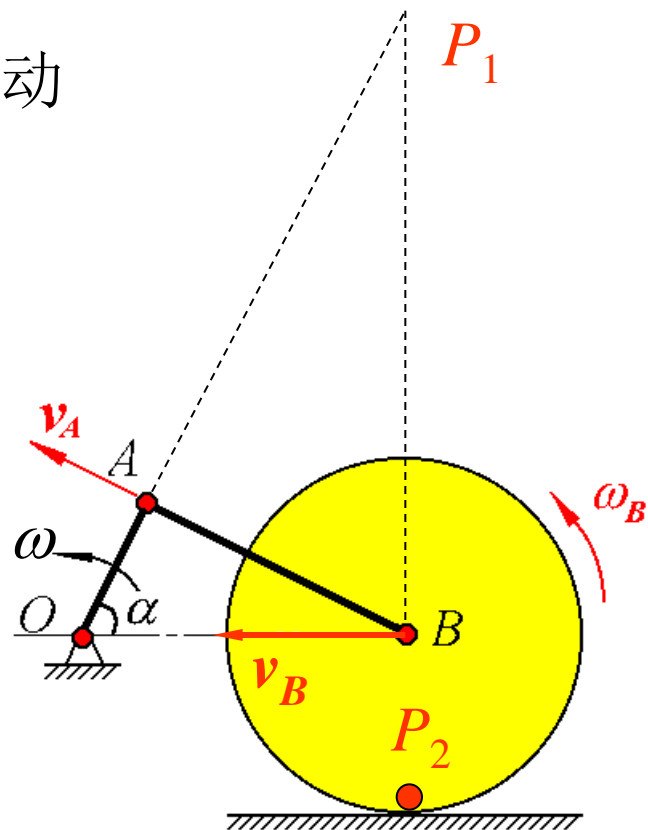
$P_1$  为其速度瞬心

$P_2$  为轮速度瞬心

$$\therefore \omega_{AB} = v_A / AP_1 = 30\pi / 3 \times 15 = \frac{2}{3}\pi \text{ rad/s}$$

(↺)

$$v_B = BP_1 \cdot \omega_{AB} = 2\sqrt{3} \times 15 \times \frac{2\pi}{3} = 20\sqrt{3}\pi \text{ cm/s} (\leftarrow)$$

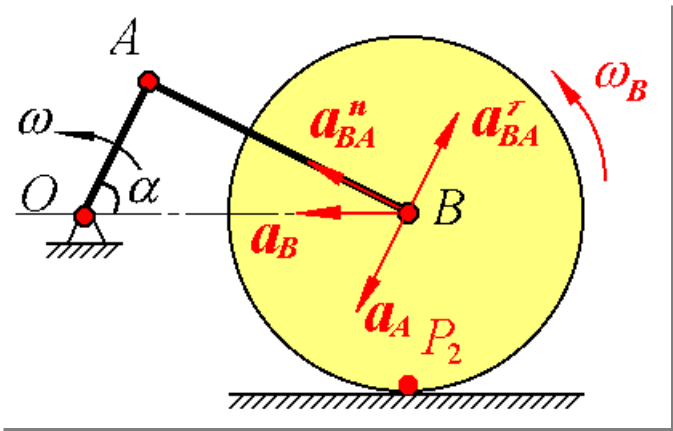


取A为基点,  $a_A = OA \cdot \omega^2 = 15 \times (2\pi)^2 = 60\pi^2 \text{ cm/s}^2$  指向O点

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^n \quad (a_{BA}^n = AB \cdot \omega_{AB}^2 = \sqrt{3} \times 15 \times \left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 = \frac{20\sqrt{3}}{3} \pi^2, \text{沿} BA)$$

大小?  $\checkmark$     ?     $\checkmark$   
 方向  $\checkmark$      $\checkmark$      $\checkmark$      $\checkmark$

作加速度矢量图, 将上式向BA线上投影



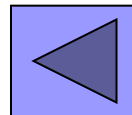
$$a_B \cos 30^\circ = 0 + 0 + a_{BA}^n$$

$$a_B = a_{BA}^n / \cos 30^\circ = \frac{20\sqrt{3}}{3} \pi^2 / \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{40}}{3} \pi^2 = 131.5 \text{ cm/s}^2 (\leftarrow)$$

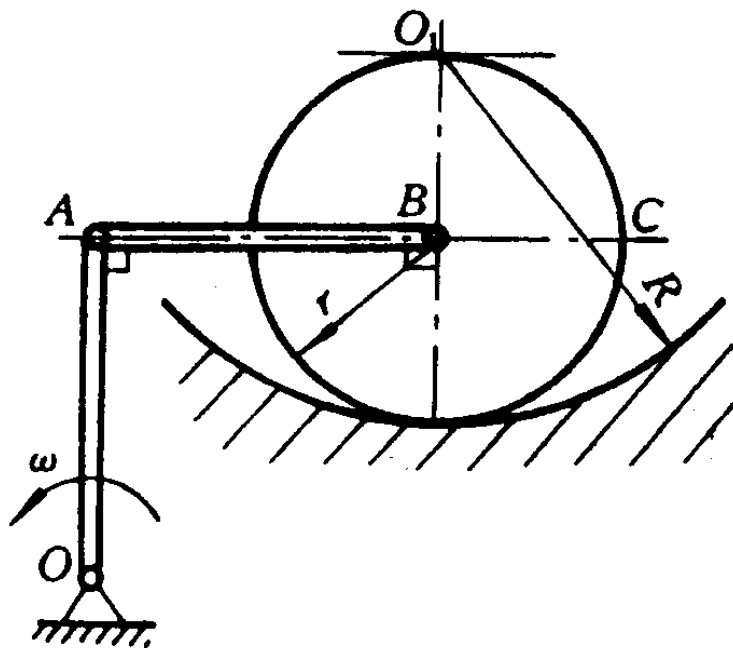
研究轮B:  $P_2$ 为其速度瞬心

$$\omega_B = v_B / BP_2 = 20\sqrt{3}\pi / 15 = 7.25 \text{ rad/s} \quad (\curvearrowright)$$

$$\varepsilon_B = a_B / BP_2 = 131.5 / 15 = 8.77 \text{ rad/s}^2 \quad (\curvearrowright)$$



**课堂练习1.** 曲柄 $OA$ 以匀角速度 $\omega = 2\text{rad/s}$ 绕 $O$ 轴转动，并借助连杆 $AB$ 驱动半径为 $r$ 的轮子在半径为 $R$ 的圆弧槽中作无滑动的滚动。设 $OA = AB = R = 2r = 1\text{m}$ ，求图示瞬时 $B$ 点和 $C$ 点的速度和加速度。



答案:  $v_B = 2\text{ m/s}$   
 $v_C = 2.828\text{ m/s}$   
 $a_B = 8\text{ m/s}^2$   
 $a_C = 11.31\text{ m/s}^2$

## § 5-4 机构运动分析

一个运动机构或运动系统是由多种运动的点和刚体组成，各构件之间通过铰链、套筒、销钉、滑块等联接点传递运动。由已知运动的构件，通过对某些联结点 and 刚体的运动分析，确定机构中所有构件的运动，称为**机构运动分析**。分析机构运动时，先应分析各构件作什么运动，计算各联结点速度和加速度，再计算待求未知量。

**例7** 行星齿轮减速机构。已知各齿轮的节圆半径 $r_1$ 、 $r_2$ 、 $r_3$ ，求传动比 $i_{1H}$ （即  $\omega_1 / \omega_H$ ）

解：轮1与轮2的啮合点A的速度

$$v_A = O_1A \cdot \omega_1 = AP \cdot \omega_2$$

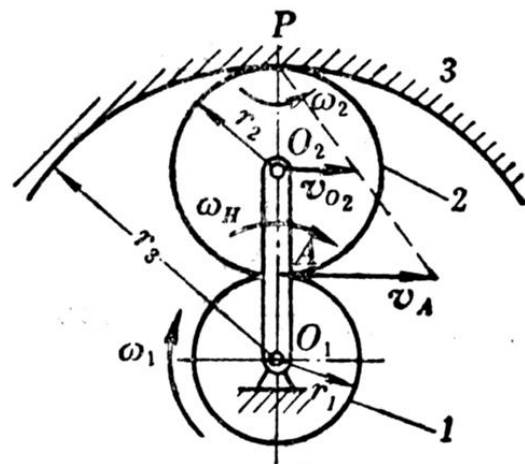
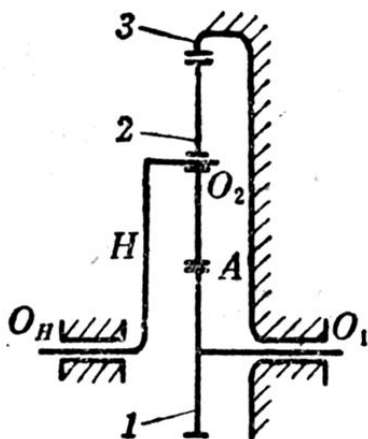
$$r_1\omega_1 = 2r_2\omega_2$$

轮2与系杆H的联结点 $O_2$ 的速度

$$v_{O_2} = O_2P \cdot \omega_2 = O_1O_2 \cdot \omega_H$$

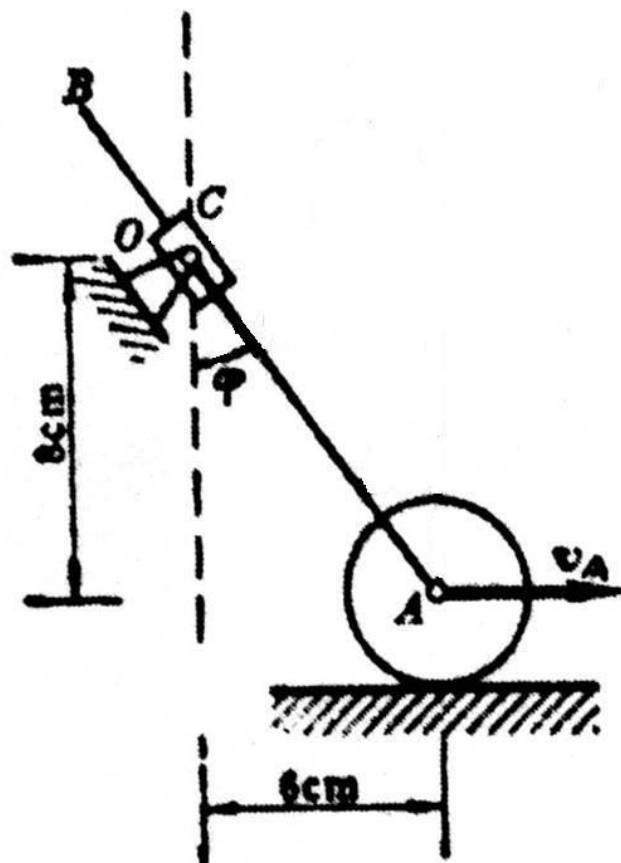
$$r_2\omega_2 = (r_1 + r_2)\omega_H$$

故 
$$r_1\omega_1 = 2(r_1 + r_2)\omega_H$$



由于  $2(r_1 + r_2) = r_1 + r_3$  所以 
$$i_{1H} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = \frac{r_1 + r_3}{r_1} = \frac{z_1 + z_2}{z_1}$$

**例8** 图示机构中， $AB$ 杆一端连接滚子 $A$ ，滚子的中心 $A$ 以速度 $v_A = 16 \text{ cm/s}$ 沿水平方向匀速运动， $AB$ 杆活套在可绕 $O$ 轴转动的套管 $C$ 内。求 $AB$ 杆的角速度和角加速度。

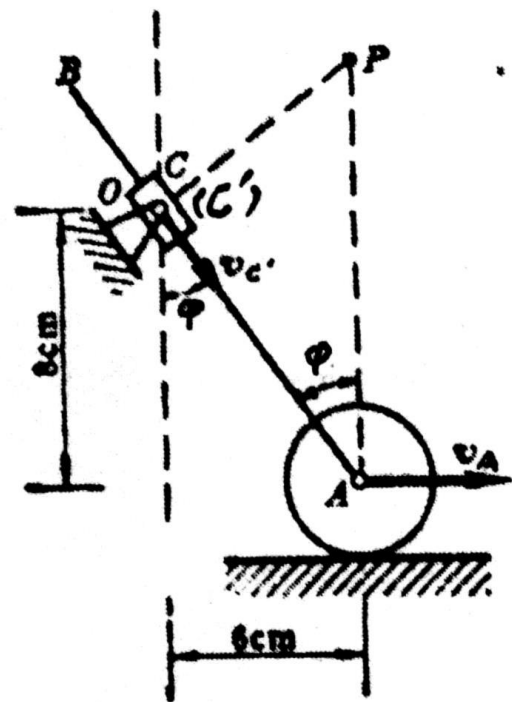


解：（1）求AB杆的角速度

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{PA} = \frac{v_A}{PA} = \frac{16}{12.5} = 1.28(\text{rad/s})$$

其中  $PA = \frac{AC'}{\cos \varphi} = \frac{AC'^2}{8} = 12.5 \text{ cm}$

$$\begin{aligned} v_{C'} &= PC' \cdot \omega_{AB} = AC' \cdot \tan \varphi \cdot \omega_{AB} \\ &= \sqrt{8^2 + 6^2} \cdot \frac{6}{8} \times 1.28 = 9.6 (\text{cm/s}) \end{aligned}$$





## (2) 求AB杆的角加速度

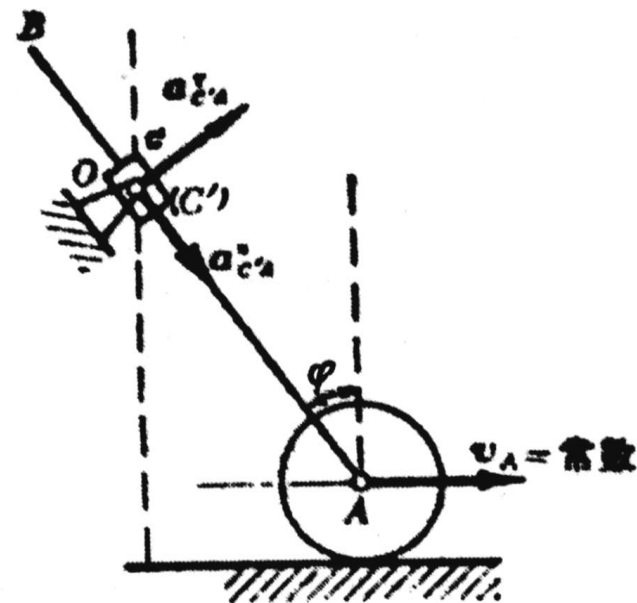
取AB杆为研究对象。选A为基点，其上C'点的加速度为

$$\mathbf{a}_{C'} = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{C'A}^{\tau} + \mathbf{a}_{C'A}^n$$

大小	?	0	?	√
方向	?	0	√	√

其中  $a_{C'A}^{\tau} = C'A \cdot \alpha_{AB}$      $a_{C'A}^n = C'A \cdot \omega_{AB}^2$

有三个未知要素，需另找补充方程。



由点的合成运动，取 $AB$ 杆上 $C'$ 点为动点，动系固定在套筒上。由于牵连运动为转动，故加速度合成定理为

$$\mathbf{a}_{C'} = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C$$

大小	?	0	?	√
方向	?	0	√	√

其中  $\omega_e = \omega_{AB} = 1.28 \text{ rad/s}$

$$v_r = v_C = 9.6 \text{ cm/s}$$

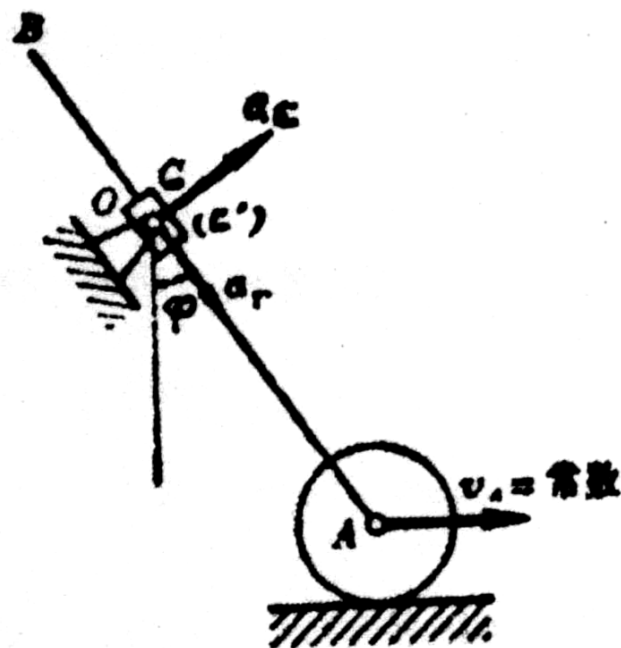
$$a_C = 2\omega_e \cdot v_r = 2 \times 1.28 \times 9.6 = 24.576 \text{ (cm/s}^2\text{)}$$

式 (1)、(2) 相等

$$\mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{C'A}^{\tau} + \mathbf{a}_{C'A}^n = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C$$

大小	√	?	√	√	?	√
方向	√	√	√	√	√	√

只有两个未知要素，可解。



将式 (3) 向  $a_{C'A}^\tau$  方向投影得

$$a_{C'A}^\tau = a_C = 24.576 \text{ cm/s}^2$$

$$\alpha_{AB} = \frac{a_{C'A}^\tau}{C'A} = \frac{24.576}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = 2.4576 \text{ rad/s}^2$$

**另解：**用分析法给定AB杆的转动方程  $\alpha = \alpha(t)$ ，然后对时间  $t$  求导数，可求得  $\omega_{AB} = \dot{\alpha}(t)$   $\alpha_{AB} = \ddot{\alpha}(t)$ ，将更简单。

设  $t = 0$  时，AB杆的位置沿铅垂线，则AB杆的转动方程为

$$\alpha(t) = \tan^{-1} \frac{v_A t}{8}$$

求导数  $\omega = \frac{8v_A}{64 + v_A^2 t^2}$       再求导数  $\alpha_{AB} = -\frac{16v_A^3 t}{(64 + v_A^2 t^2)^2}$

当  $v_A t = 6$ ，即  $t = 3/8s$  时，并以  $v_A = 16 \text{ cm/s}$  代入上两式，

得

$$\omega = 1.28 \text{ rad/s}$$
$$\alpha_{AB} = 2.4576 \text{ rad/s}^2$$

# 分析某点运动

- 1.建立点的运动方程求点的速度和加速度;
- 2.确定刚体的运动与其上一点的运动关系, 用点的合成运动或刚体平面运动理论分析相关的两个点在某瞬时的速度和加速度。

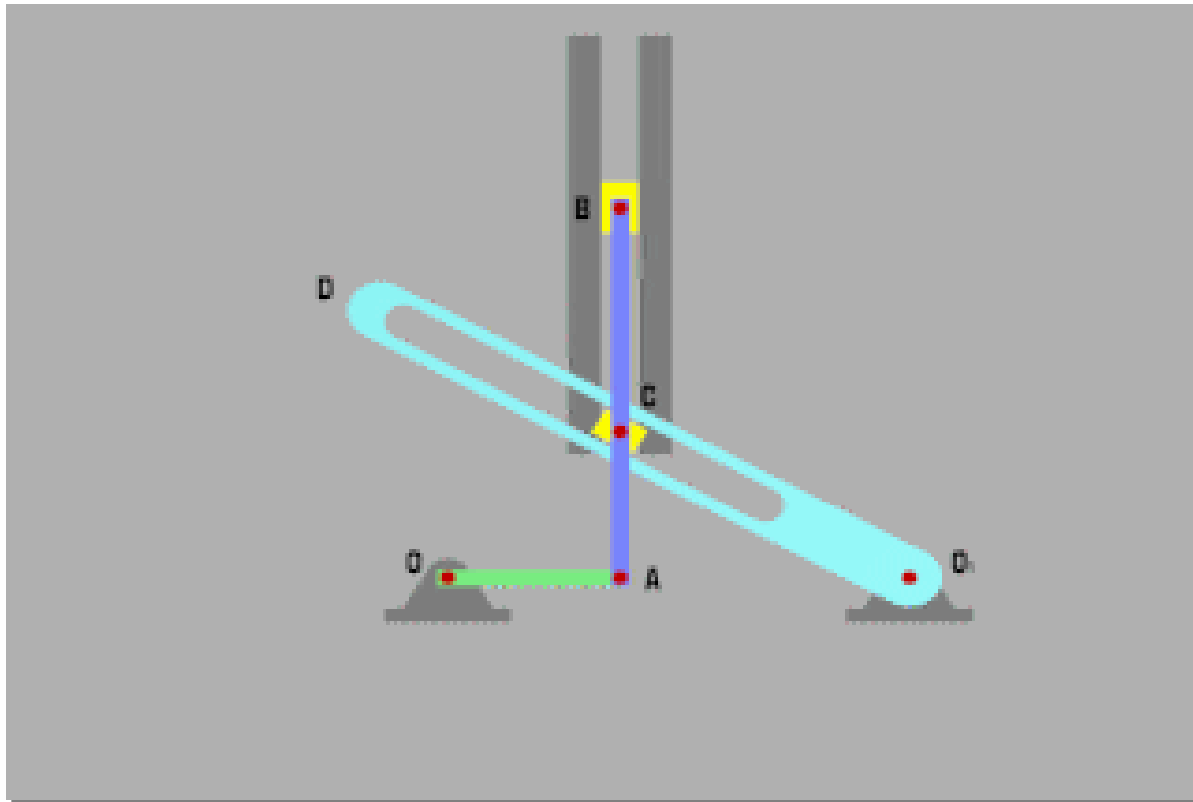
# 分析同一平面运动刚体上两个点之间的速度和加速度

可用刚体平面运动理论；

- 1.当两个刚体接触而又有相对滑动时，应用点的合成运动理论分析此二刚体上相重合点的速度和加速度；
- 2.复杂机构中，可以同时有点的合成运动和刚体平面运动问题，可分别分析，综合运用点的合成运动和刚体平面运动理论求解。

## 例9、导槽滑块机构

请看动画



## 例9、导槽滑块机构

已知：曲柄 $OA=r$ ，匀角速度 $\omega$ 转动，连杆 $AB$ 的中点 $C$ 处连接一滑块 $C$ 可沿导槽 $O_1D$ 滑动， $AB=l$ ，图示瞬时 $O, A, O_1$ 三点在同一水平线上， $OA \perp AB$ ， $\angle AO_1C = \theta = 30^\circ$ 。

求：该瞬时 $O_1D$ 的角速度和角加速度。

解： $OA, O_1D$ 均作定轴转动，

$AB$ 作平面运动

★ 研究 $AB$ ： $v_A = r\omega$ ，图示位置，

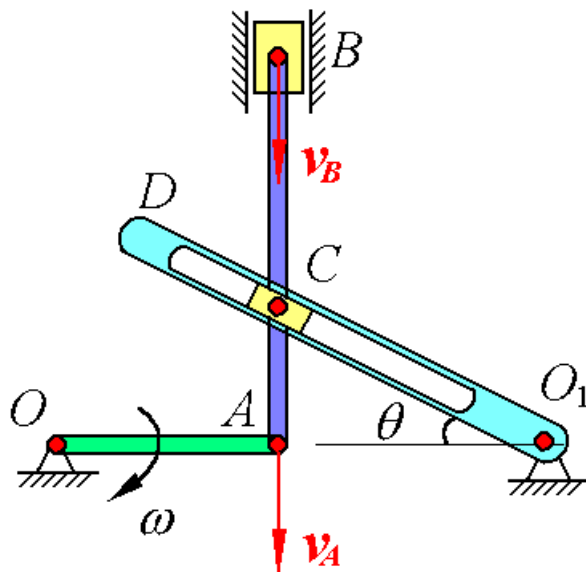
作瞬时平动，所以

$$v_B = r\omega; v_C = v_A = r\omega$$

★ 用合成运动方法

求 $O_1D$ 杆上与滑块 $C$  接触的点的速度

动点： $AB$ 杆上 $C$  (或滑块 $C$ )，动系： $O_1D$ 杆，静系：机架





绝对运动：曲线运动  $v_a = v_c = r\omega$ ，方向↓

相对运动：直线运动， $v_r = ?$ ，方向//  $O_1D$

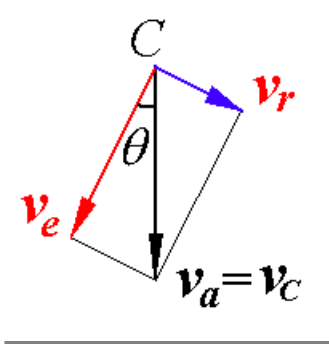
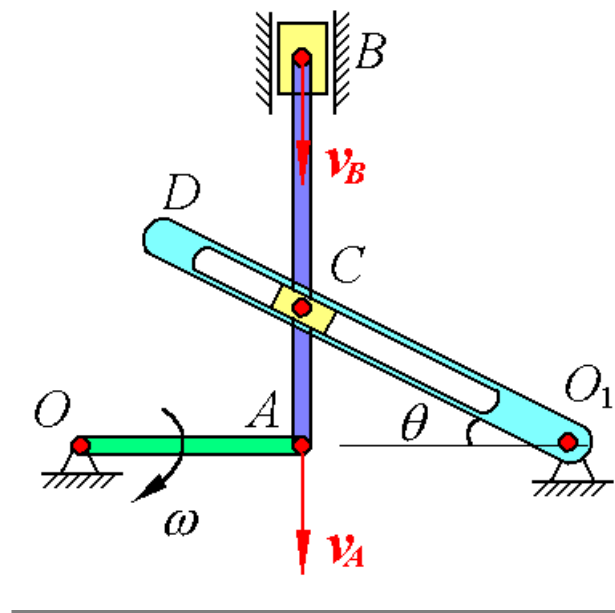
牵连运动：定轴转动， $v_e = ?$ ，方向⊥  $O_1D$

根据  $\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r$ ，作速度平行四边形

$$\therefore v_e = v_C \cdot \cos\theta = r\omega \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} r\omega$$

$$\text{又} \because v_e = O_1C \cdot \omega_{O_1D}$$

$$\therefore \omega_{O_1D} = \frac{v_e}{O_1C} = \frac{\sqrt{3}/2 r\omega}{\frac{l}{2}/\sin\theta} = \frac{\sqrt{3}r}{2l} \omega \quad (\curvearrowright)$$



这是一个需要联合应用点的合成运动和刚体平面运动理论求解的综合性问题。



# 刚体平面运动习题课

## 一. 概念与内容

### 1. 刚体平面运动的定义

刚体运动时，其上任一点到某固定平面的距离保持不变。

### 2. 刚体平面运动的简化

可以用刚体上一个与固定平面平行的平面图形 $S$ 在自身平面内的运动代替刚体的整体运动。

### 3. 刚体平面运动的分解

分解为  $\left\{ \begin{array}{l} \text{随基点的平动 (平动规律与基点的选择有关)} \\ \text{绕基点的转动 (转动规律与基点的选择无关)} \end{array} \right.$

### 4. 基点

可以选择平面图形内任意一点,通常是运动状态已知的点。

## 5. 瞬心（速度瞬心）

- ★任一瞬时,平面图形或扩大部分都唯一存在一个速度为零的点
- ★瞬心位置随时间改变.
- ★每一瞬时平面图形的运动可视为绕该瞬时瞬心的转动. 这种瞬时绕瞬心的转动与定轴转动不同.
- ★  $\omega = 0$ , 瞬心位于无穷远处, 各点速度相同, 刚体作瞬时平动, 瞬时平动与平动不同.

## 6. 刚体定轴转动和平面平动是刚体平面运动的特例.

## 7. 求平面图形上任一点速度的方法

- ★基点法:  $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$ ,  $A$ 为基点
- ★速度投影法:  $[\bar{v}_B]_{AB} = [\bar{v}_A]_{AB}$
- ★速度瞬心法:  $v_B = BP \cdot \omega$ ,  $\bar{v}_B \perp BP$ , 与  $\omega$  一致.  $P$ 为瞬心

其中, 基点法是最基本的公式, 瞬心法是基点法的特例.

## 8. 求平面图形上一点加速度的方法

基点法:  $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^n$ ,  $A$ 为基点, 是最常用的方法  
此外, 当  $\omega=0$ , 瞬时平动时也可采用方法  $[\bar{a}_B]_{AB} = [\bar{a}_A]_{AB}$   
它是基点法在  $\omega=0$  时的特例。

## 9. 平面运动方法与合成运动方法的应用条件

- ★ 平面运动方法用于研究一个平面运动刚体上任意两点的速度、加速度之间的关系及任意一点的速度、加速度与图形角速度、角加速度之间的关系。
- ★ 合成运动方法常用来确定两个相接触的物体在接触点处有相对滑动时的运动关系的传递。

## 二. 解题步骤和要点

1. 根据题意和刚体各种运动的定义，判断机构中各刚体的运动形式。注意每一次的研究对象只是一个刚体。
2. 对作平面运动的刚体，根据已知条件和待求量，选择求解速度(图形角速度)问题的方法, 用基点法求加速度(图形角加速度)
3. 作速度分析和加速度分析，求出待求量。  
(基点法: 恰当选取基点，作速度平行四边形，加速度矢量图；  
速度投影法: 不能求出图形 $\omega$ ；  
速度瞬心法: 确定瞬心的位置是关键。)

一、已知：配气机构中， $OA=r$ ，以等  $\omega_o$  转动，在某瞬时  $\varphi = 60^\circ$   
 $AB \perp BC$ ,  $AB=6r$ ,  $BC=3\sqrt{3}r$ . 求该瞬时滑块C的  
 速度和加速度.

解:  $OA$  定轴转动;  $AB, BC$  均作平面运动,  
 滑块  $B$  和  $C$  均作平动

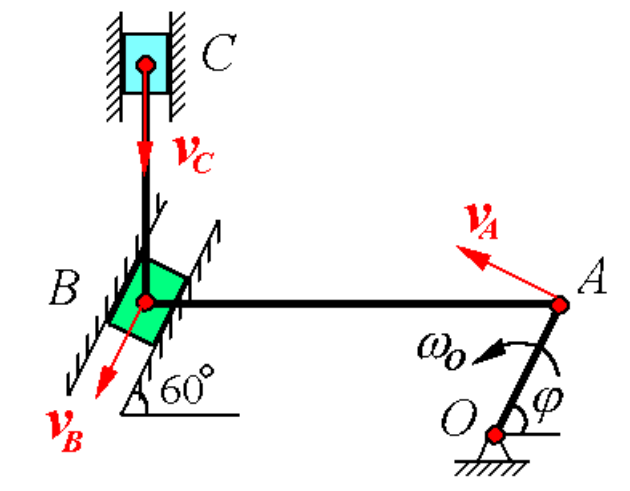
★ 求  $\bar{v}_c$

对  $AB$  杆应用速度投影定理:

$$v_B \cos 60^\circ = v_A \cos 30^\circ \therefore v_B = \sqrt{3}v_A = \sqrt{3}r\omega_o$$

对  $BC$  杆应用速度投影定理:  $v_c = v_B \sin 60^\circ$

$$v_c = \sqrt{3}r\omega_o \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}r\omega_o (\downarrow)$$



★求  $\bar{a}_c$

以  $A$  为基点求  $B$  点加速度:  $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^n \quad (a)$

$a_A = r\omega_o^2, a_{BA}^n = AB \cdot \omega_{AB}^2$ ,  $P_1$  为  $AB$  杆速度瞬心, 而  $AP_1 = 3r$

$$\therefore \omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_1} = \frac{r\omega_o}{3r} = \frac{\omega_o}{3},$$

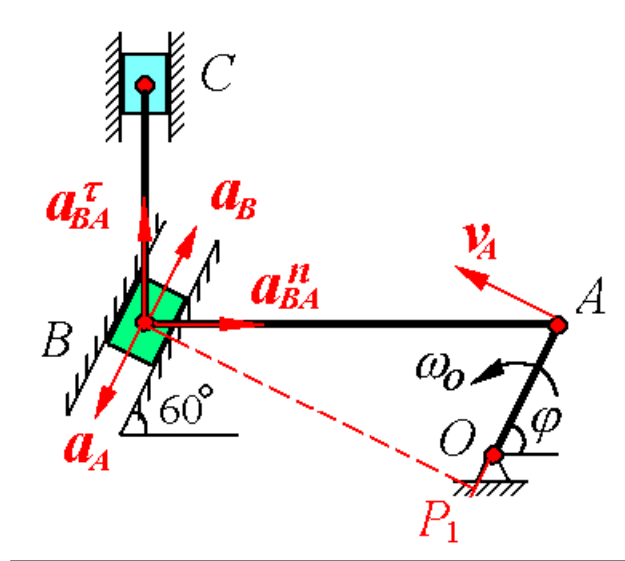
$$a_{BA}^n = 6r \cdot \left(\frac{\omega_o}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}r\omega_o^2$$

作加速度矢量图,

并沿  $BA$  方向投影

$$a_B \cos 60^\circ = -a_A \cdot \cos 60^\circ + a_{BA}^n$$

$$\therefore a_B = -r\omega_o^2 + \frac{4}{3}r\omega_o^2 = \frac{r}{3}\omega_o^2$$





再以  $B$  为基点, 求  $\bar{a}_c$

$$\bar{a}_c = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^{\tau} + \bar{a}_{CB}^n \quad (b)$$

作加速度矢量图,

$P_2$  为  $BC$  的瞬心, 而  $P_2C = 9r$

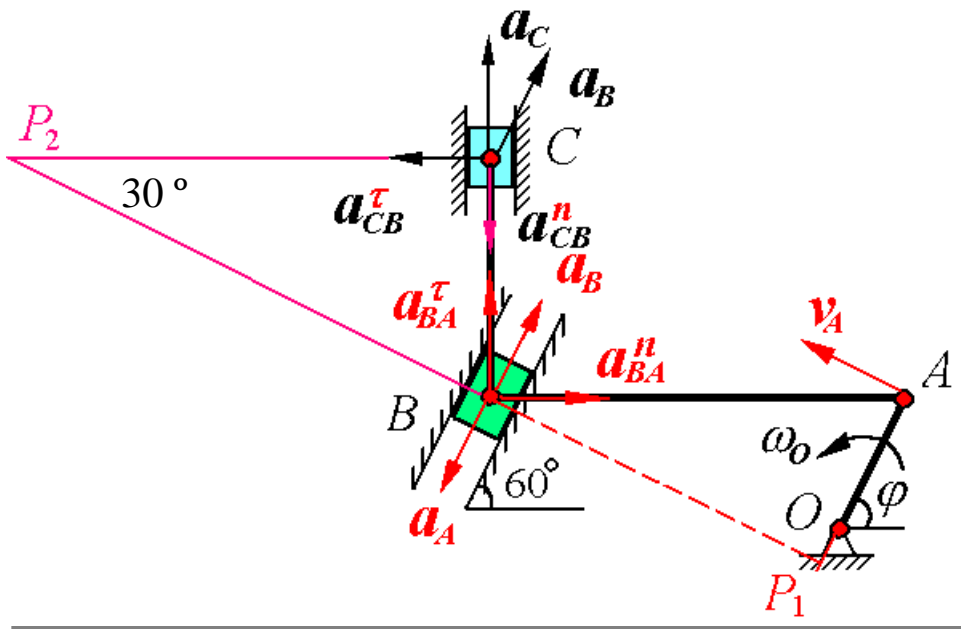
$$\therefore \omega_{BC} = \frac{v_c}{P_2C} = \frac{3}{2}r\omega_o \cdot \frac{1}{9r} = \frac{\omega_o}{6}$$

$$a_{CB}^n = BC \cdot \omega_{BC}^2 = 3\sqrt{3}r \cdot \left(\frac{\omega_o}{6}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{12}r\omega_o^2$$

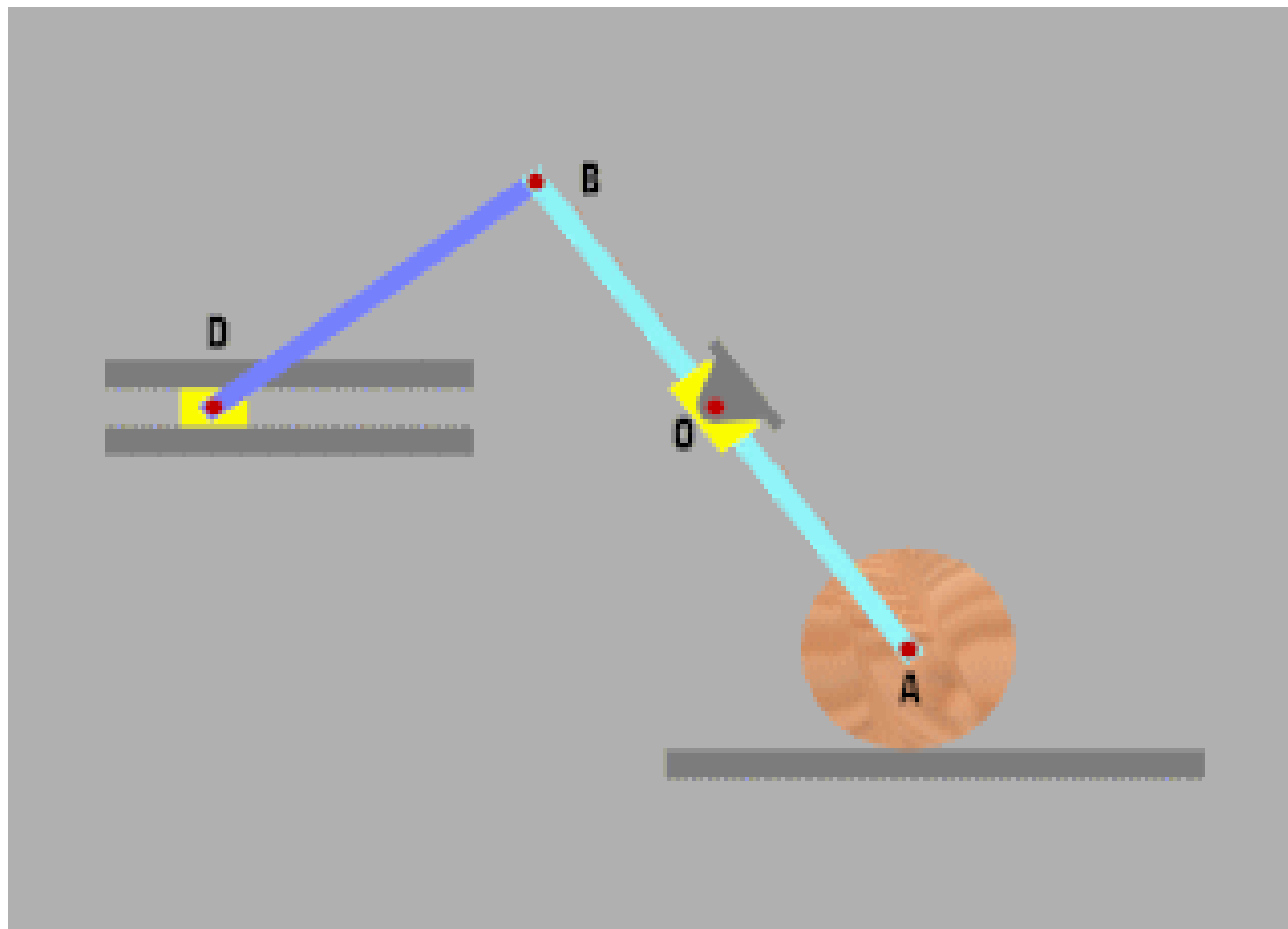
将 (b) 式在  $BC$  方向线上投影

$$a_c = a_B \cos 30^\circ - a_{CB}^n = \frac{r}{3}\omega_o^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{12}r\omega_o^2 = \frac{\sqrt{3}}{12}r\omega_o^2$$

[注]  $\bar{a}_B, \bar{a}_c$  指向可假设, 结果为正说明假设与实际指向相同, 反之, 结果为负, 说明假设与实际指向相反.



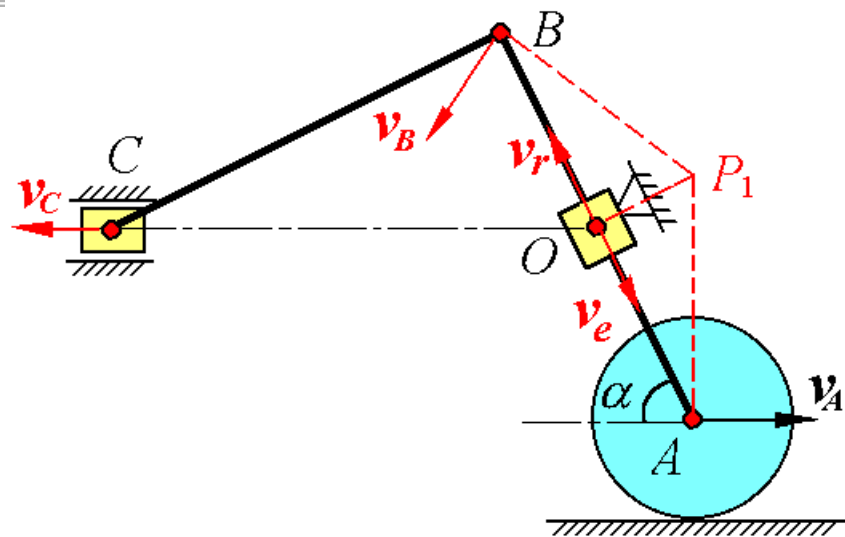
## 二、平面机构



请看动画

## 二、平面机构

图示瞬时,  $O$  点在  $AB$  中点,  $\alpha = 60^\circ$ ;  
 $BC \perp AB$ , 已知  $O, C$  在同一水平线上,  
 $AB = 20\text{cm}$ ,  $v_A = 16\text{cm/s}$ ,  
 试求该瞬时  $AB$  杆,  $BC$  杆的角速度  
 及滑块  $C$  的速度.



解: 轮  $A$ , 杆  $AB$ , 杆  $BC$  均作平面运动, 套筒  $O$  作定轴转动, 滑块  $C$  平动.

取套筒上  $O$  点为动点, 动系固结于  $AB$  杆; 静系固结于机架,

$$\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r, \text{ 由于 } \bar{v}_a = 0, \bar{v}_r \text{ 沿 } AB,$$

所以  $\bar{v}_e$  方向沿  $AB$  并且与  $\bar{v}_r$  反向。从而确定了  $AB$  杆上与  $O$  点接触点的速度方向。

研究  $AB$ ,  $P_1$  为速度瞬心

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{P_1 A} = \frac{16}{OA/\sin\alpha} = \frac{16}{10/\sin 60^\circ} = \frac{4}{5}\sqrt{3} \text{ rad/s} (\curvearrowright)$$

$$v_B = \omega_{AB} \cdot P_1 B = \omega_{AB} \cdot P_1 A = v_A = 16 \text{ cm/s}$$

研究  $BC$ , 以  $B$  为基点,

根据  $\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB}$

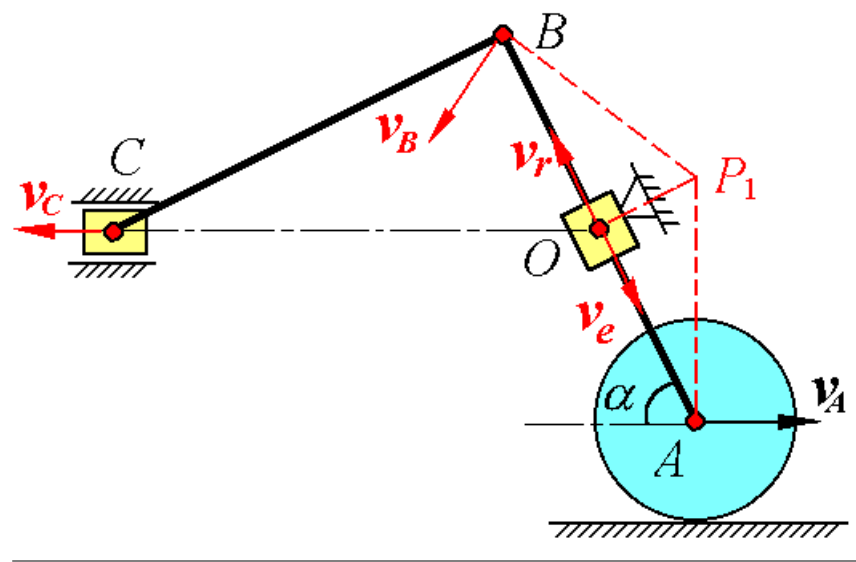
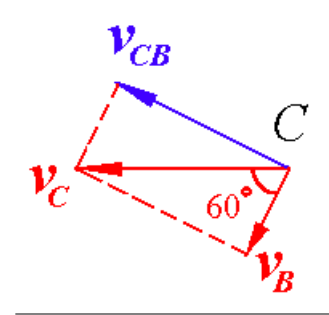
作速度平行四边形

$$v_C = \frac{v_B}{\cos 60^\circ} = 2v_B = 2 \times 16 = 32 \text{ cm/s}$$

$$v_{CB} = v_B \cdot \tan 60^\circ = 16 \times \sqrt{3} = 16\sqrt{3} \text{ cm/s}$$

$$\because v_{CB} = BC \cdot \omega_{BC} \quad BC = \sqrt{3} \cdot OB = 10\sqrt{3} \text{ cm}$$

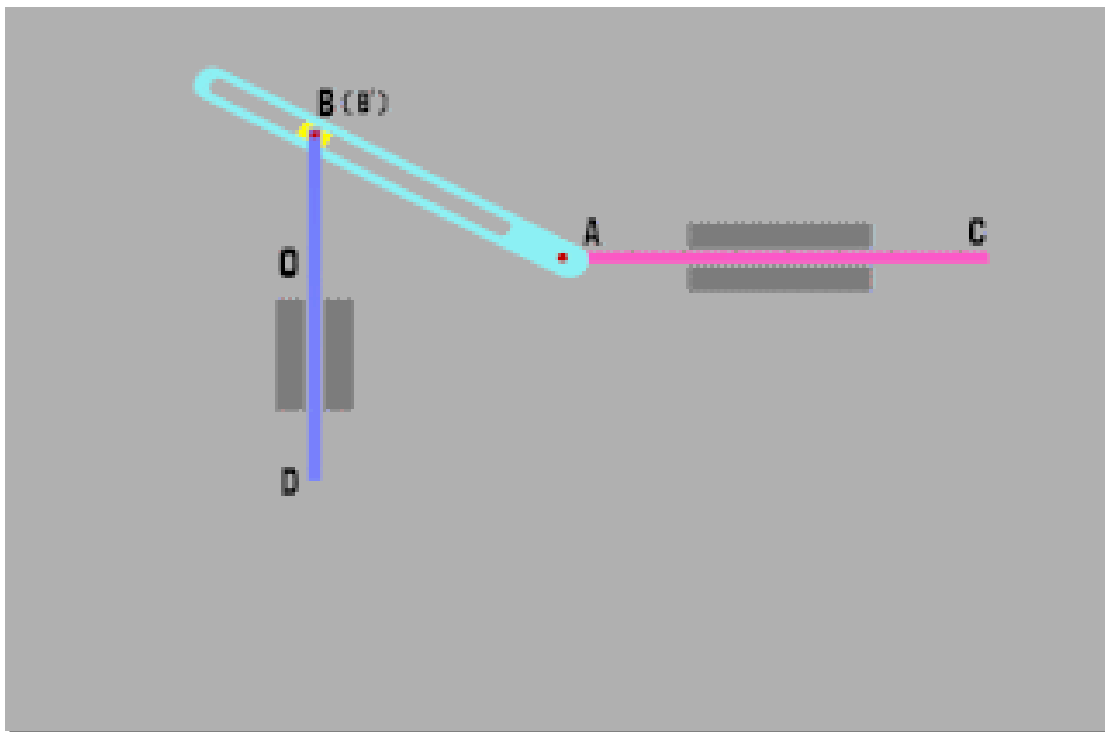
$$\therefore \omega_{BC} = \frac{v_{CB}}{BC} = \frac{16\sqrt{3}}{10\sqrt{3}} = 1.6 \text{ rad/s} (\curvearrowright)$$



也可以用瞬心法求  $\omega_{BC}$  和  $v_C$ , 很简便

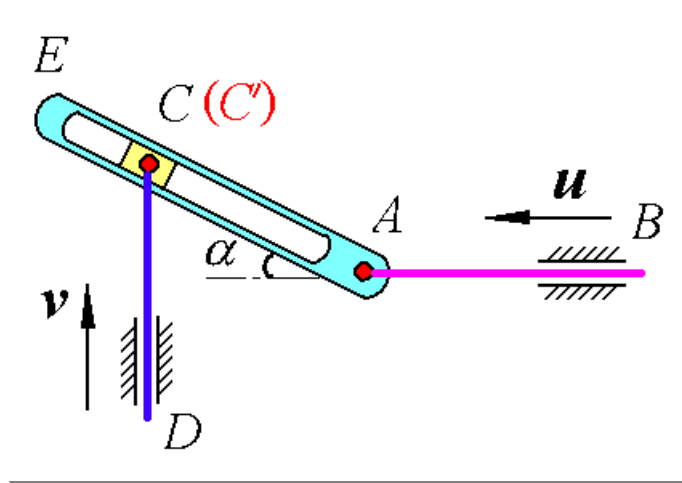
## 三、导槽滑块机构

请看动画



### 三、导槽滑块机构

图示瞬时, 杆 $AB$ 速度  $\bar{u}$ , 杆 $CD$ 速度  $\bar{v}$  及 $\alpha$ 角已知, 且 $AC=l$ , 求导槽 $AE$ 的图形角速度.



解: ★ 应用点的合成运动方法

确定 $CD$ 杆上 $C$ 点与 $AE$ 杆上接触点 $C'$ 之间的速度关系

取 $CD$ 杆上 $C$ 为动点, 动系固结于 $AE$ , 静系固结于机架; 则

$$\bar{v}_c = \bar{v}_{c'} + \bar{v}_r \quad (a)$$

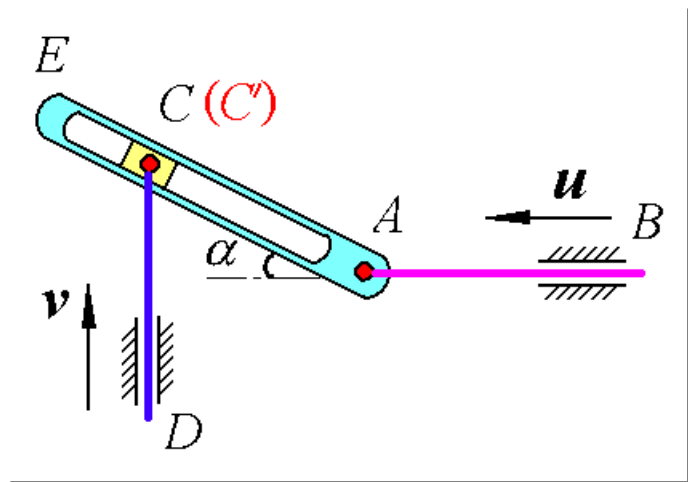
★ 应用平面运动方法确定 $AE$ 上 $A$ 、 $C'$ 点之间速度关系

$$\bar{v}_{c'} = \bar{v}_A + \bar{v}_{c'A} \quad (b)$$

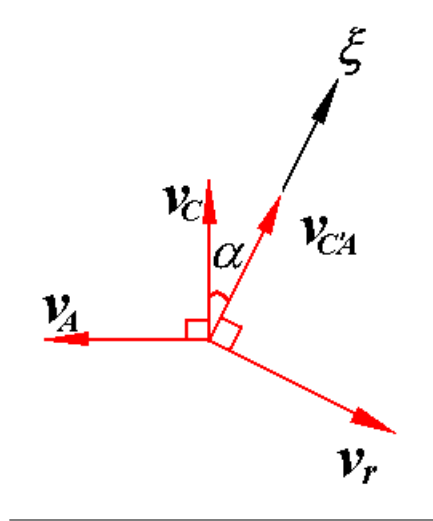
将 (b) 代入 (a) 得  $\bar{v}_C = \bar{v}_A + \bar{v}_{C'A} + \bar{v}_r$ , 作速度矢量图投至  $\xi$  轴, 且  $v_c = v$ ,  $v = u$ , 有

$$v_C \cos \alpha = -v_A \sin \alpha + v_{C'A}$$

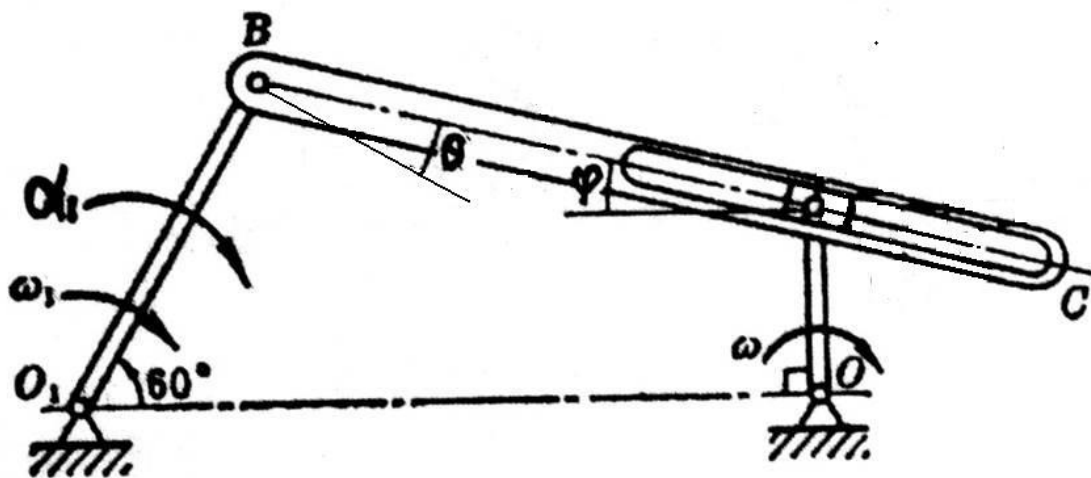
即 
$$v_{C'A} = v \cos \alpha + u \sin \alpha$$



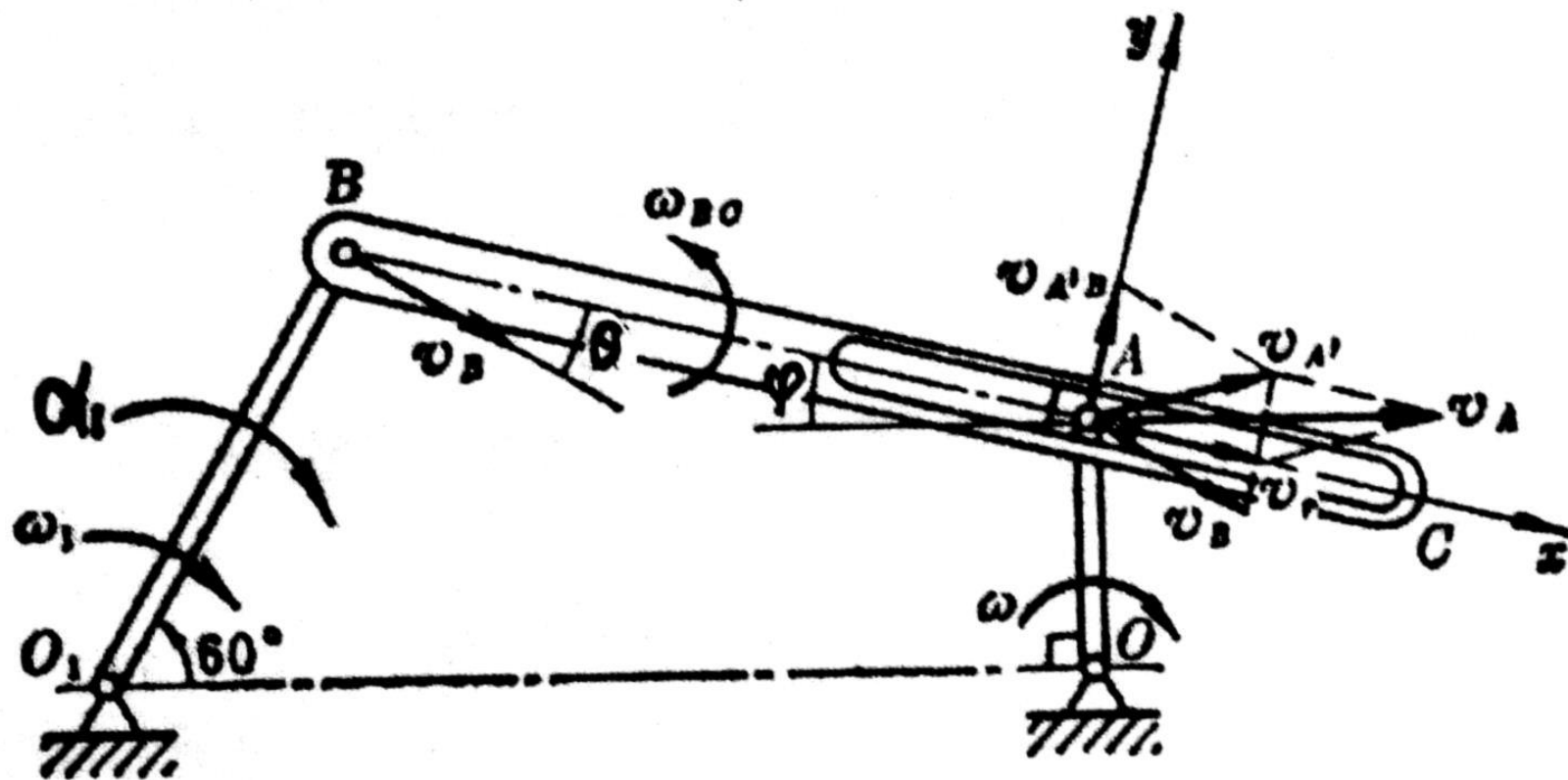
$$\omega_{AE} = \frac{v_{C'A}}{AC} = \frac{v \cos \alpha + u \sin \alpha}{l} \quad (\curvearrowright)$$



四、图示为具有控制摇杆 $O_1B$ 的曲柄槽杆机构。曲柄 $OA$ 以 $\omega = 20 \text{ rad/s}$ 作匀速转动，当绕顺时针方向转到铅垂向上位置时，控制摇杆 $O_1B$ 与水平线成 $60^\circ$ 角。此时其角速度和角加速度分别为 $\omega_1 = 3 \text{ rad/s}$ ， $\alpha_1 = 6 \text{ rad/s}^2$ ，且都是顺时针转向。求此瞬时槽杆 $BC$ 的角加速度及滑块 $A$ 相对于槽杆 $BC$ 的加速度。已知 $OA = 232 \text{ mm}$ ， $O_1B = 500 \text{ mm}$ 及 $O_1O = 1000 \text{ mm}$ 。







解：（1）速度分析

取曲柄 $OA$ 上的 $A$ 为动点，动系连于杆 $BC$ 上

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$$

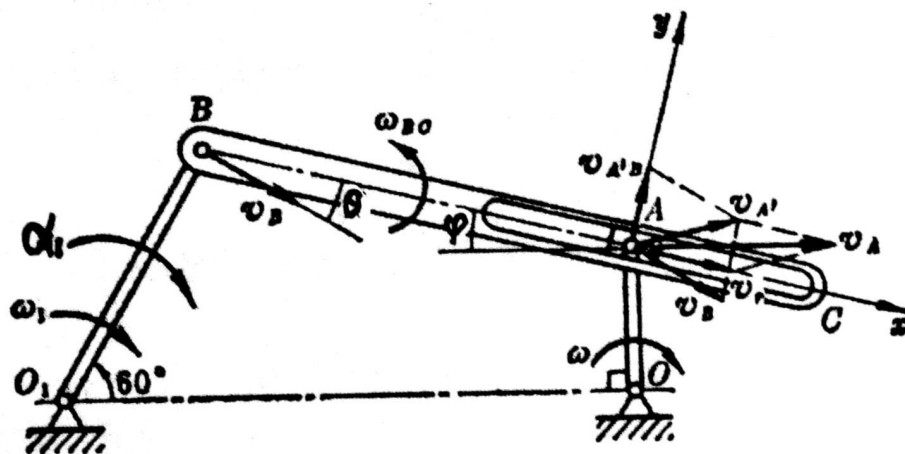
大小	$\sqrt{\quad}$	$?$	$?$	由于 $v_e$ 大小、方向均未知， $v_r$ 大小未知， 无法直接求解，必须另列方程。
方向	$\sqrt{\quad}$	$?$	$\sqrt{\quad}$	

以杆 $BC$ 为研究对象。取 $B$ 为基点，其上与连接滑块的销钉 $A$ 重合的 $A'$ 点的速度为

$$\mathbf{v}_{A'} = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A'B}$$

大小	$?$	$\sqrt{\quad}$	$?$
方向	$?$	$\sqrt{\quad}$	$\sqrt{\quad}$

由于  $v_e = v_{A'}$



所以

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A'B} + \mathbf{v}_r \\ \text{大小} & \sqrt{\quad} & \sqrt{\quad} \quad ? \\ \text{方向} & \sqrt{\quad} & \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \end{array}$$

取投影轴 $x$ 、 $y$ 投影，得

$$v_A \cos \varphi = v_B \cos \theta + v_r$$

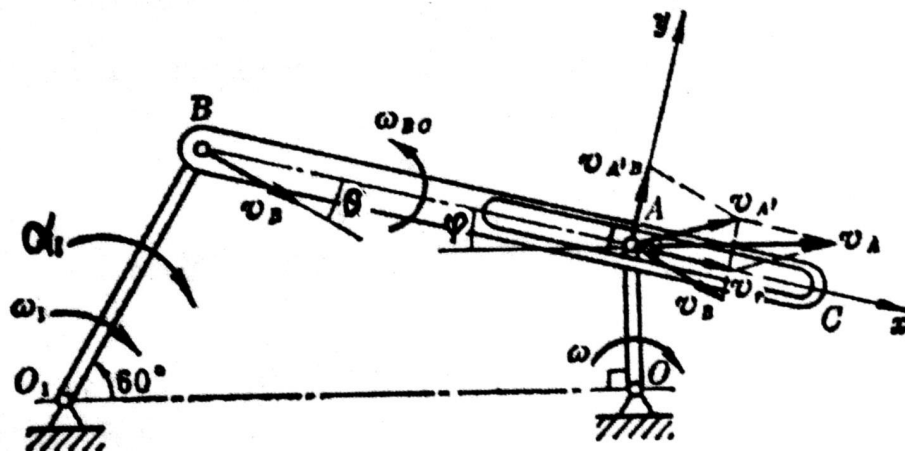
$$v_A \sin \varphi = -v_B \sin \theta + v_{A'B}$$

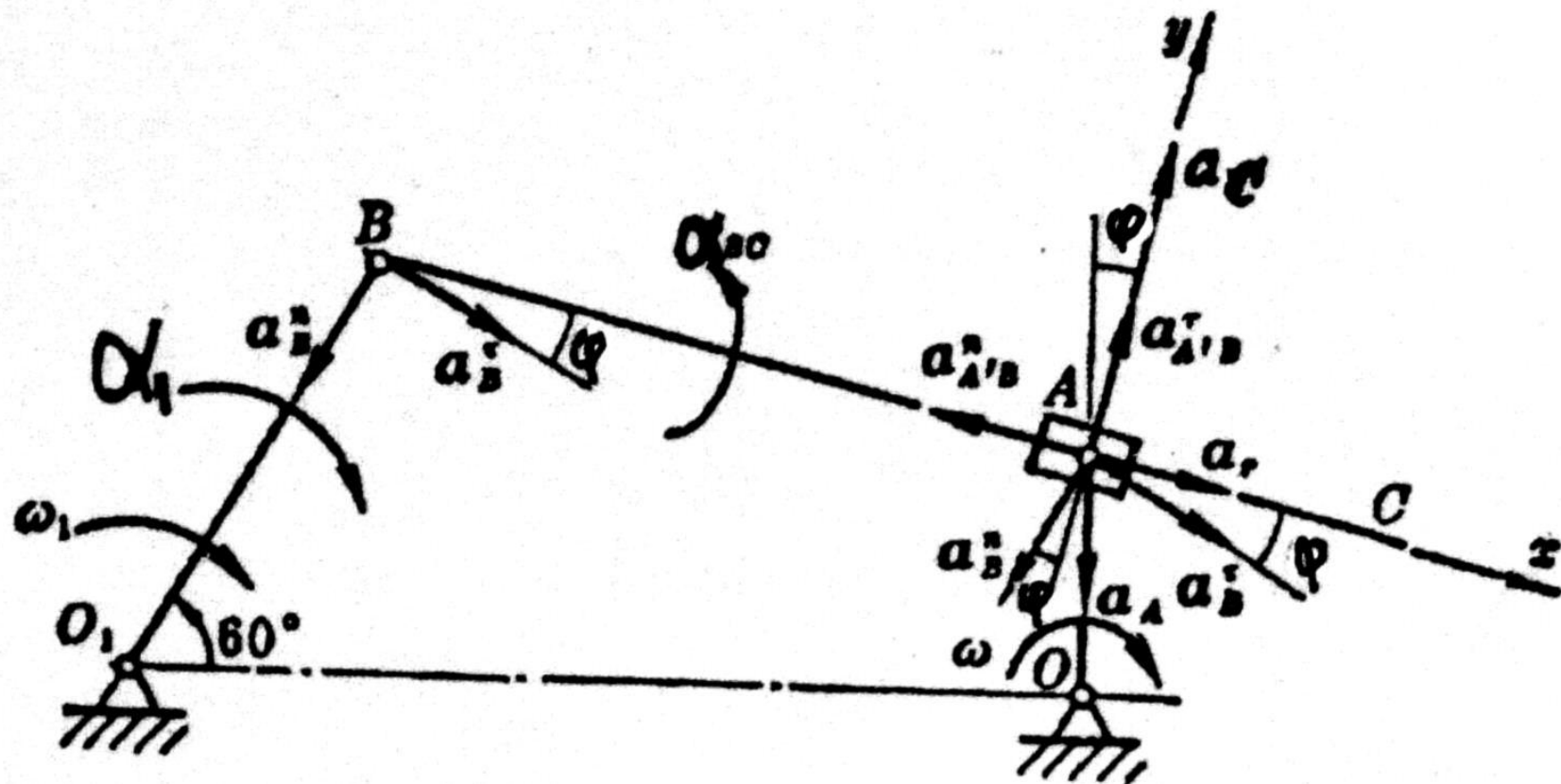
其中  $v_A = OA \cdot \omega = 0.232 \times 20 = 4.64 \text{ (m/s)}$        $v_{A'B} = A'B \cdot \omega_{BC}$   
 $v_B = O_1 B \cdot \omega_1 = 0.5 \times 3 = 1.5 \text{ (m/s)}$

将已知量代入解得

$$v_r = v_A \cos \varphi - v_B \cos \theta = (4.64 - 1.5) \cos 15^\circ = 3.03 \text{ (m/s)}$$

$$\omega_{BC} = \frac{v_{A'B}}{A'B} = \frac{v_A \sin \varphi + v_B \sin \theta}{AB'} = \frac{(4.64 + 1.5) \sin 15^\circ}{0.776} = 2 \text{ rad/s}$$

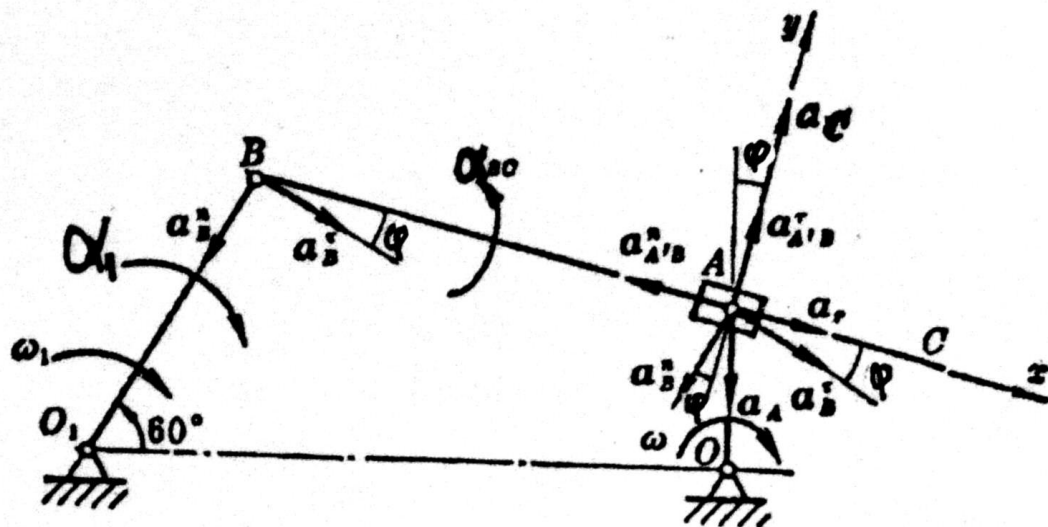




## (2) 加速度分析

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C$$

大小	√	?	?	√
方向	√	?	√	√



$$\mathbf{a}_{A'} = \mathbf{a}_B^\tau + \mathbf{a}_B^n + \mathbf{a}_{A'B}^\tau + \mathbf{a}_{A'B}^n$$

大小	?	√	√	?	√
方向	?	√	√	√	√

由于  $\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_{A'}$

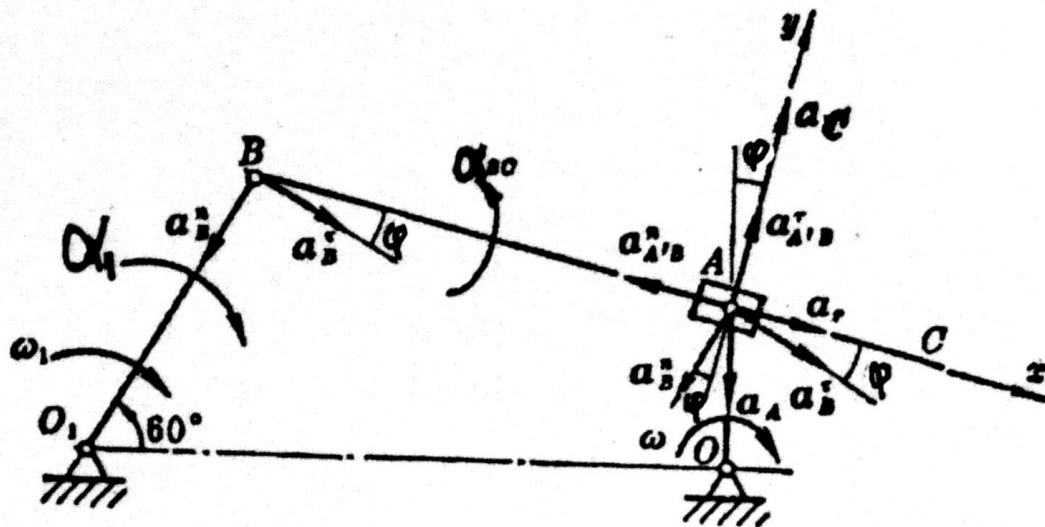
有

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B^\tau + \mathbf{a}_B^n + \mathbf{a}_{A'B}^\tau + \mathbf{a}_{A'B}^n + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C$$

大小	√	√	√	?	√	?	√
方向	√	√	√	√	√	√	√

取投影轴 $x$ 、 $y$ 投影，得

$$\begin{aligned} a_A \sin \varphi &= a_B^\tau \cos \varphi - a_B^n \sin \varphi - a_{A'B}^n + a_r \\ -a_A \cos \varphi &= -a_B^\tau \sin \varphi - a_B^n \cos \varphi + a_{A'B}^\tau + a_C \end{aligned}$$



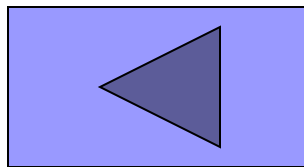
求得

$$a_r = (a_A + a_B^n) \sin \varphi - a_B \cos \varphi + a_{A'B}^n = 25.4 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

$$\alpha_{BC} = \frac{a_{A'B}^\tau}{A'B} = \frac{(a_B^n - a_A) \cos \varphi + a_B \sin \varphi - a_C}{A'B} = -125 \text{ (rad/s}^2\text{)}$$



# 第五章结束



# 理论力学

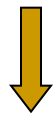
## 第六章 刚体的简单运动



刚体的运动



平行移动、定轴转动  
平面运动、定点运动、一般运动

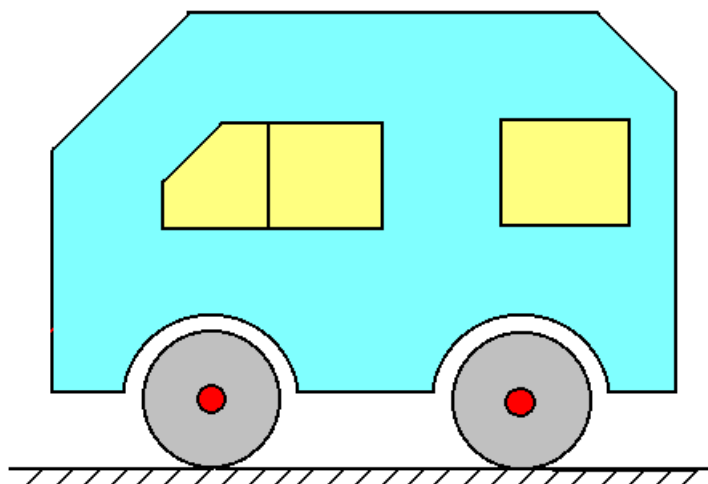


简单运动

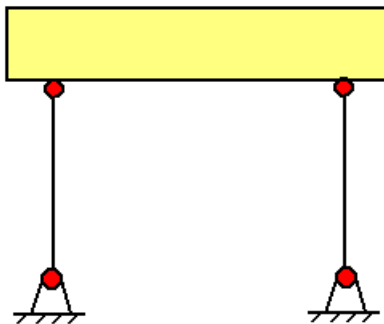


是指刚体的平行  
移动和定轴转动

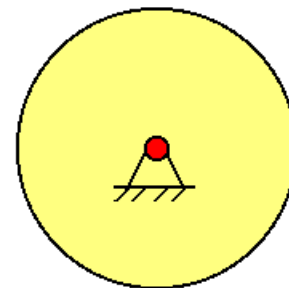
[例]



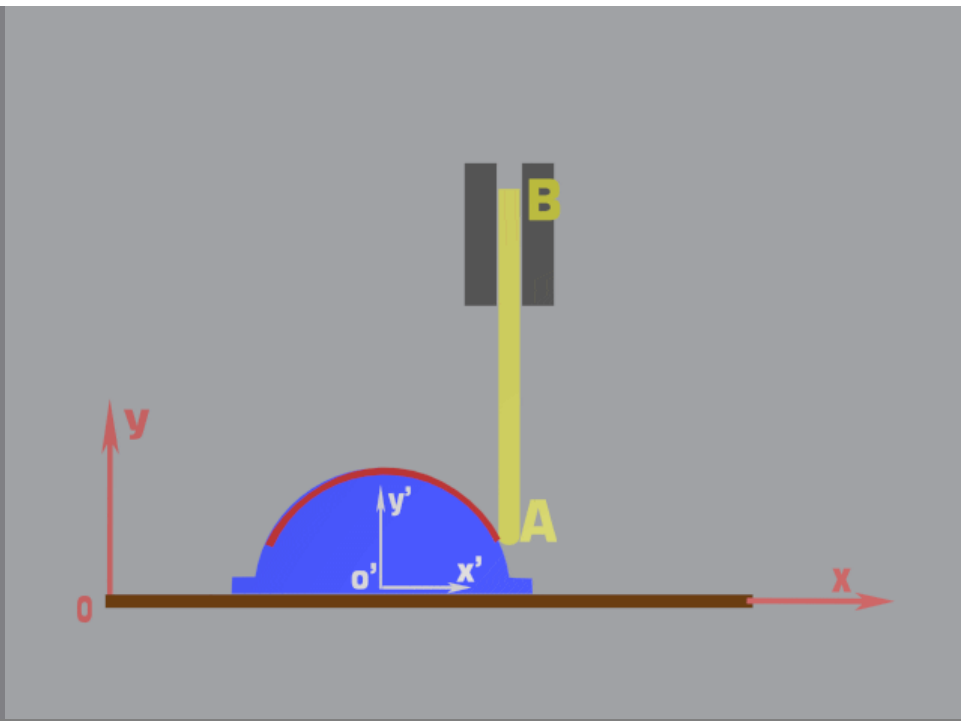
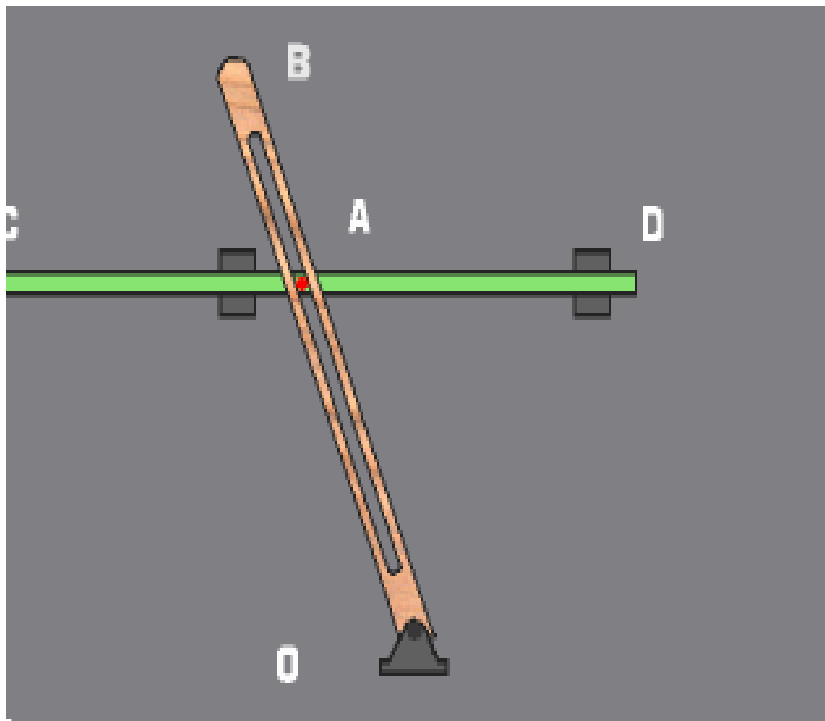
直线平移



曲线平移



定轴转动



*OB*作定轴转动  
*CD*作平移

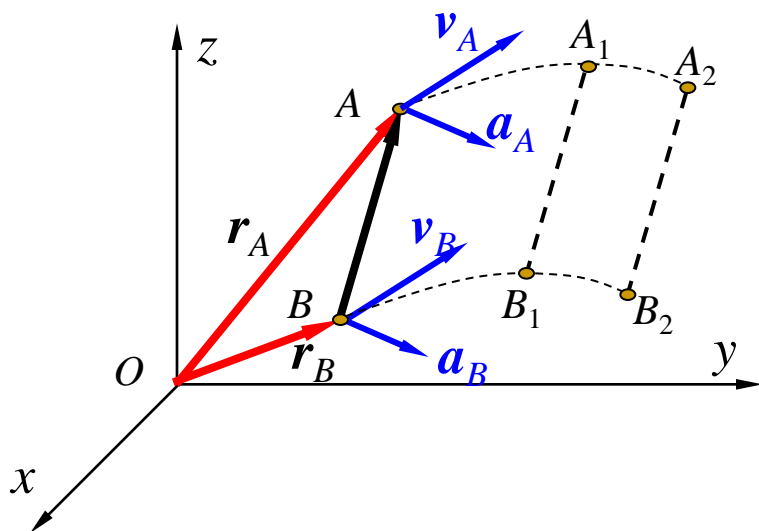
*AB*、凸轮均作平移

## § 6-1 刚体的平行移动

### 一、刚体平移的定义

平行移动（平移）：刚体在运动中，其上任意两点连线方向始终保持不变。

$$\vec{r}_A = \vec{r}_A(t), \quad \vec{r}_B = \vec{r}_B(t) \quad \longrightarrow \quad \vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{BA}$$



$BA$ 在运动中方向和大小始终不变

它的轨迹

可以是直线  
可以是曲线

直线平移、曲线平移

$$\therefore \vec{v}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_B + \vec{r}_{BA}) = \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \vec{v}_B (\because \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} = 0)$$

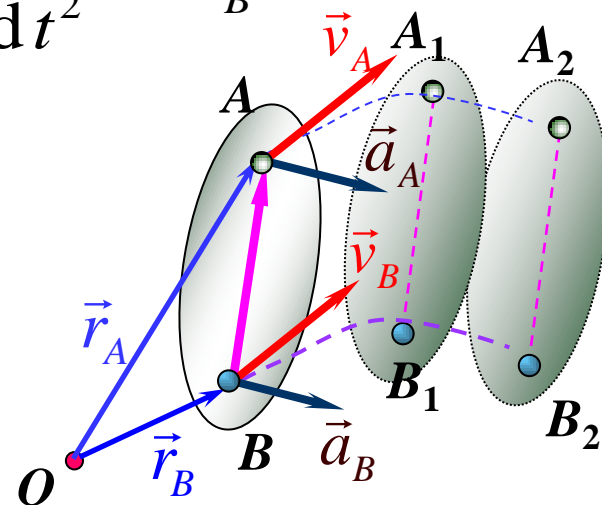
$$\text{同理: } \vec{a}_A = \frac{d^2 \vec{r}_A}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_B + \vec{r}_{BA}) = \frac{d^2 \vec{r}_B}{dt^2} = \vec{a}_B$$

得出结论:即

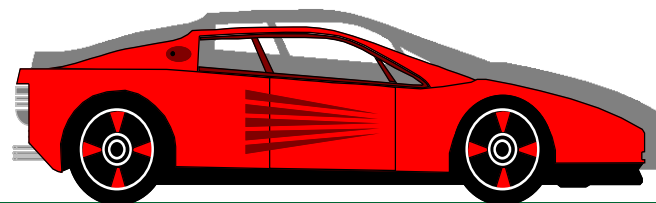
## 二、刚体平移的特点

平移刚体在任一瞬时各点的运动轨迹形状，速度和加速度都一样。

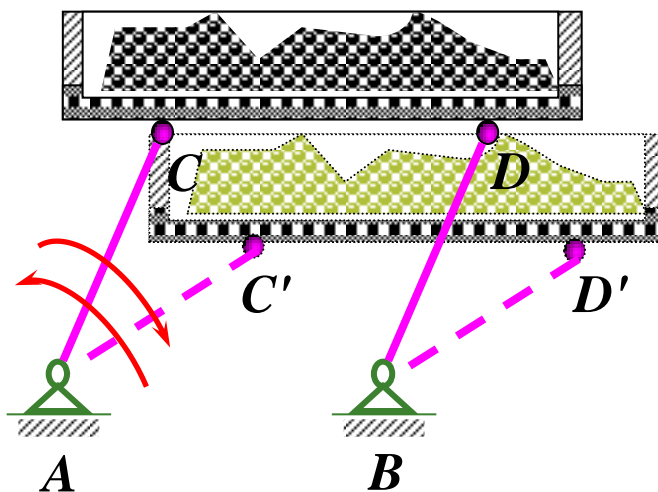
**即: 平移刚体的运动可以简化为一个点的运动。**



# 汽车直线平移行驶



筛分机构  
曲线平移



## § 6-2 刚体的定轴转动

### 一、刚体定轴转动

定轴转动:刚体运动时, 有上或其扩展部分有两点保持不动。通过两点的直线称为转轴, 不在转轴上的各点都在垂直于转轴的平面内做圆周运动。

### 二、转角和转动方程

$\varphi$  —— 转角, 单位弧度 (rad)

$\varphi = f(t)$  —— 为转动方程

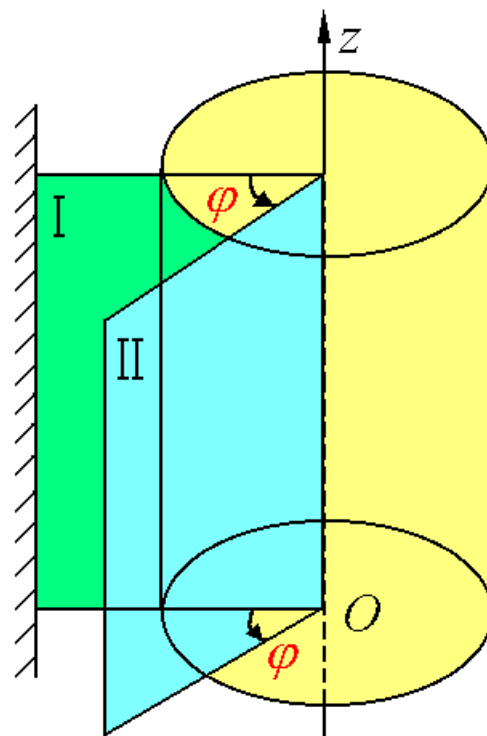
方向规定: 从  $z$  轴正向看去,



逆时针为正



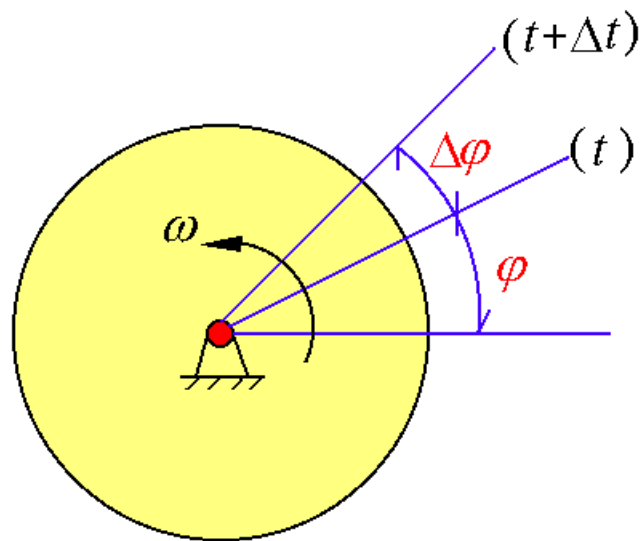
顺时针为负



### 三、定轴转动的角速度和角加速度

1、角速度 定义  $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$  代数量

若已知转动方程  $\varphi = f(t) \longrightarrow \omega = f'(t)$  单位 rad/s



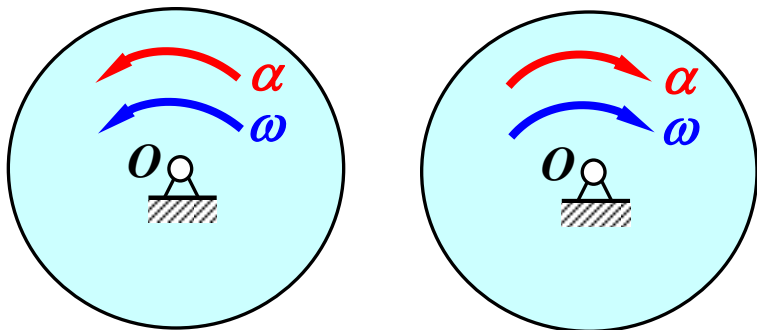
## 2、角加速度

设当 $t$ 时刻为 $\omega$ ,  $t + \Delta t$ 时刻为 $\omega + \Delta\omega$

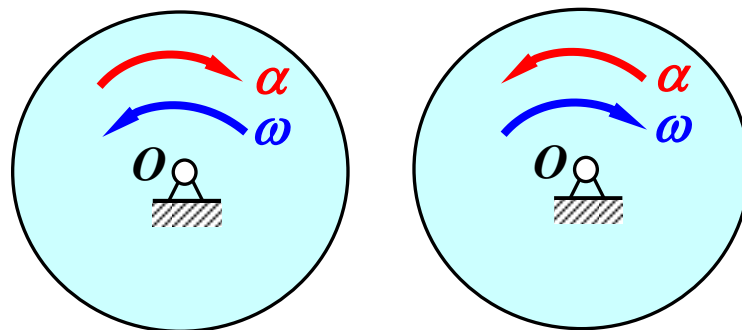
角加速度  $\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi} = f''(t)$  单位:  $\text{rad/s}^2$  (代数量)

如果 $\omega$ 与 $\alpha$ 同号, 则转动是**加速**的; 如果 $\omega$ 与 $\alpha$ 异号, 则转动是**减速**的。

$\omega$ 与 $\alpha$ 同号, 转动加速



$\omega$ 与 $\alpha$ 异号, 转动减速





### 3、匀速转动和匀变速转动

当 $\omega$ =常数，为匀速转动；当 $\alpha$ =常数，为匀变速转动。

常用公式 
$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha t \\ \varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \\ \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\varphi \end{cases}$$
 与点的运动相类似。

机器中的转动部件或零件，一般都在匀速转动情况下工作。转动的快慢用**转速** $n$ 表示，其单位为转/分(r / min=rpm)。

则 $n$ 与 $\omega$ 的关系为：
$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \text{ (rad/s)}$$

[例]车细螺纹时，如果车床主轴的转速 $n_0=300\text{r/min}$ ，要求主轴在转两圈后立即停车以便很快反转。设停车过程是匀变速转动，求停车过程中主轴的角加速度。

解：停车前，已知转速，可以求角速度。

$$\omega_0 = \frac{\pi n_0}{30} = \frac{\pi \times 300}{30} \text{ rad/s} = 10\pi \text{ rad/s}$$

主轴转两圈

$$\varphi = 2 \times 2\pi \text{ rad} = 4\pi \text{ rad}$$

主轴转动两圈后停止

$$\omega = 0$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\varphi \qquad 0 = (10\pi)^2 + 2\alpha \times 4\pi$$

$$\alpha = -\frac{100\pi^2}{8\pi} \text{ rad/s}^2 = -39.27 \text{ rad/s}^2$$

负号表示 $\alpha$ 的转向与主轴转动方向相反，故为减速运动。

## § 6-3 转动刚体内各点的速度和加速度

### 一、角速度 $\omega$ 与 $v$ 的关系

刚体定轴转动时，不在转轴上的各点都在垂直于转轴的平面内作**圆周运动**，圆心在轴线 $O$ 上，半径 $R$ 等于点到转轴的距离。

设刚体以 $\omega$ 从定平面 $A$ 绕定轴转动到 $B$ 处；转角 $\varphi$ 。

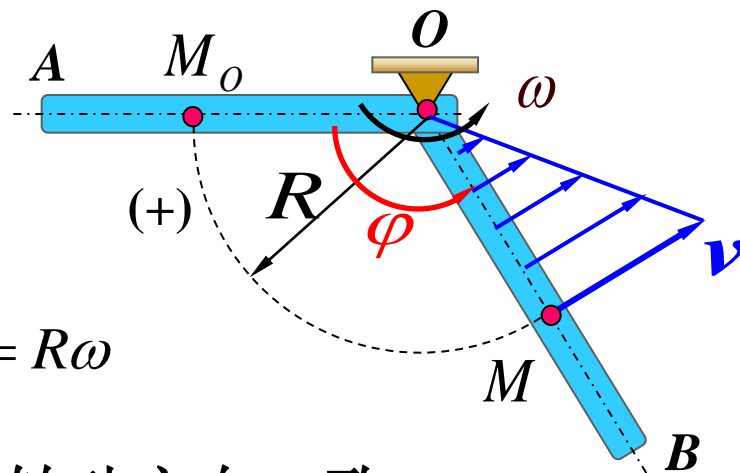
刚体上一点从 $M_o$ 转到 $M$ ，  
取 $M_o$ 为弧坐标原点。

定轴转动刚体上任一点做圆周运动

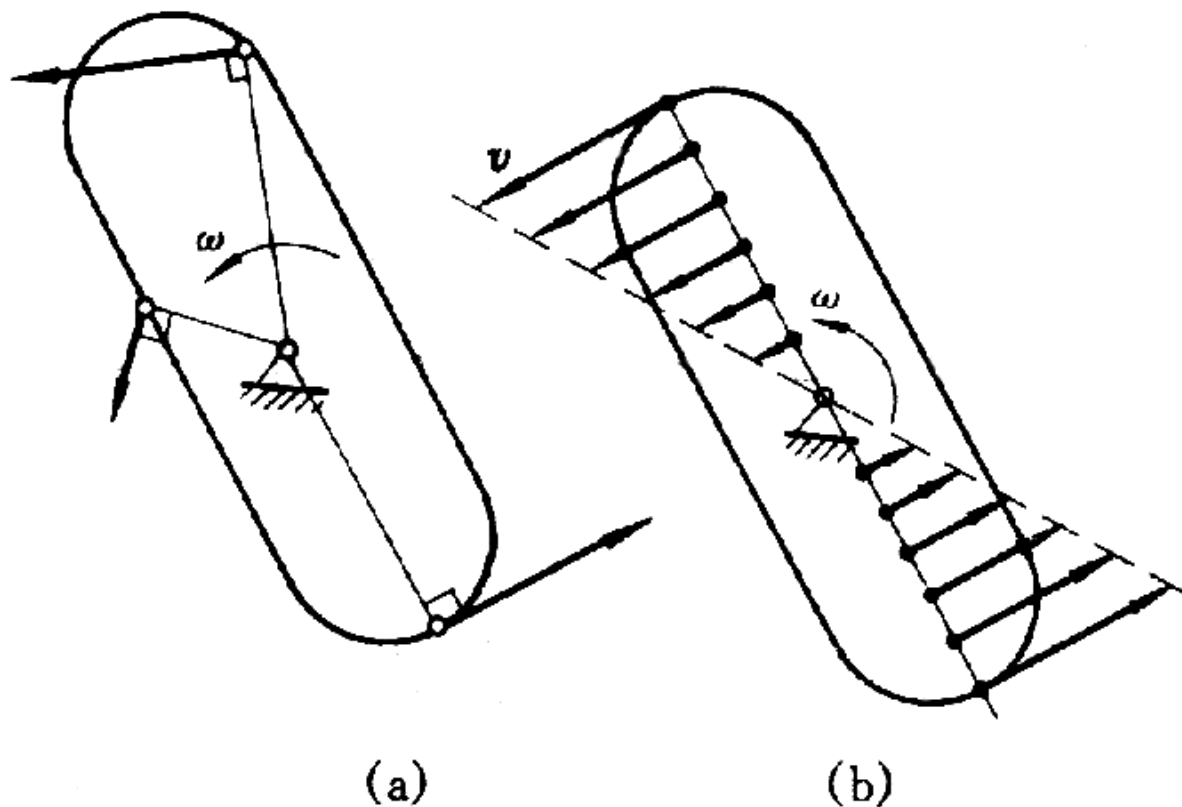
点的弧坐标： $s = R\varphi$

$$\text{速度: } v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(R\varphi)}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega$$

方向：沿圆周的切线, 指向与转动方向一致



即：转动刚体内任一点速度的大小等于刚体角速度与该点到轴线的垂直距离的乘积，它的方向沿圆周的切线而指向转动的一方。



## 二、角加速度 $\alpha$ 与 $a_n$ ， $a_t$ 的关系

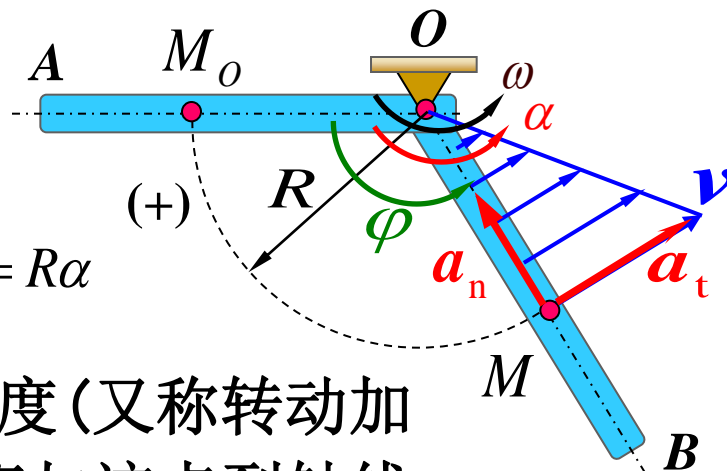
设角加速度如图所示

$$\text{切向加速度 } a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(R\omega) = R \frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

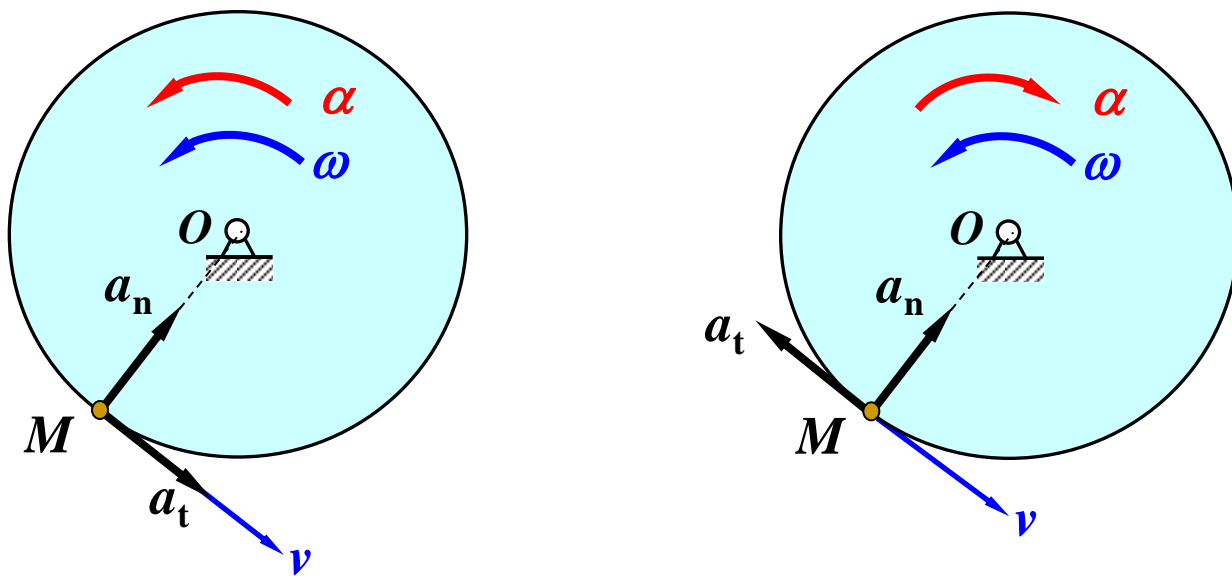
即：转动刚体内任一点的切向加速度(又称转动加速度)的大小，等于刚体的角加速度与该点到轴线垂直距离的乘积，它的方向由角加速度的符号决定，当 $\alpha$ 是正值时，它沿圆周的切线，指向角 $\varphi$ 的正向；否则相反。

$$\text{法向加速度: } a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(R\omega)^2}{R} = R\omega^2$$

即：转动刚体内任一点的法向加速度(又称向心加速度)的大小，等于刚体角速度的平方与该点到轴线的垂直距离的乘积，它的方向与速度垂直并指向轴线。



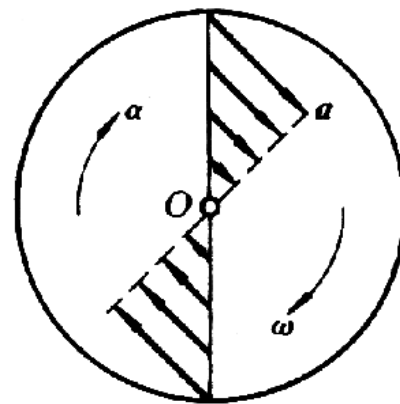
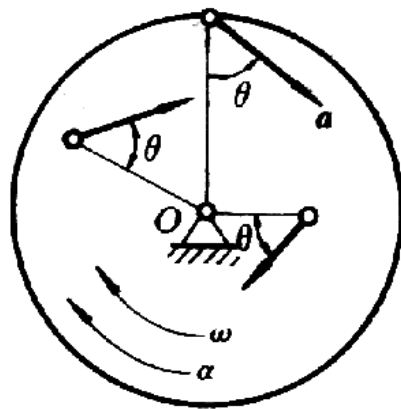
如果 $\omega$ 与 $\alpha$ 同号，角速度的绝对值增加，刚体作加速转动，这时点的切向加速度 $a_t$ 与速度 $v$ 的指向相同；如果 $\omega$ 与 $\alpha$ 异号，刚体作减速转动， $a_t$ 与 $v$ 的指向相反。这两种情况如图所示。



点的全加速度为：（一般情况下不合成）

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

$$\tan \theta = \frac{a_t}{a_n} = \frac{\alpha}{\omega^2}$$



(1) 在每一瞬时，转动刚体内所有各点的速度<sup>(a)</sup>和加速度<sup>(b)</sup>的大小，分别与这些点到轴线的垂直距离成正比。

(2) 在每一瞬时，刚体内所有各点的加速度 $a$ 与半径间的夹角 $\theta$ 都有相同的值。

[例]半径 $R=0.2\text{m}$ 的圆轮绕定轴 $O$ 的转动方程  $\varphi = -t^2 + 4t$ ，单位为弧度。求 $t=1\text{s}$ 时，轮缘上任一点 $M$ 的速度和加速度。如在此轮缘上绕一柔软而不可伸长的绳子并在绳端悬一物体 $A$ ，求当 $t=1\text{s}$ 时，物体 $A$ 的速度和加速度。

解：圆轮在任一瞬时的角速度和角加速度为

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = -2t + 4 \quad \alpha = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -2$$

当 $t=1\text{s}$ 时， $\omega=2\text{rad/s}$ ， $\alpha=2\text{rad/s}^2$

因此轮缘上任一点 $M$ 的速度和加速度为

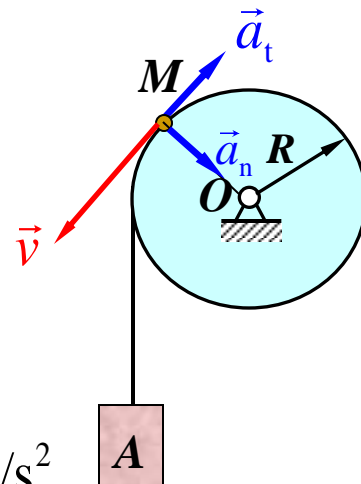
$$v = R\omega = 0.4\text{m/s} \quad a_t = R\alpha = -0.4\text{m/s}^2 \quad a_n = R\omega^2 = 0.8\text{m/s}^2$$

因为  $s_A = s_M$

方向如图所示。

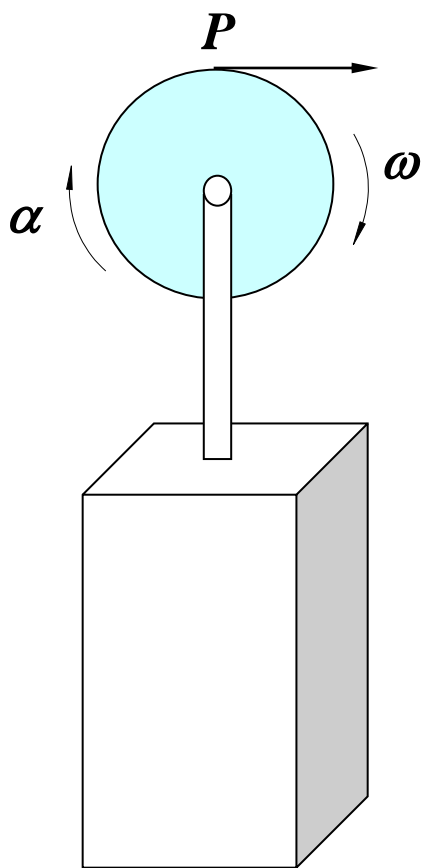
上式两边求一阶及二阶导数，则得  $v_A = v_M \quad a_A = a_M^t$

因此  $v_A = 0.4\text{m/s} \quad a_A = -0.4\text{m/s}^2$





[例] 在刮风期间，风车的角加速度  $\alpha = 0.2\varphi \text{ rad/s}^2$ ，其中转角  $\varphi$  以rad计。若初瞬时  $\varphi_0 = 0$ ， $\omega_0 = 6 \text{ rad/s}$ ，其叶片半径为  $0.75 \text{ m}$ 。试求叶片转过两圈（ $\varphi = 4\pi \text{ rad}$ ）时其顶端  $P$  点的速度。



解： 
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\varphi}$$

$$\omega \frac{d\omega}{d\varphi} = 0.2\varphi$$

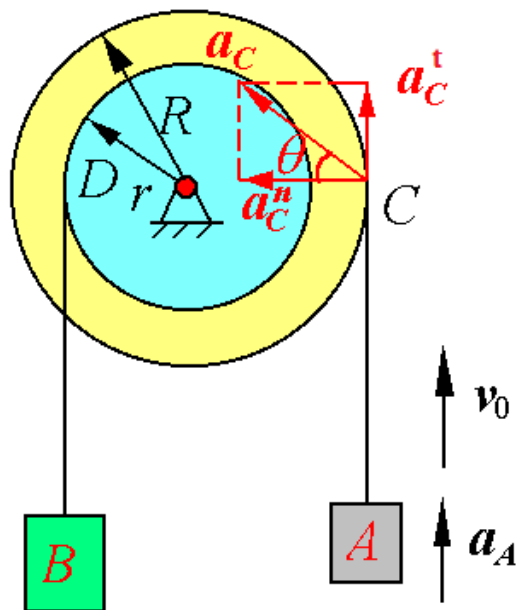
$$\int_{\omega_0}^{\omega} \omega d\omega = \int_0^{4\pi} 0.2\varphi d\varphi$$

$$\omega^2 = 0.2(4\pi)^2 + \omega_0^2$$

$$\therefore \omega = 8.221 \text{ rad/s}$$

$$v = R\omega = 6.166 \text{ m/s}$$

[例]已知：重物A的 $a_A=1\text{m/s}^2$ （常数），初瞬时速度 $v_0=1.5\text{m/s}$ 。  
方向如图示 $R=0.5\text{m}$ ， $r=0.3\text{m}$ 。求：



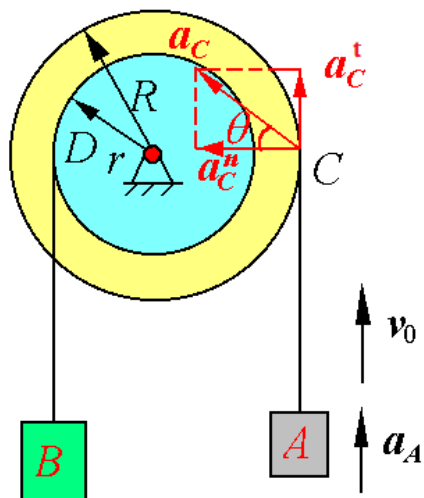
- ①滑轮3s内的转数；
- ②重物B在3s内的行程；
- ③重物B在  $t=3\text{s}$  时的速度；
- ④滑轮边上C点在初瞬时的加速度；
- ⑤滑轮边上C点在  $t=3\text{s}$  时的加速度。

解：① 因为绳子不可以伸长，所以有  $a_C^t = a_A = 1\text{m/s}^2$

$$\alpha = \frac{a_C^t}{R} = \frac{1}{0.5} = 2 \text{ rad/s}^2 \quad ( \uparrow ) \text{ 常数}$$

$$v_C = v_A = 1.5\text{m/s}, \quad \omega_0 = \frac{v_C}{R} = \frac{1.5}{0.5} = 3\text{rad/s} \quad ( \uparrow )$$

$$\therefore \varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 = 3 \times 3 + \frac{1}{2} \times 2 \times 3^2 = 18\text{rad}, \quad n = \frac{\varphi}{2\pi} = 2.86(\text{圈})$$

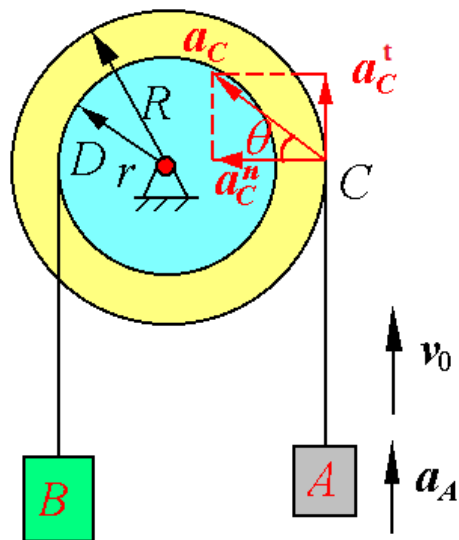


$$\textcircled{2} \quad s = r\varphi = 0.3 \times 18 = 5.4\text{m}$$

$$\textcircled{3} \quad \omega = \omega_0 + \alpha t = 3 + 2 \times 3 = 9 \text{ rad/s} \quad ( \uparrow )$$

$$v_B = r\omega = 0.3 \times 9 = 2.7\text{m/s}$$

④  $t = 0$  时,



$$a_C^t = a_A = 1 \text{ m/s}^2$$

$$a_C^n = R \cdot \omega_0^2 = 0.5 \times 3^2 = 4.5 \text{ m/s}^2$$

$$\therefore a_C = \sqrt{(a_C^t)^2 + (a_C^n)^2} = \sqrt{1^2 + 4.5^2} = 4.61 \text{ m/s}^2$$

$$\tan \theta = \frac{a_C^t}{a_C^n} = \frac{1}{4.5} = 0.222, \quad \theta = 12.5^\circ$$

⑤  $t=3\text{s}$  时,  $a_C^t = a_A = 1 \text{ m/s}^2$ ,  $a_C^n = R \cdot \omega^2 = 0.5 \times 9^2 = 40.5 \text{ m/s}^2$

$$\therefore a_C = \sqrt{1^2 + 40.5^2} = 40.51 \text{ m/s}^2, \quad \tan \theta = \frac{1}{40.51} = 0.0247, \quad \theta = 1.41^\circ$$

[例] 已知：圆轮 $O$ 由静止开始作等加速转动， $OM=0.4\text{m}$ ，  
在某瞬时测得  $a_M = 4 \text{ m/s}^2$ ， $\theta = 30^\circ$

求：转动方程， $t=5\text{s}$ 时， $M$ 点的速度和法向加速度的大小。

解：  $a_t = R\alpha = a \sin \theta$

$$\therefore \alpha = \frac{a_t}{R} = \frac{a \sin \theta}{R} = \frac{4 \times \sin 30^\circ}{0.4} = 5 \text{ rad/s}^2$$

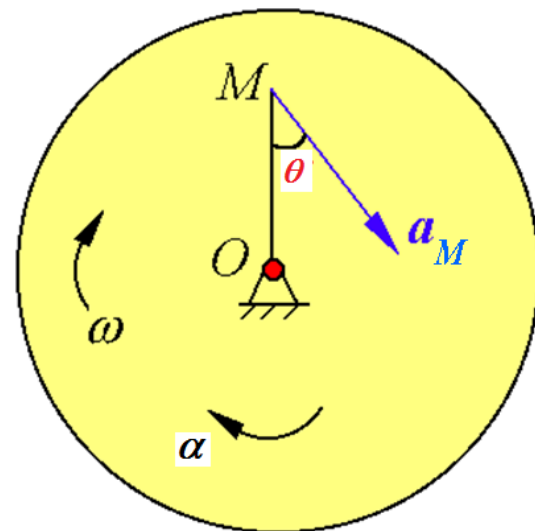
$$\therefore \omega_0 = 0$$

$$\therefore \varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 = \frac{1}{2} \times 5 \times t^2 = 2.5t^2$$

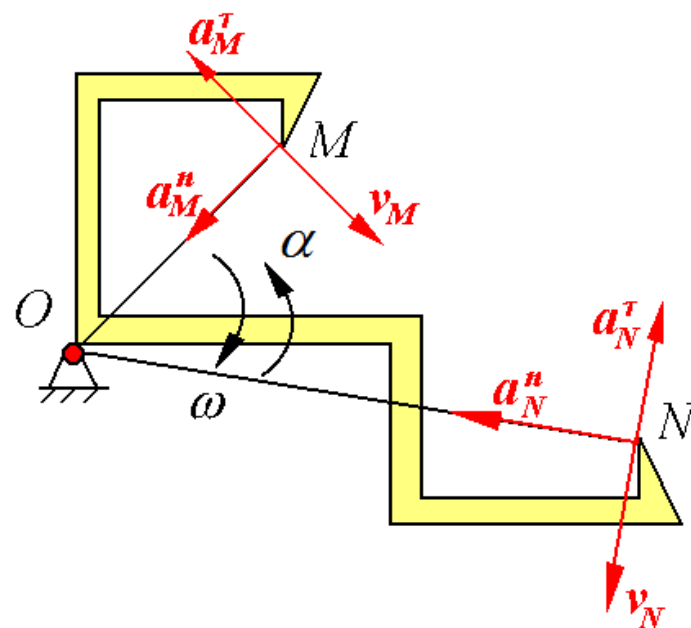
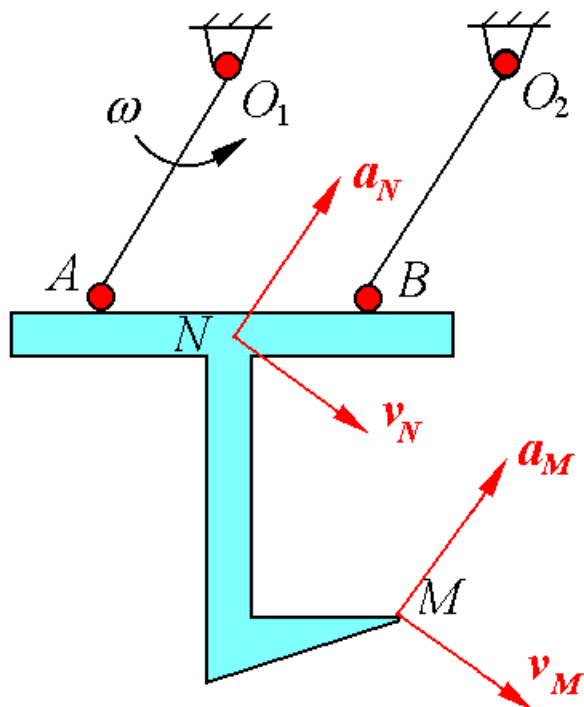
$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 5t, \quad v_M = R\omega = 0.4 \times 5t = 2t$$

$$\therefore \text{当 } t=5\text{s} \text{ 时, } v_M = 2 \times 5 = 10\text{m/s}$$

$$a_M^n = \frac{v_M^2}{R} = \frac{10^2}{0.4} = 250\text{m/s}^2$$



[例]试画出图中刚体上  $M$ ,  $N$  两点在图示位置时的速度和加速度。  
 ( $O_1A = O_2B$ ,  $O_1O_2 = AB$ )



## § 6-4 轮系的传动比

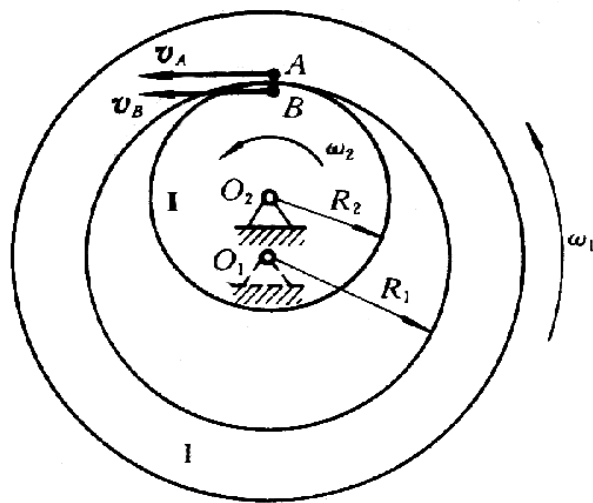
我们常见到在工程中,用一系列互相啮合的齿轮来实现变速,它们变速的基本原理是什么呢?

### 一、齿轮传动

因为两齿轮间没有相对滑动

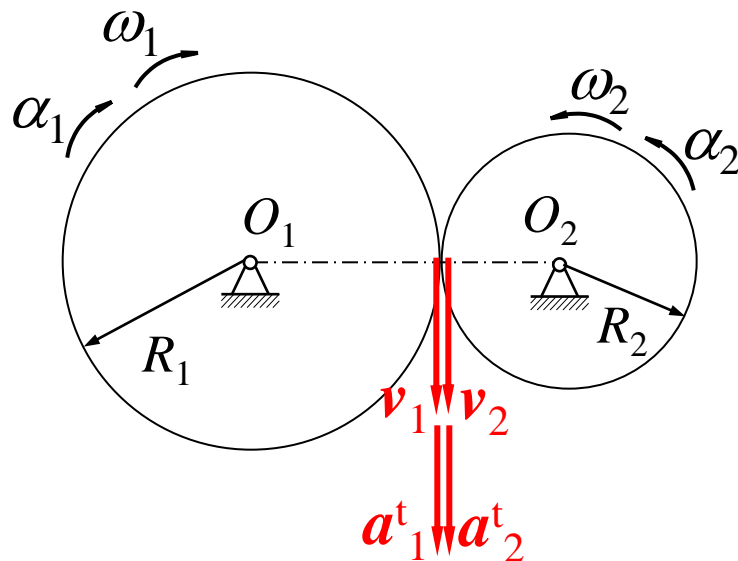
$$\therefore v_A = v_B$$

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$$



图中 I 为主动轮, II 为从动轮。

齿轮传动比 =  $\frac{\text{主动轮转速}}{\text{从动轮转速}} \rightarrow i_{12} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{Z_2}{Z_1}$



适合链条传动



$$i_{12} = \frac{\text{主动轮转速}}{\text{从动轮转速}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{Z_2}{Z_1}$$

显然当：  $i_{12} < 1$  时，  $\omega_2 > \omega_1$  ， 为加速转动；

$i_{12} > 1$  时，  $\omega_2 < \omega_1$  ， 为减速转动。

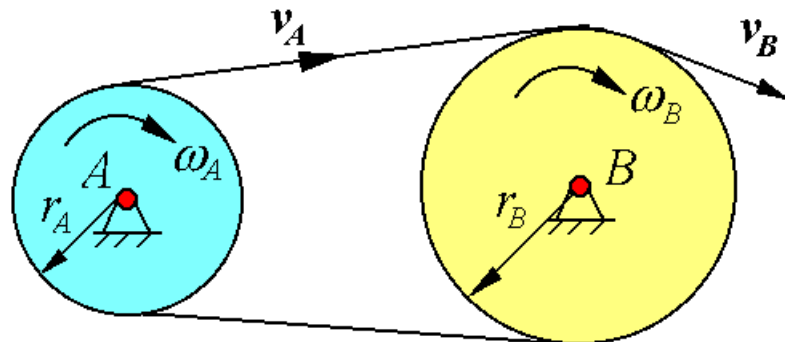
大轮（主动轮）带动小轮（从动轮）  $\longrightarrow$  加速

小轮（主动轮）带动大轮（从动轮）  $\longrightarrow$  减速

## 二、带轮系传动

$\because v_A = v_B$  (而不是  $\vec{v}_A = \vec{v}_B$   $\because$  方向不同)

$$\therefore \omega_A r_A = \omega_B r_B \therefore \text{皮带传动 } i_{AB} = \frac{\omega_A}{\omega_B} = \frac{r_B}{r_A}$$



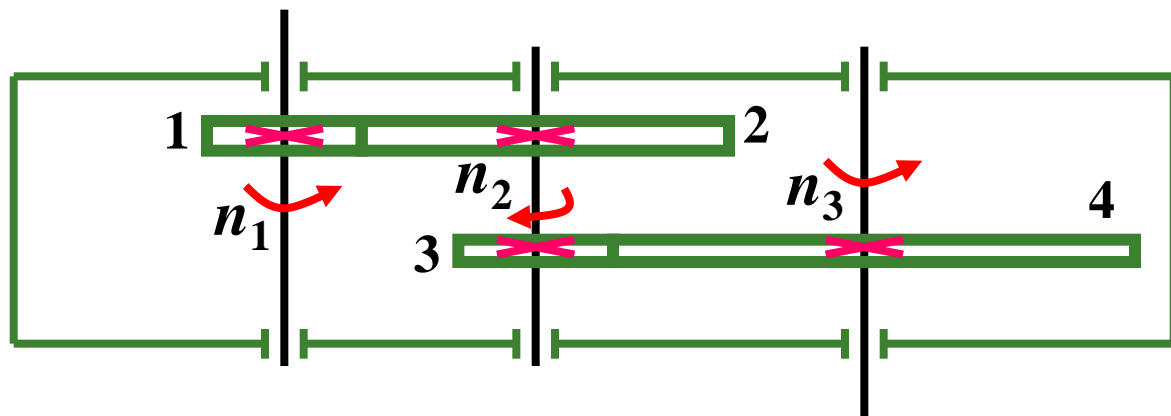
## 三、多级传动（链轮系）

设有：A,B,C,D,E,F,G,H 轮系，则总传动比为：

$$\begin{aligned} i_{AH} &= \frac{n_A}{n_H} = \frac{\omega_A}{\omega_H} = \frac{\omega_A}{\omega_B} \cdot \frac{\omega_B}{\omega_C} \cdot \frac{\omega_C}{\omega_D} \cdot \frac{\omega_D}{\omega_E} \cdot \frac{\omega_E}{\omega_F} \cdot \frac{\omega_F}{\omega_G} \cdot \frac{\omega_G}{\omega_H} \\ &= i_{AB} \cdot i_{BC} \cdot i_{CD} \cdot i_{DE} \cdot i_{EF} \cdot i_{FG} \cdot i_{GH} \end{aligned}$$

**总传动比等于各级传动比的连乘积**

[例]下图是一减速箱，它由四个齿轮组成，其齿数分别为  $Z_1=10$ ， $Z_2=60$ ， $Z_3=12$ ， $Z_4=70$ 。(a)求减速箱的总传动比 $i_{13}$ ；  
(b)如果 $n_1=3000\text{r/min}$ ，求 $n_3$ 。



解：求传动比：

$$i_{13} = \frac{n_1}{n_3} = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{n_2}{n_3} = \frac{Z_2}{Z_1} \frac{Z_4}{Z_3} = 34.8$$

则有：

$$n_3 = \frac{n_1}{i_{13}} = \frac{3000}{34.8} = 86\text{r/min}$$

## § 6-5 角速度和角加速度的矢量表示 点的速度和加速度的矢量表示

### 一、角速度和角加速度的矢量表示

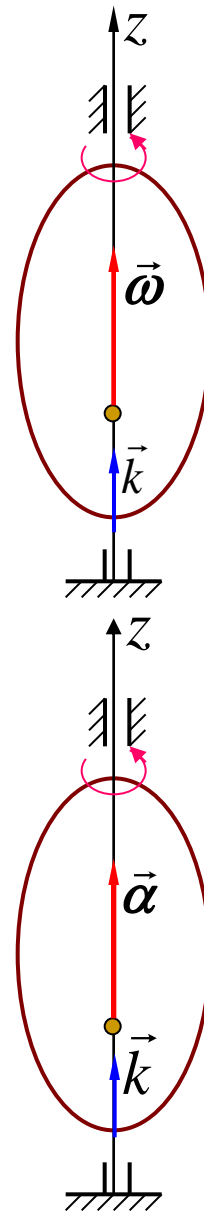
角速度矢量  $\vec{\omega}$  从转轴上任一点画出，指向由右手法则确定。 $|\vec{\omega}| = |\omega| = |\dot{\phi}|$

以  $\vec{k}$  表示  $z$  轴的单位矢量，如图，则

$$\vec{\omega} = \omega \vec{k} = \dot{\phi} \vec{k}$$

对上式求导，  
则角加速度矢量  $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \vec{k} = \alpha \vec{k}$  如图。

角速度矢量和角加速度矢量均为滑动矢量。当二者方向相同时，刚体越转越快；当二者方向相反时，刚体越转越慢。



## 二、刚体内任一点的速度和加速度的矢积表示

如图，在轴线上任选一点 $O$ 为原点，动点的矢径用 $\vec{r}$ 表示，则点 $M$ 的速度可以用角速度矢与它的矢径的矢量积表示。

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

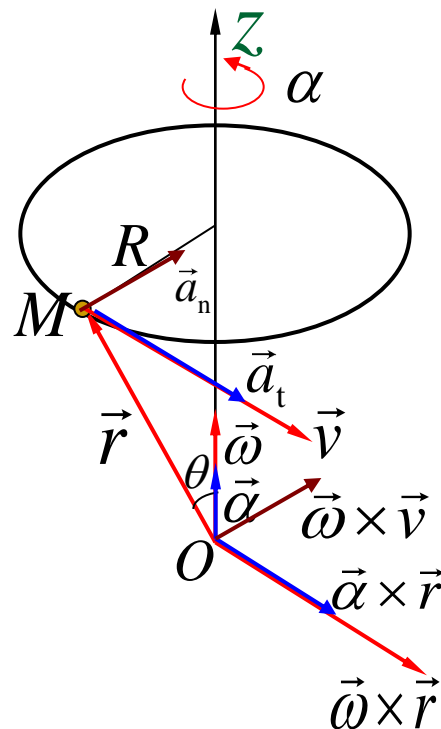
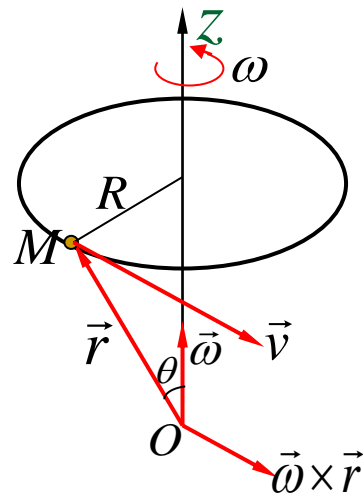
将上式对时间求一阶导数，有

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

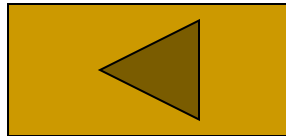
$$\text{即} \quad \vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$\text{于是} \quad \vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r} \quad \vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

如图所示。



# 本章结束



# 理论力学

## 第七章 点的合成运动

研究点和刚体的运动



实际问题中需要



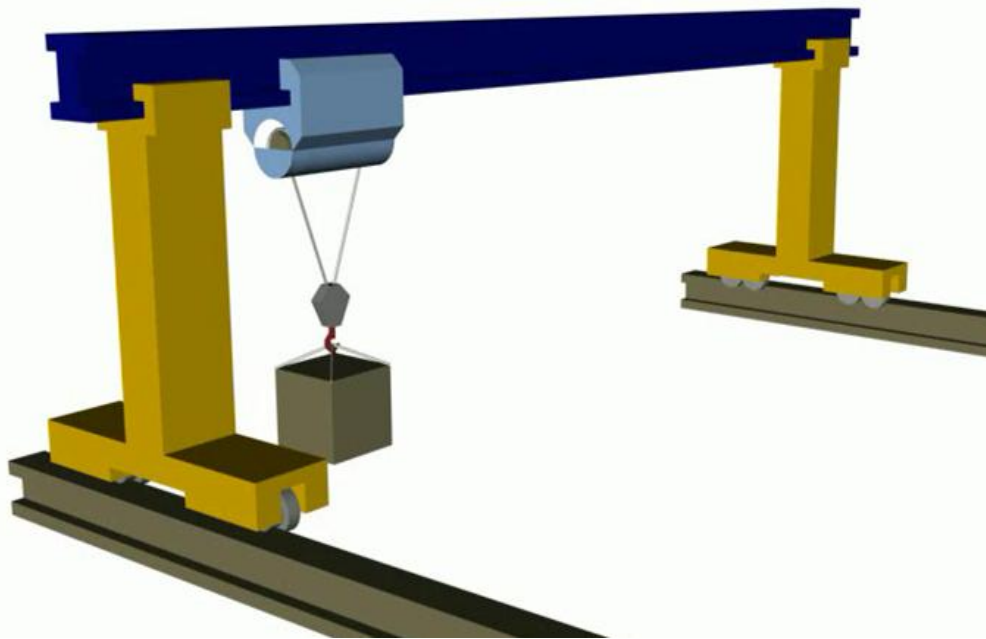
地面为参考系

不同参考系上观察物体  
的运动会有不同的结果



相对于地面运动的  
物体为参考系

起重机吊起重物

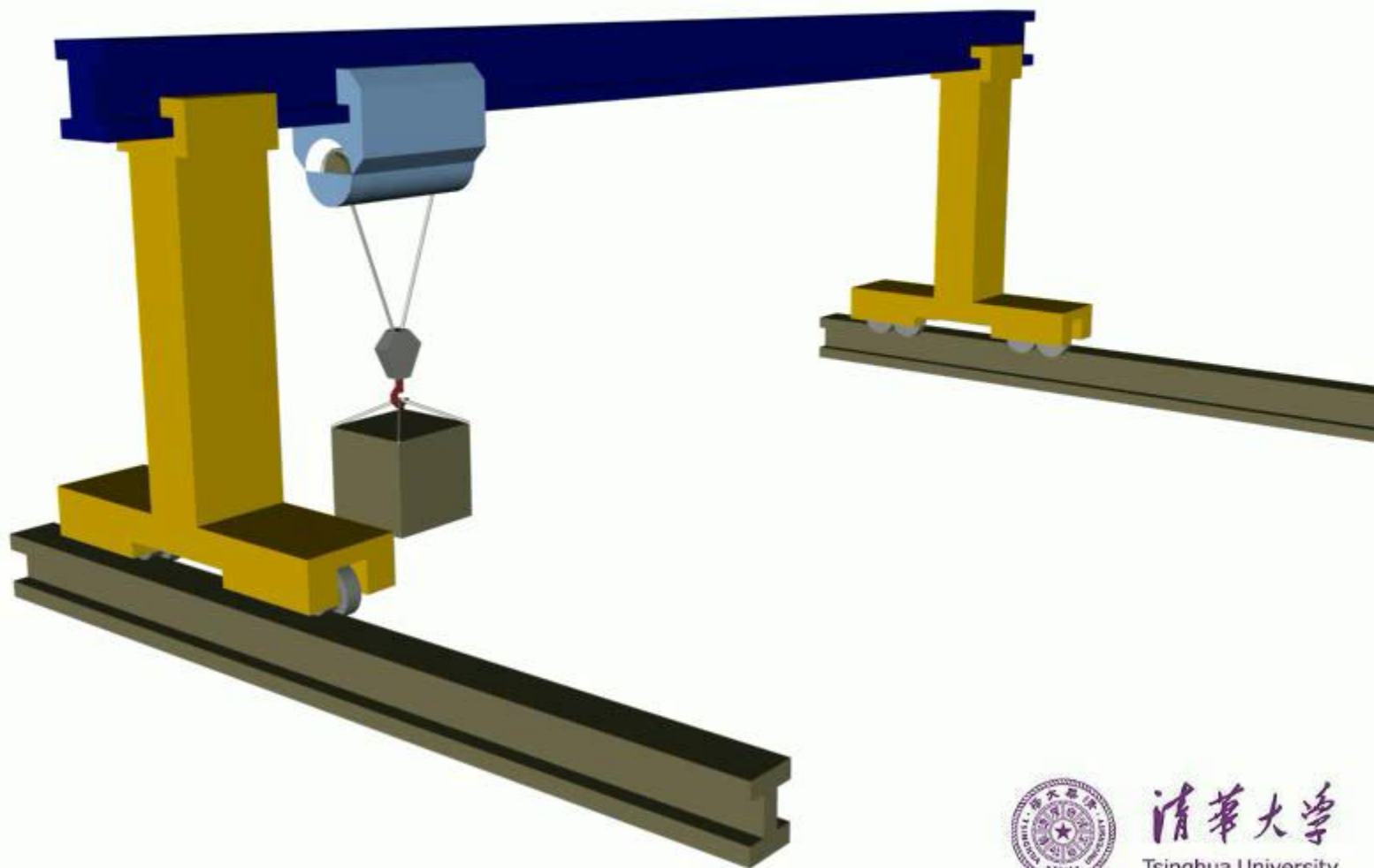


螺旋桨的运动





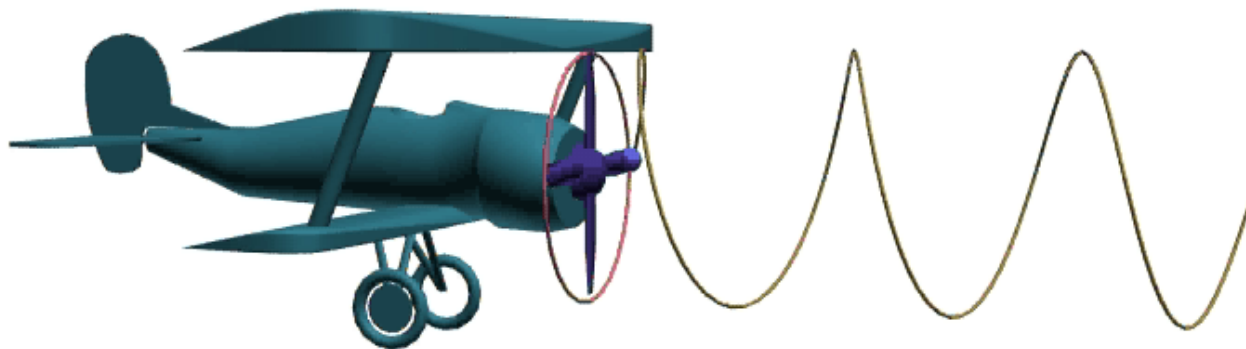
## 起重机吊起重物



清华大学  
Tsinghua University



# 螺旋桨的运动

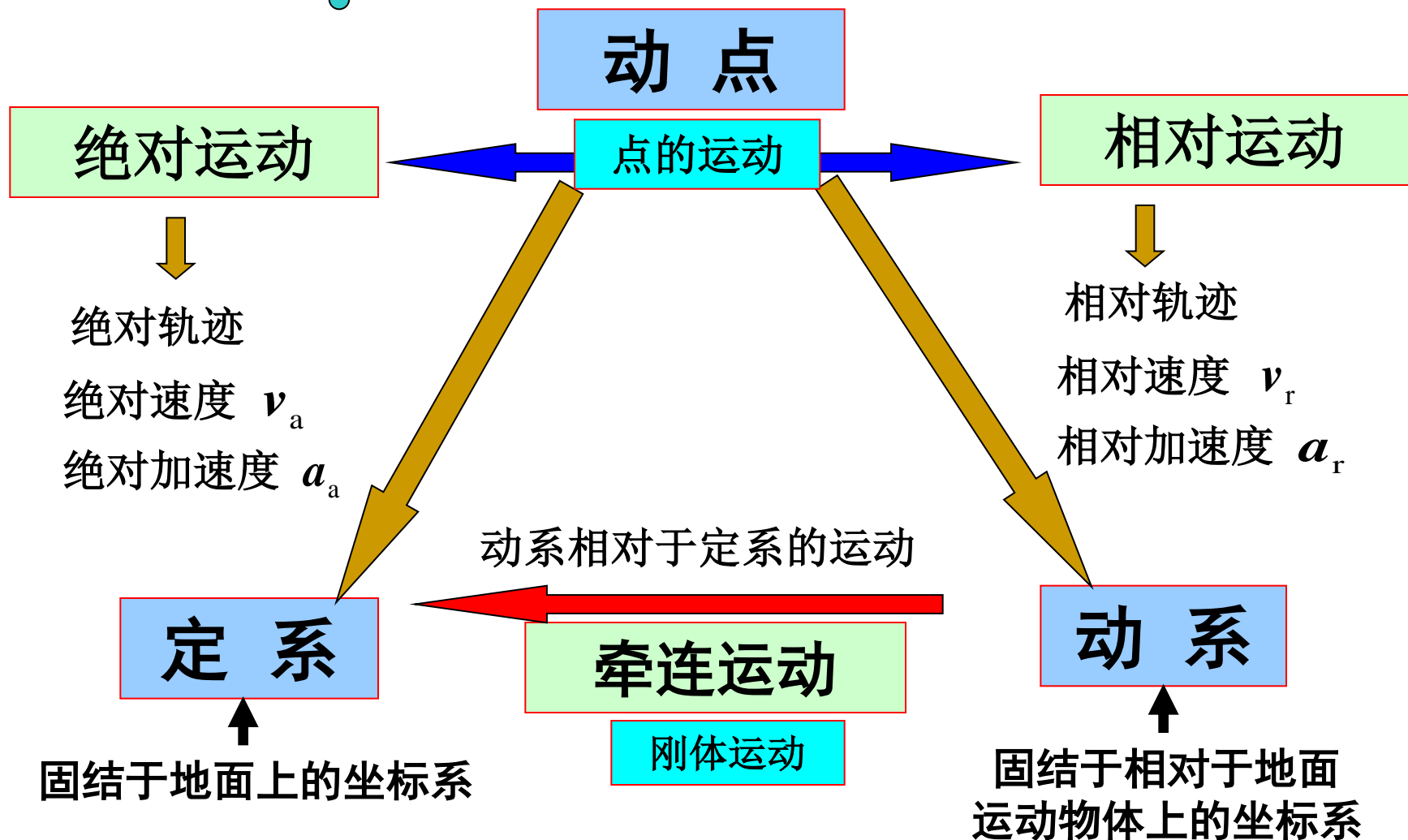


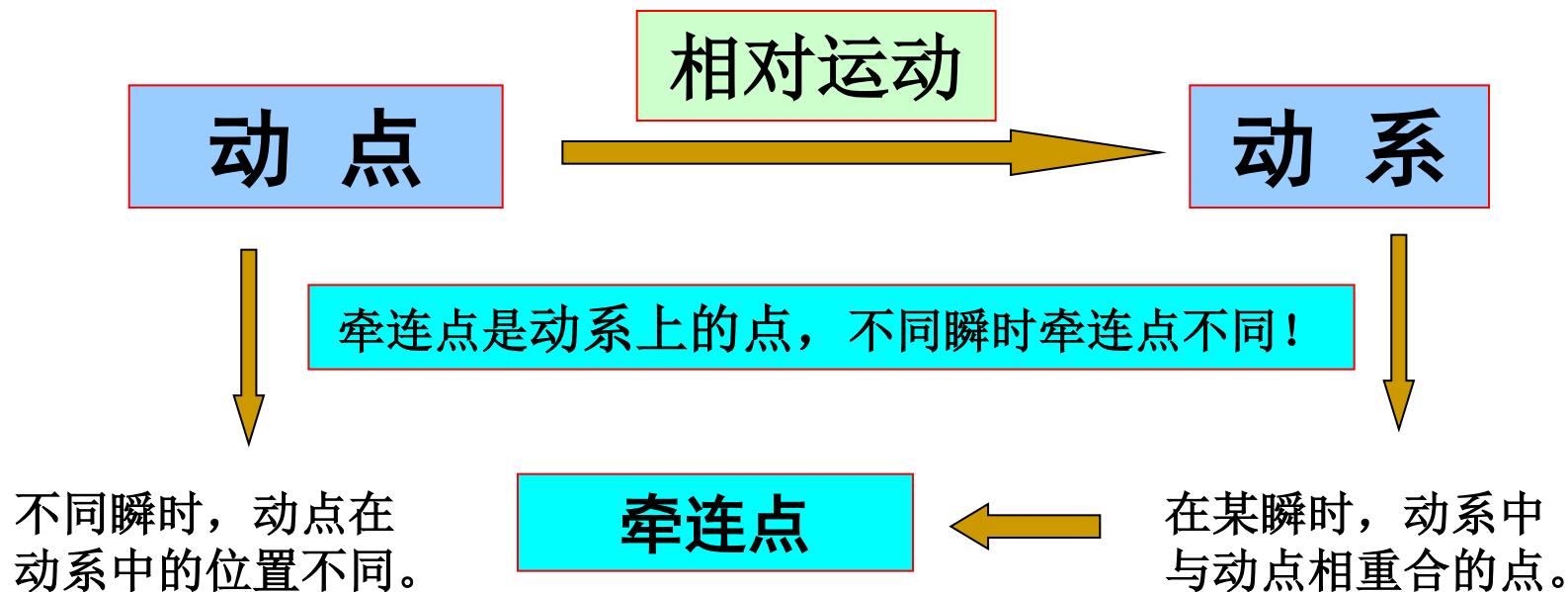
## 车辆轮缘上点 $P$ 的运动分析



相对某一参考体的运动可由相对于其他参考体的几个运动的组合而成一合成运动。

## § 7-1 点的合成运动概念



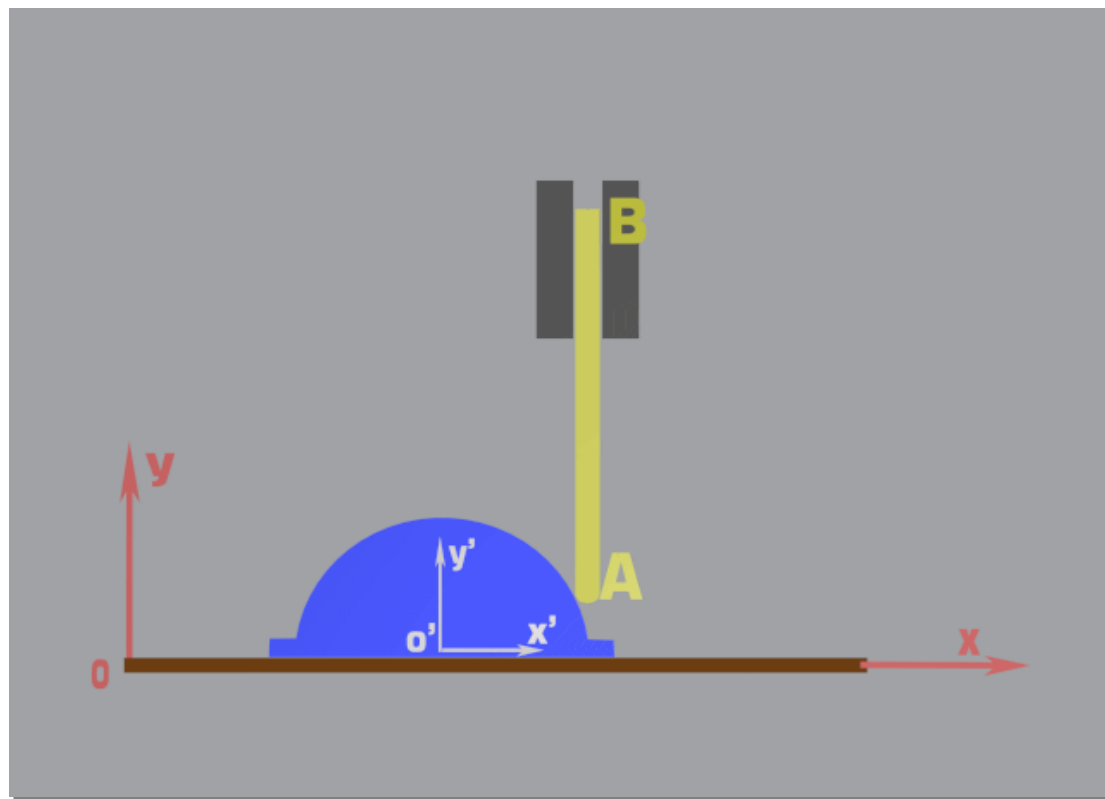


牵连点对定系的速度和加速度分别称为

**动点**的**牵连速度**  $v_e$ 与**牵连加速度**  $a_e$ 。

设想该瞬时将该动点固结在动系上，而随着动系一起运动所具有的速度和加速度。即受动参考系这个刚体的**拖带**或**牵连**而产生的速度和加速。

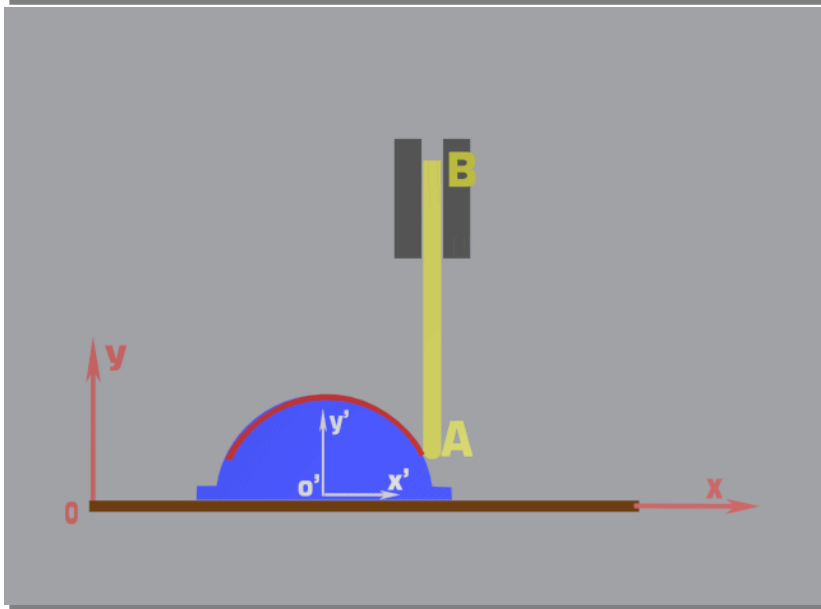
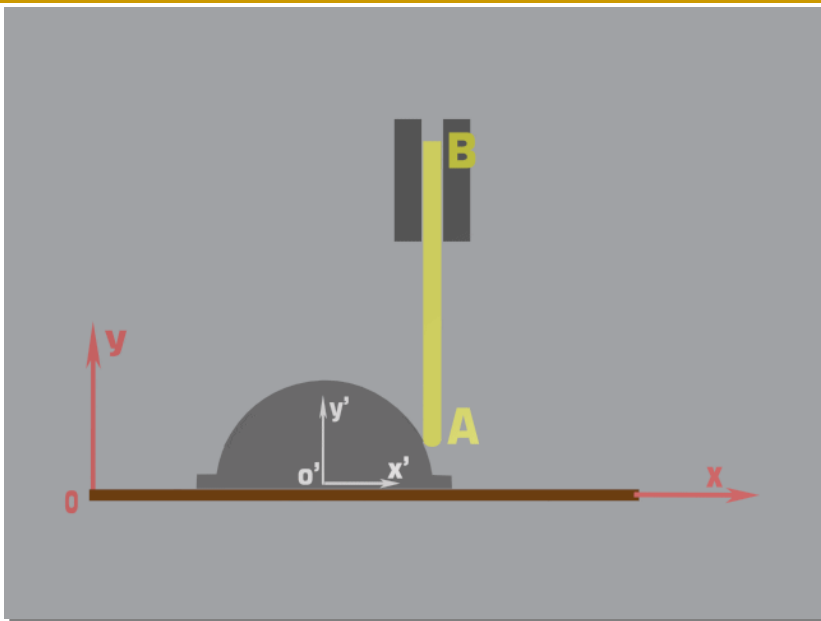
## 凸轮顶杆机构



动点：  $AB$ 杆上A点

动系：固结于凸轮上

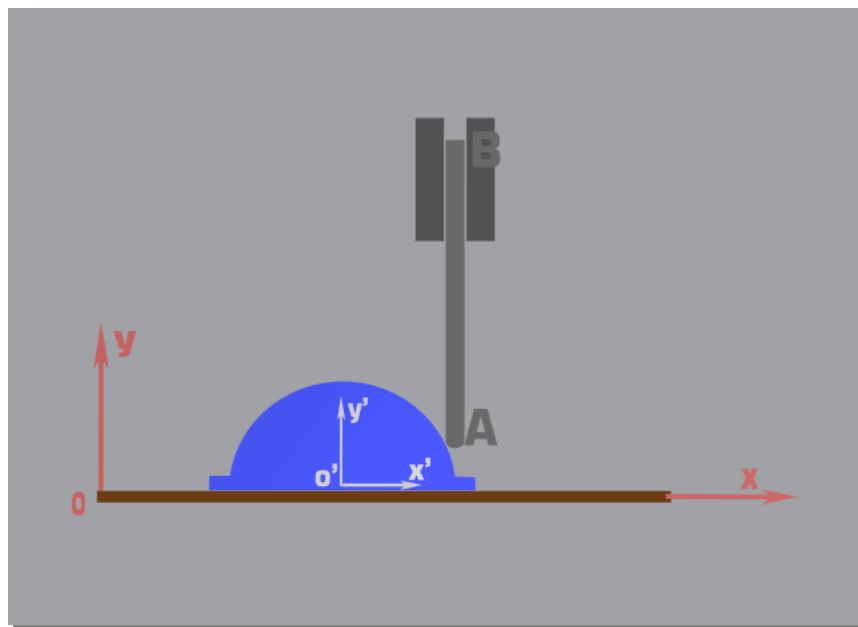
定系：固结在地面上



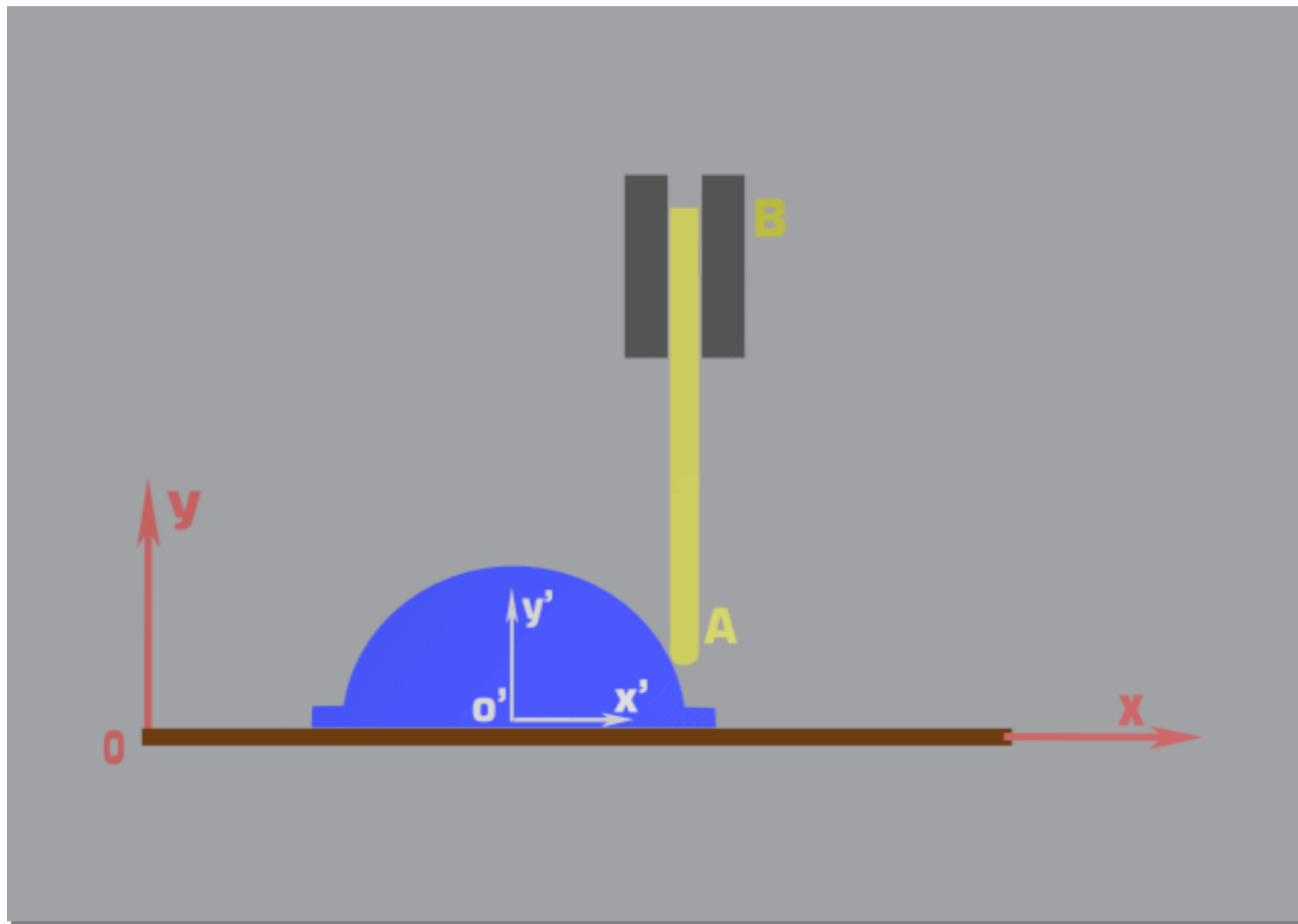
绝对运动：铅直运动

相对运动：曲线(圆弧)运动

牵连运动：凸轮直线平移



绝对速度： $v_a$       相对速度： $v_r$       牵连速度： $v_e$

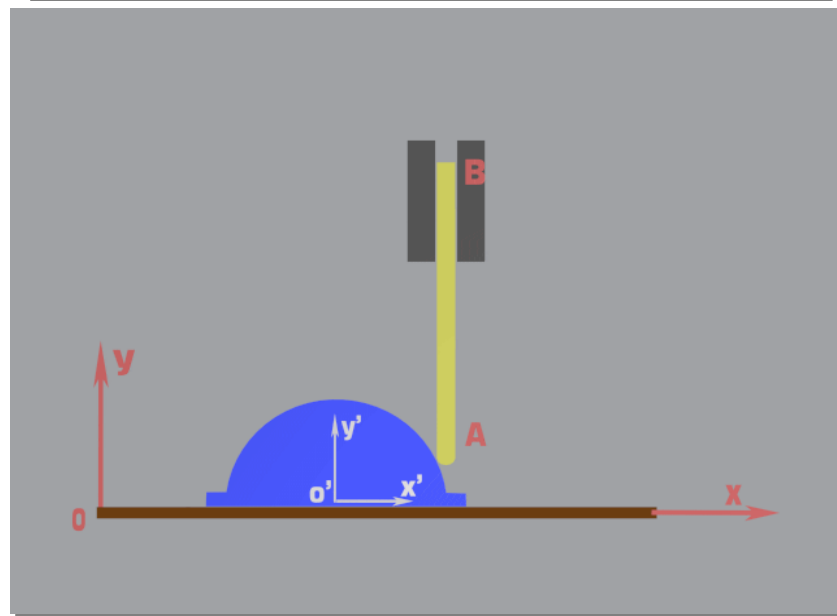
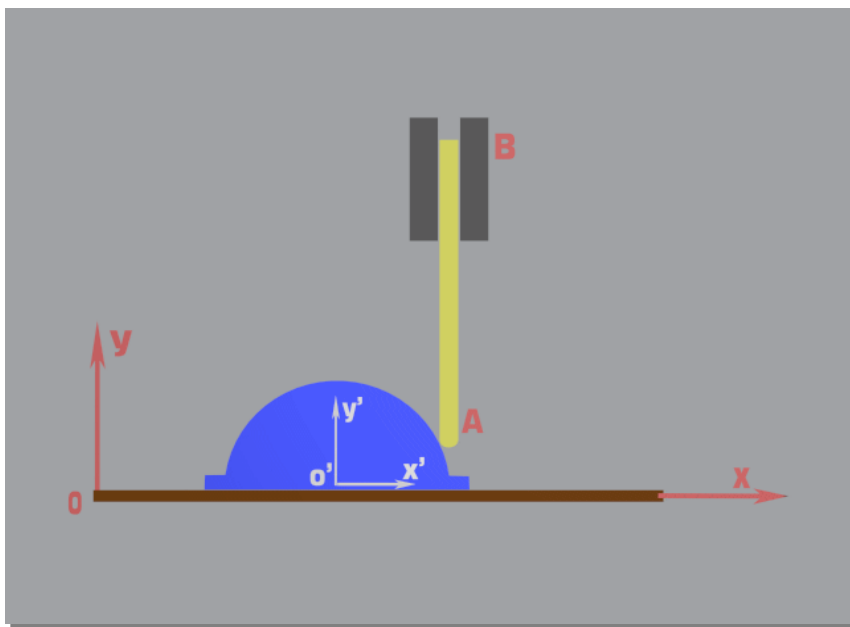
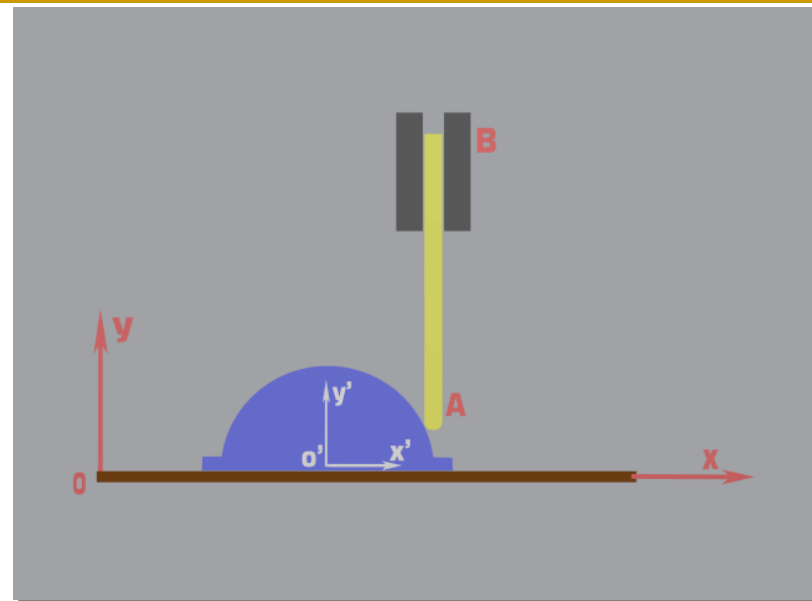


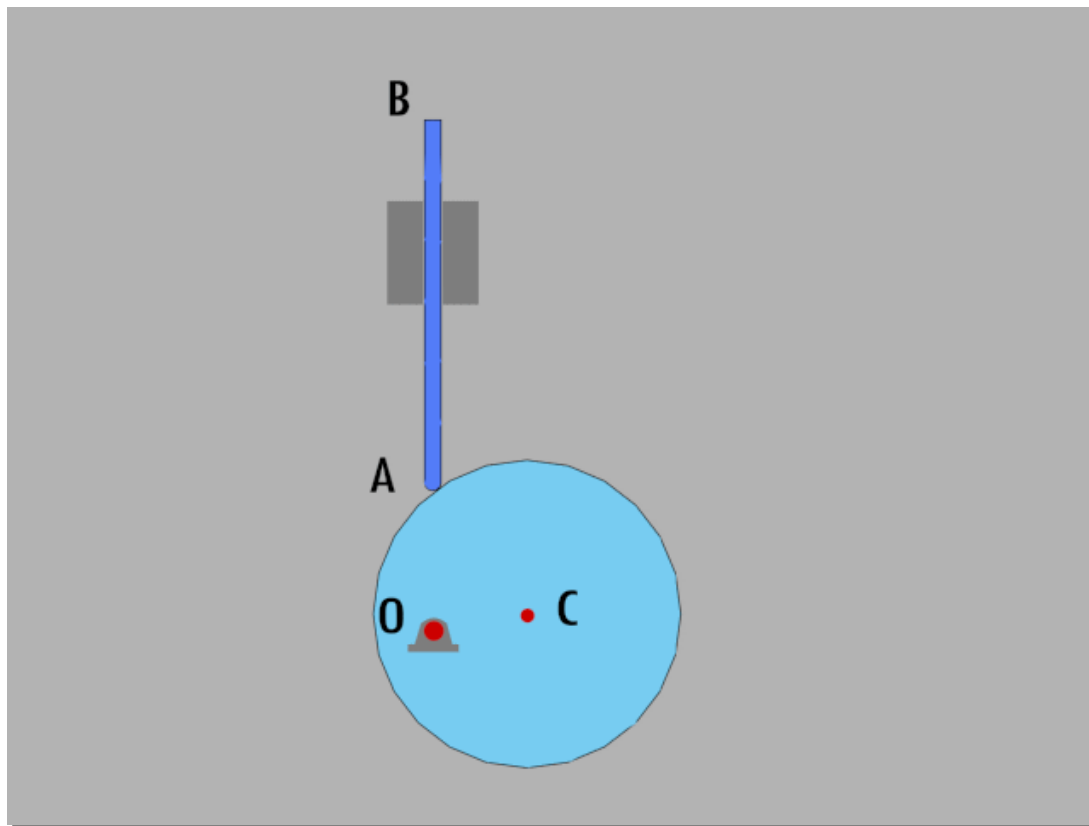


绝对加速度:  $a_a$

相对加速度:  $a_r$

牵连加速度:  $a_e$

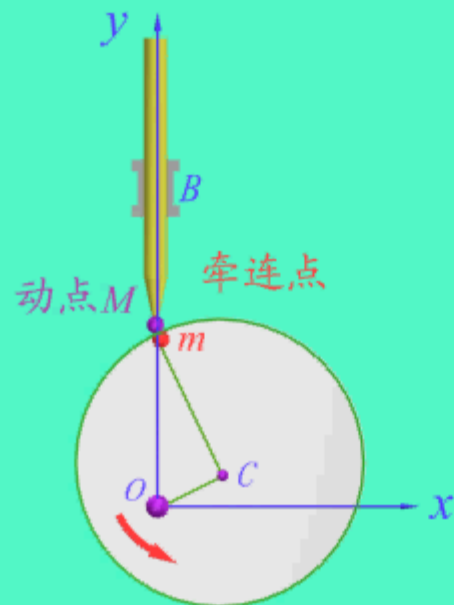




动点:  $AB$ 杆上的A点  
动系: 偏心轮

绝对运动: 直线  
相对运动: 圆周 (曲线)  
牵连运动: 定轴转动

## 点的复合运动--牵连点



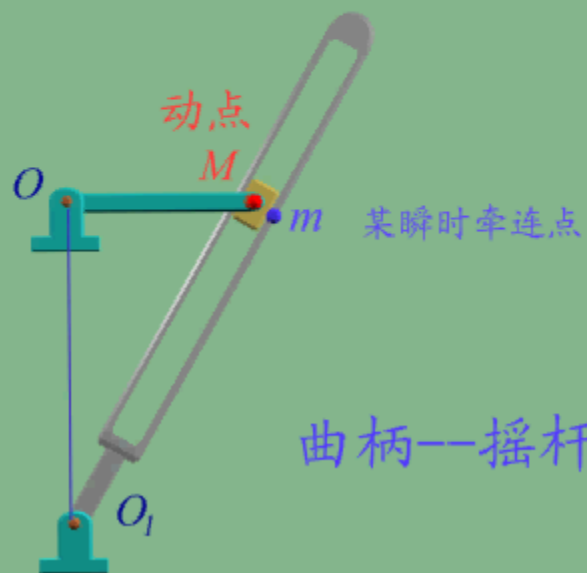
由于相对运动，不同瞬时牵连点的位置也不同

偏心凸轮机构



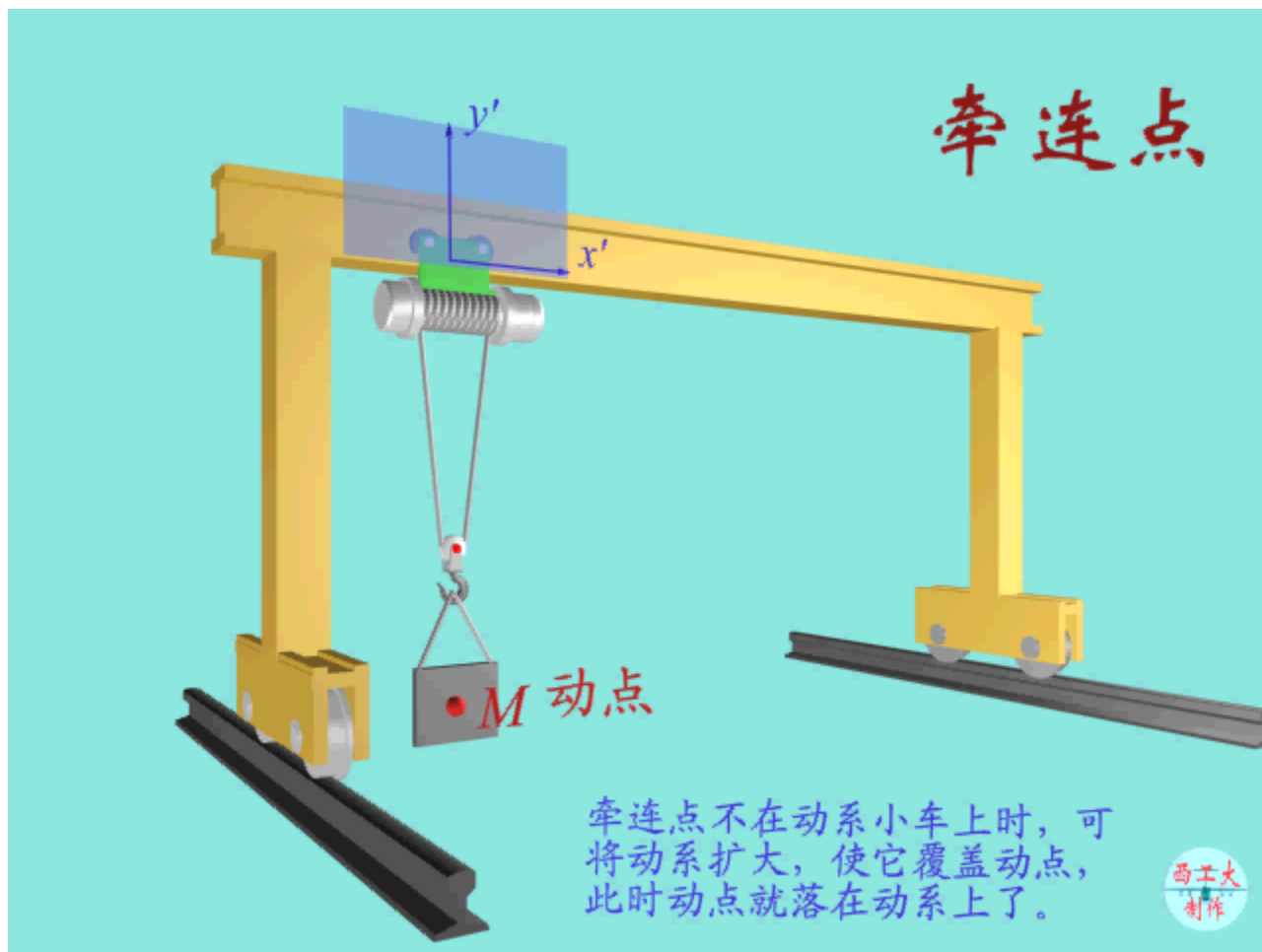
## 点的复合运动——牵连点

由于相对运动，不同瞬时牵连点的位置也不同

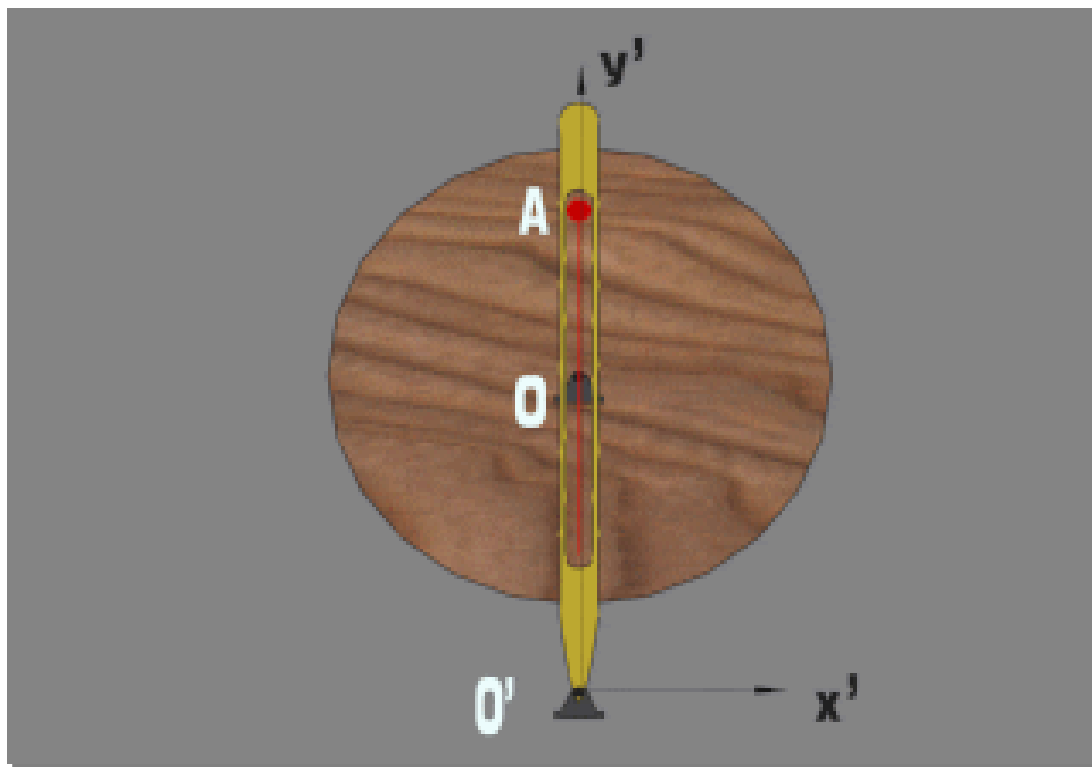


曲柄—摇杆机构

西工大  
制作



## 圆轮摇杆机构



动点：A（在圆盘上）

动系： $O'A$ 摆杆

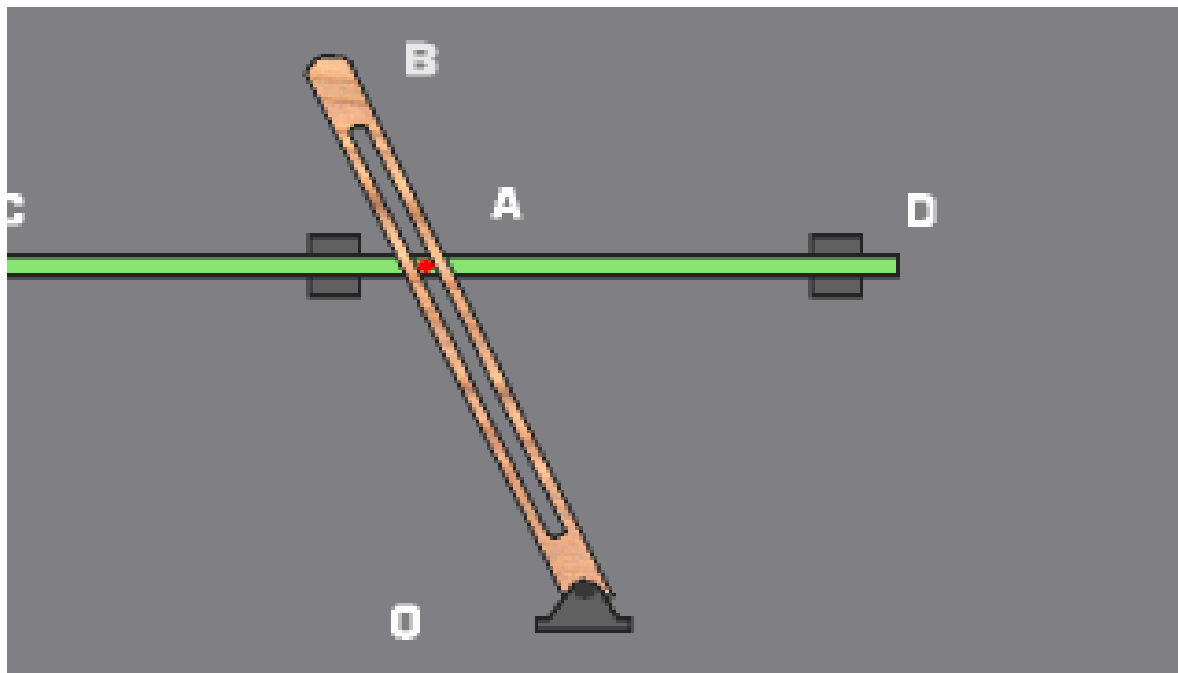
定系：机架

绝对运动：曲线（圆周）

相对运动：直线

牵连运动：定轴转动

## 摇杆滑道机构



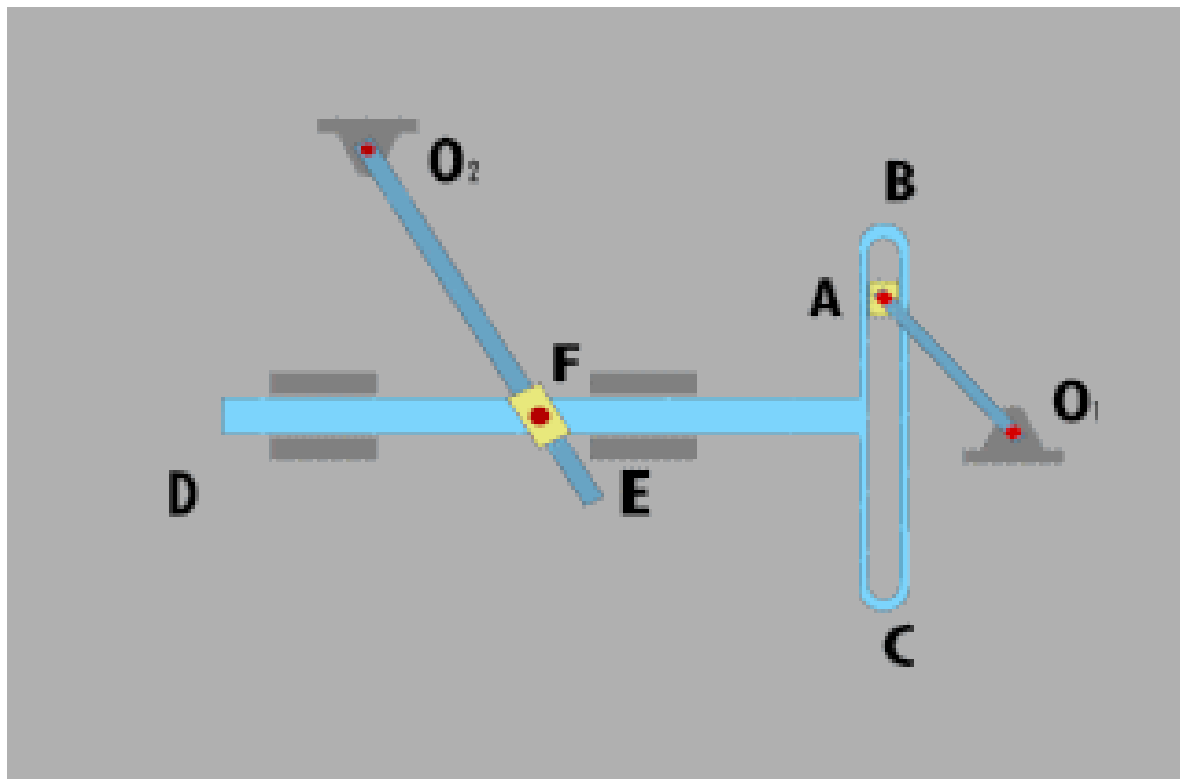
动点:销子A ( $CD$ 上); 动系:固结于 $OB$ 。

绝对运动: 点A的水平直线运动;

相对运动: 点A沿 $OB$ 轴线的运动;

牵连运动:  $OB$ 杆的定轴转动。

# 曲柄滑块机构



动点:  $O_1A$  上 A 点;  
动系: 固结于  $BCD$  上。

再选

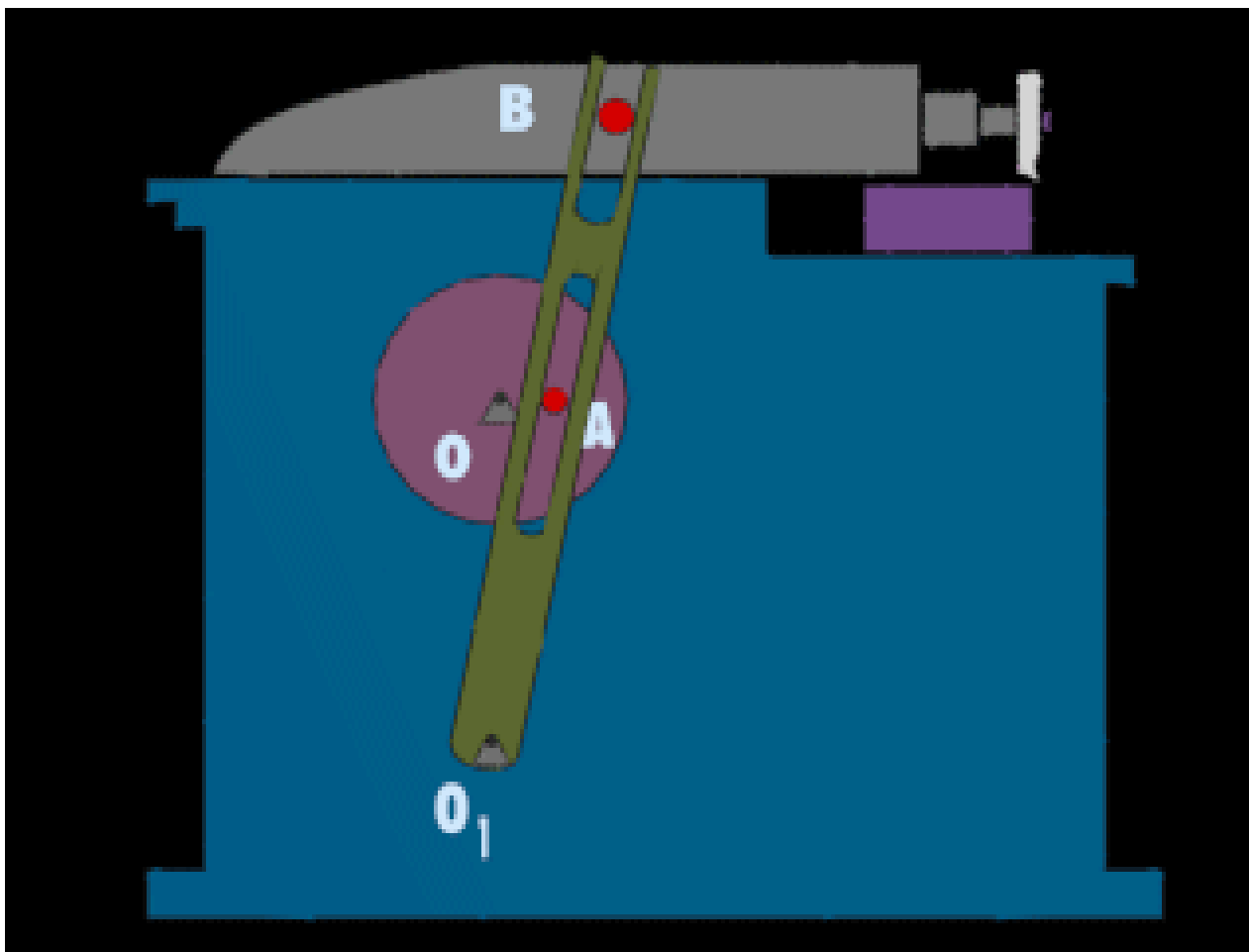
动点:  $BCD$  上的套筒  $F$  点;  
动系: 固结于  $O_2E$  上。

绝对运动: 圆周运动;  
相对运动: 直线运动;  
牵连运动:  $BCD$  平移

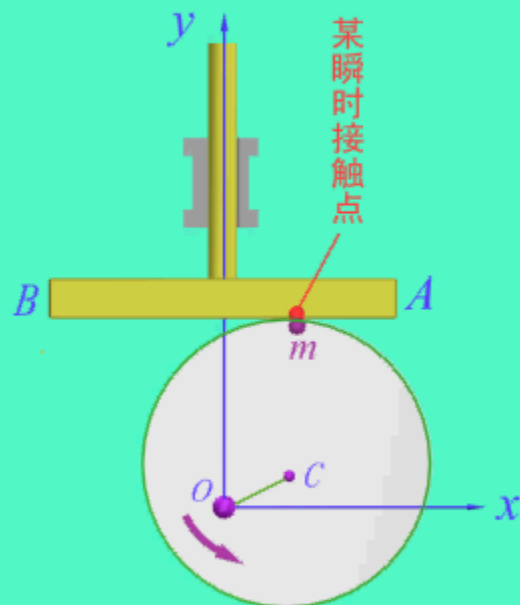
绝对运动: 直线运动;  
相对运动: 直线运动;  
牵连运动: 定轴转动。



# 刨床机构



## 点的复合运动——动点动系的选择



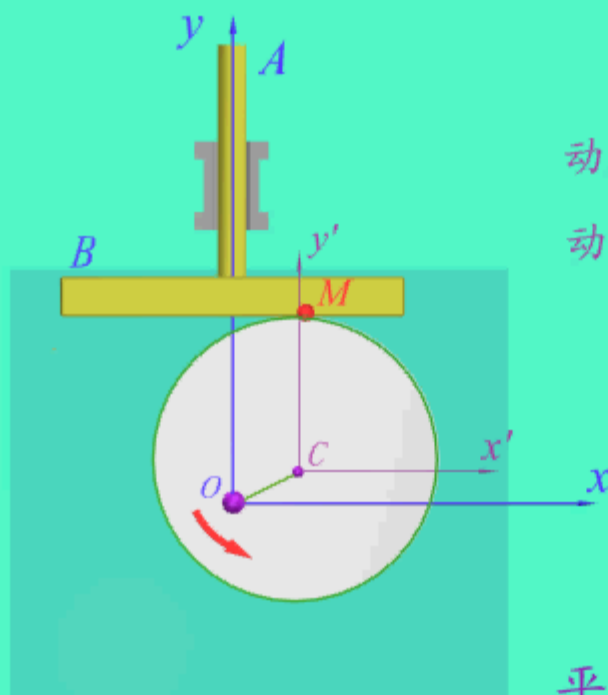
在机构传动问题中，一般选择持续接触点为动点。

但平底凸轮机构无持续接触点，如何选择动点呢？

平底凸轮机构



## 点的复合运动——相对运动轨迹



动点：平底挺杆AB上M点。

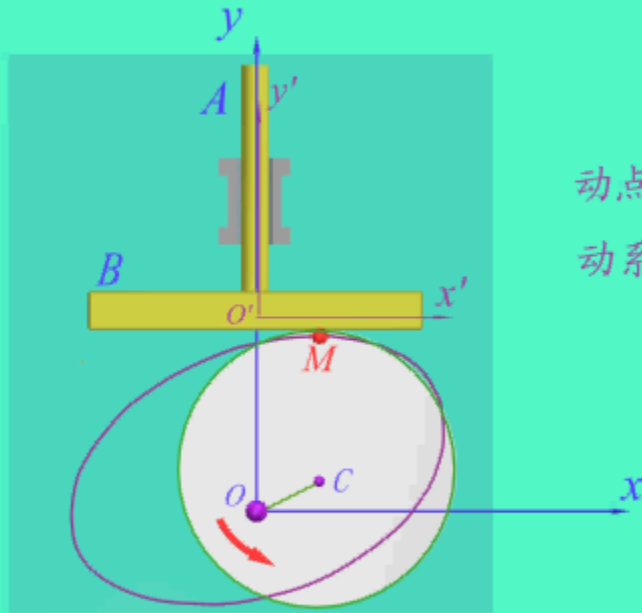
动系：固连凸轮。

平底凸轮机构



相对轨迹不清楚，无法确定相对速度和相对加速度的方位。

## 点的复合运动——相对运动轨迹



动点：凸轮上 $M$ 点。

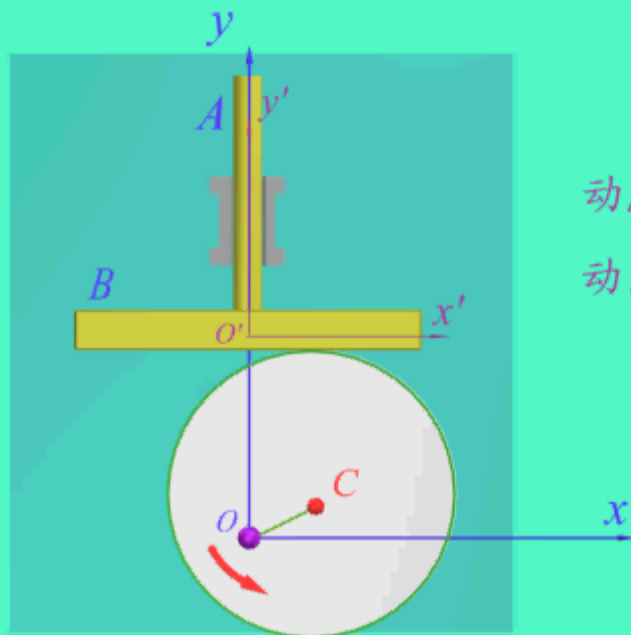
动系：固连平底挺杆 $AB$ 。

平底凸轮机构



相对轨迹不清楚，无法确定相对速度和相对加速度的方位。

## 点的复合运动——相对运动轨迹



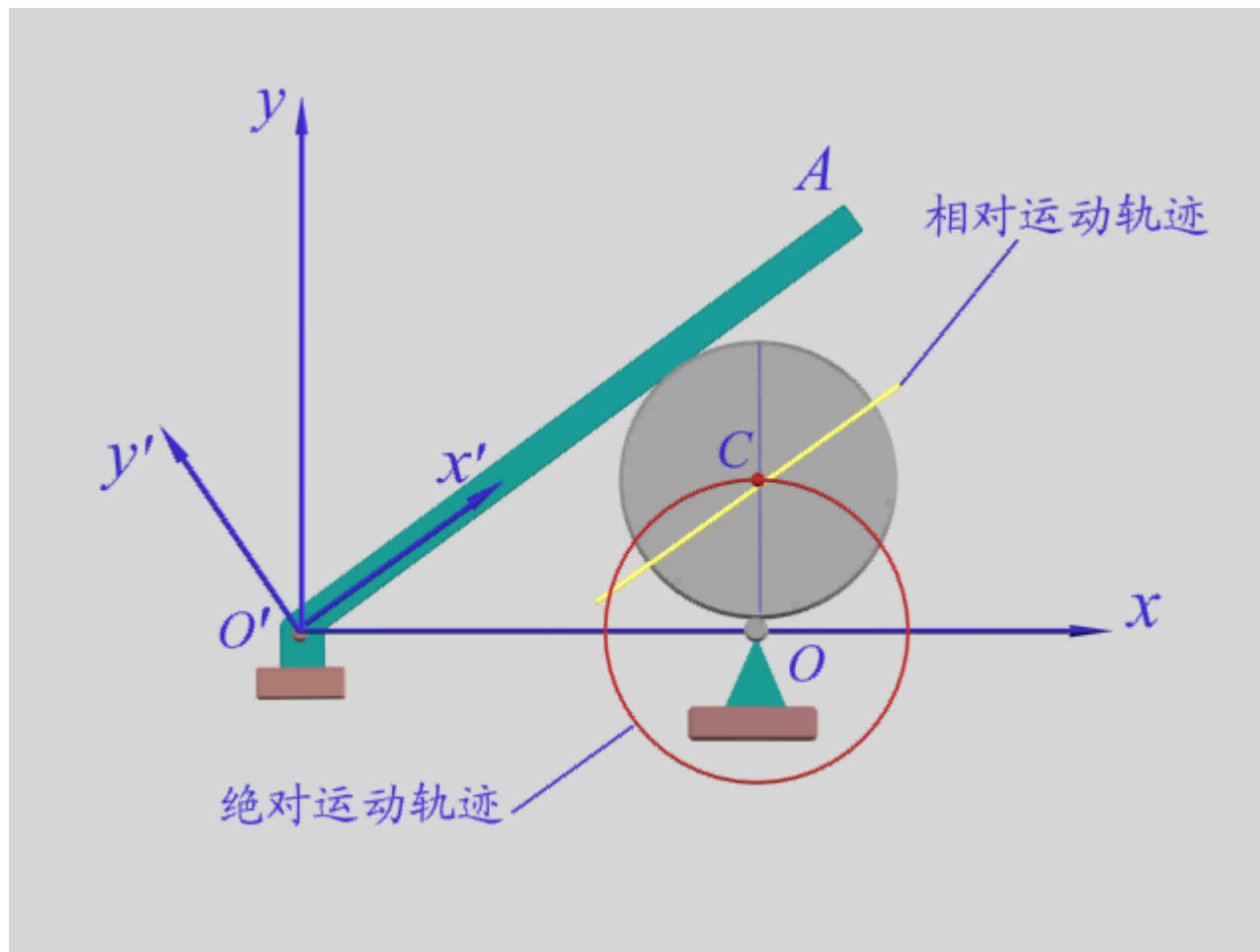
动点：凸轮圆心  $C$  点。

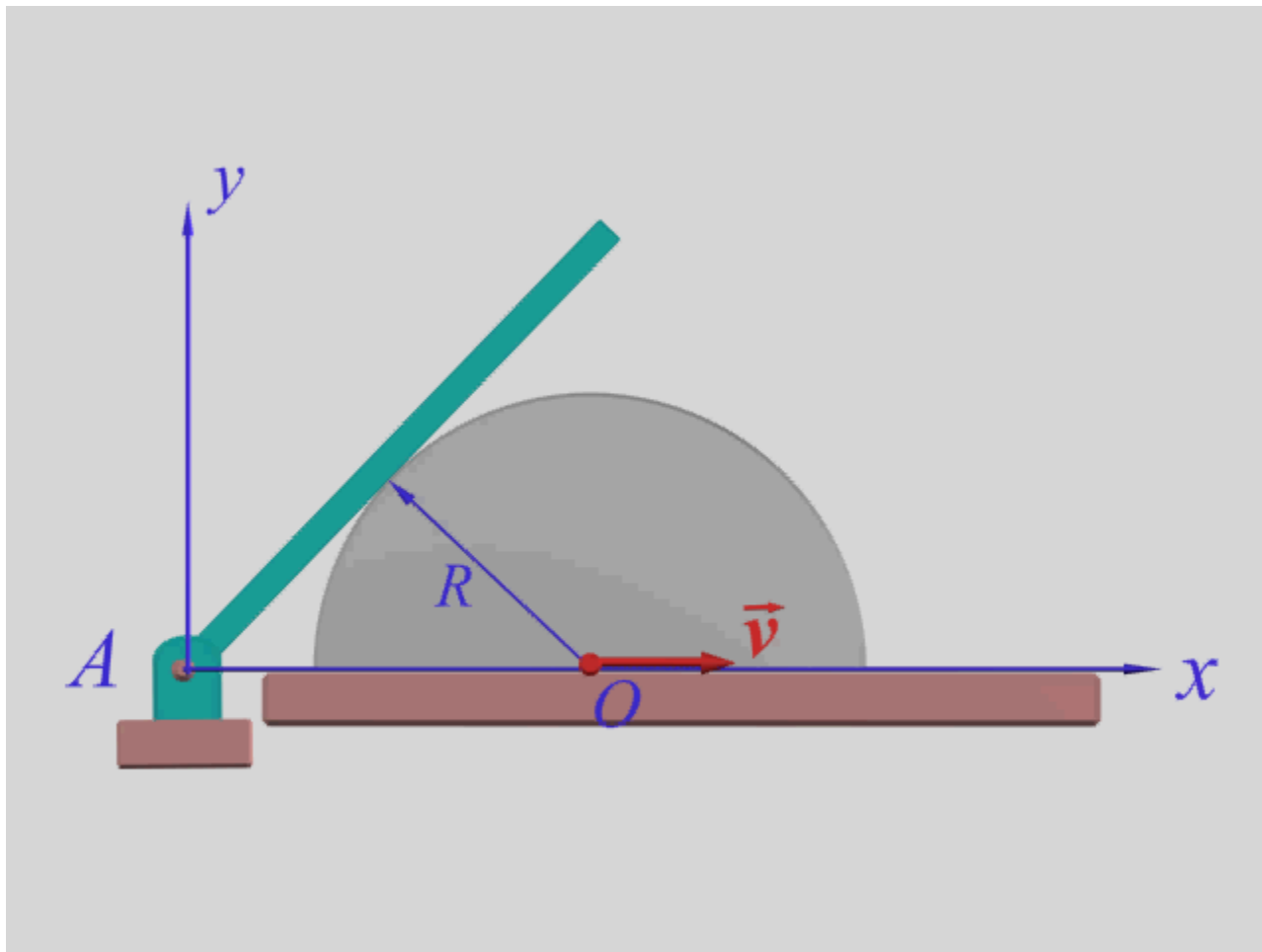
动系：固连平底挺杆  $AB$ 。

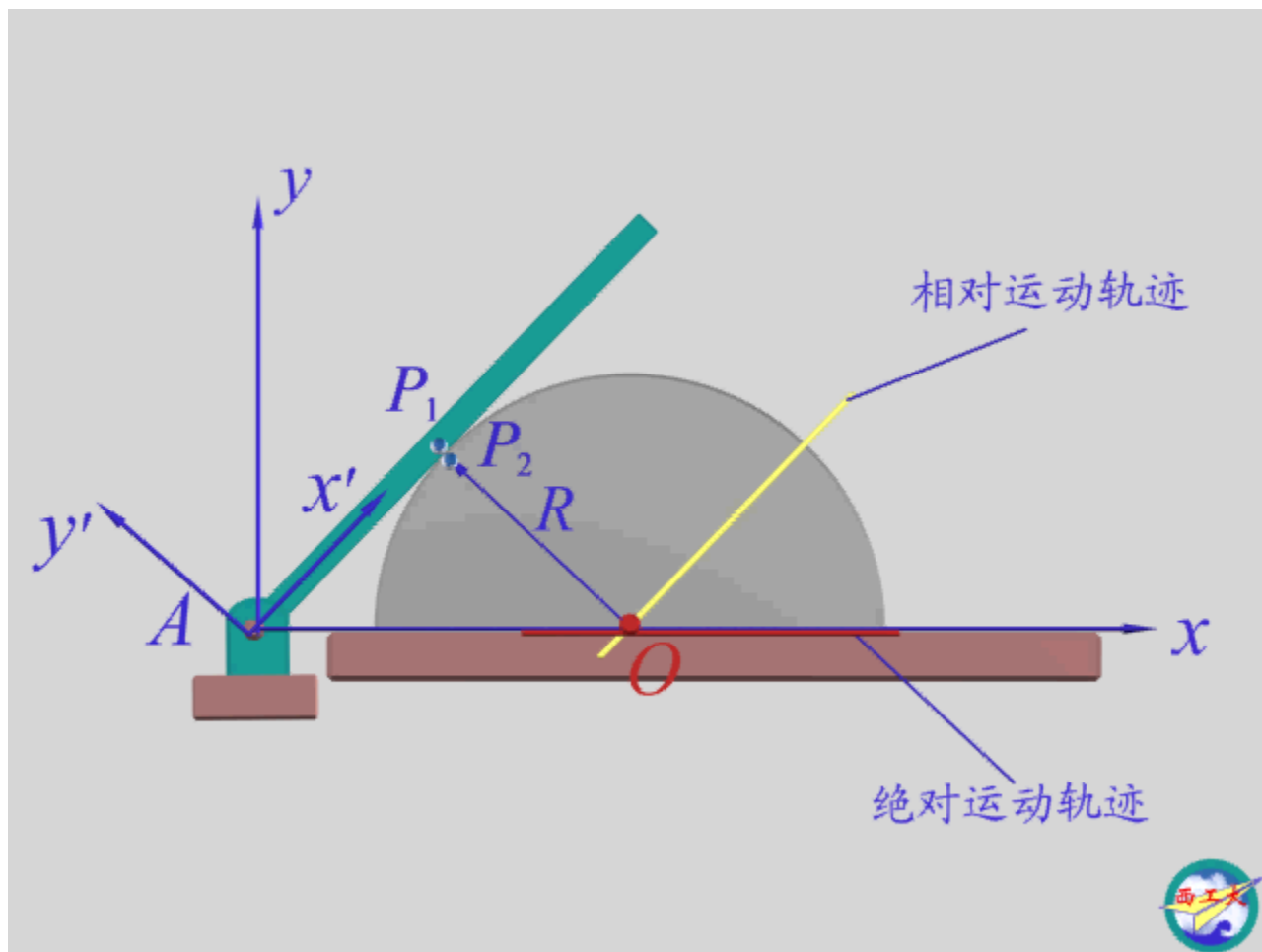
平底凸轮机构



相对轨迹清楚，可以确定相对速度和相对加速度的方位。









# 绝对、相对和牵连运动之间的关系

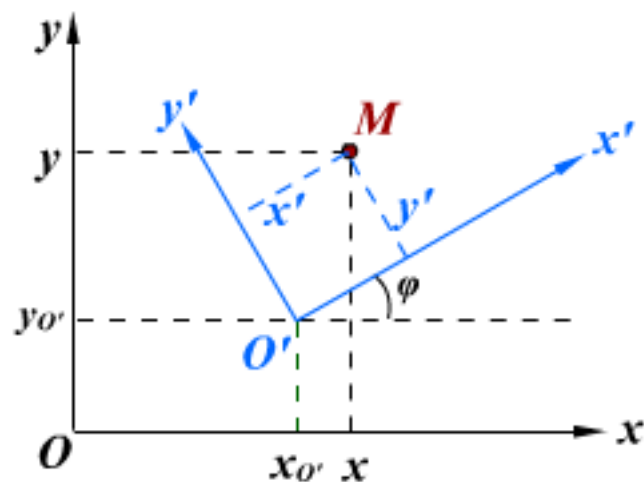
动点：  $M$     动系：  $O'x'y'$

绝对运动运动方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

相对运动运动方程

$$\begin{cases} x' = x'(t) \\ y' = y'(t) \end{cases}$$



由坐标变换关系有 
$$\begin{cases} x = x_{O'} + x' \cos \varphi - y' \sin \varphi \\ y = y_{O'} + x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \end{cases}$$

## § 7-2 点的速度合成定理

建立动点的绝对速度，相对速度和牵连速度之间的关系。

一、证明

当  $t \rightarrow t + \Delta t$   $AB \rightarrow A'B'$

$M \rightarrow M'$

也可看成  $M \rightarrow M_1 \rightarrow M'$

$\widehat{MM'}$  为绝对轨迹

$\overrightarrow{MM'}$  为绝对位移

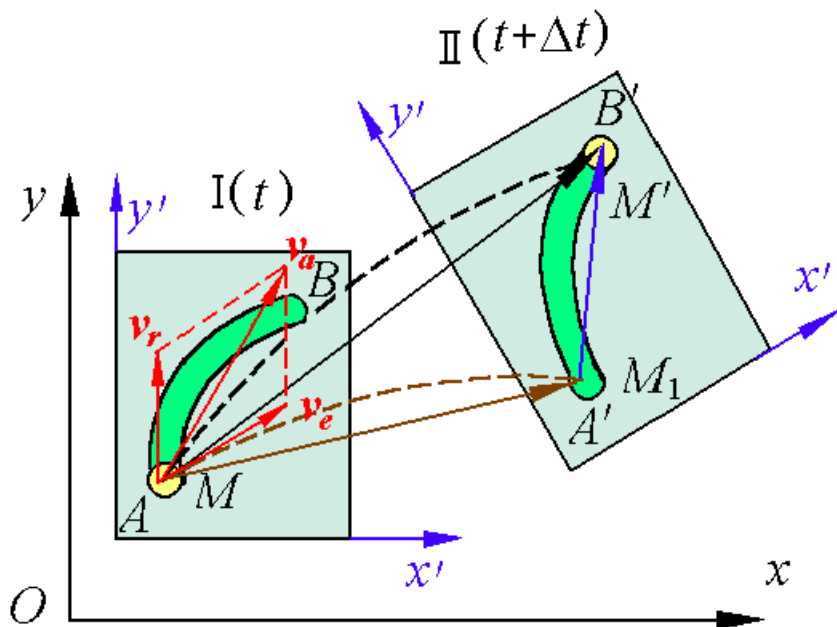
$\widehat{M_1M'}$  为相对轨迹

$\overrightarrow{M_1M'}$  为相对位移

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'}$$

将上式两边同除以  $\Delta t$  后，

$$\text{取 } \Delta t \rightarrow 0 \text{ 时的极限，得 } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{M_1M'}}{\Delta t}$$



$$\therefore \vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

即在任一瞬时动点的绝对速度等于其牵连速度与相对速度的矢量和，这就是点的速度合成定理。

说明： $v_a$ —动点的绝对速度；

$v_r$ —动点的相对速度；

$v_e$ —动点的牵连速度，是动系上一点(牵连点)的速度

①动系作平移时，动系上各点速度都相等；

②动系作转动时， $v_e$ 必须是该瞬时动系上与动点相重合点的速度。

$$\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}'$$

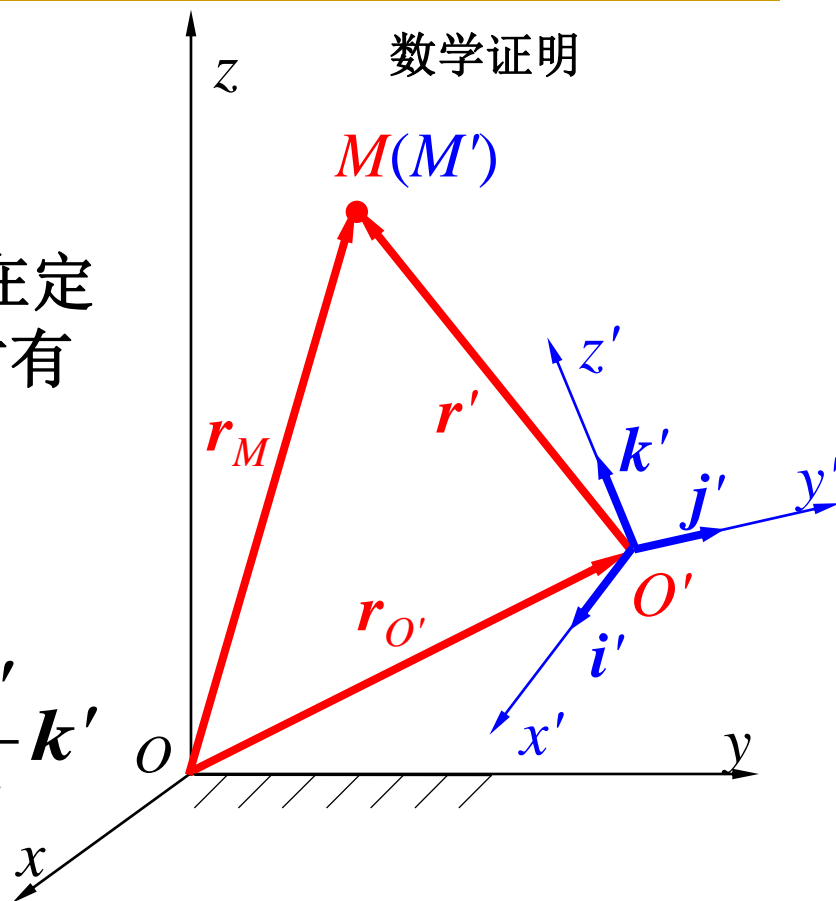
$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'$$

动系上与动点重合的点(牵连点)在定系中的矢径记为 $\mathbf{r}_{M'}$ ，在图示瞬间有

$$\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_{M'}$$

动点的相对速度 $\mathbf{v}_r$ 为

$$\mathbf{v}_r = \frac{\tilde{d}\mathbf{r}'}{dt} = \frac{dx'}{dt}\mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt}\mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt}\mathbf{k}'$$

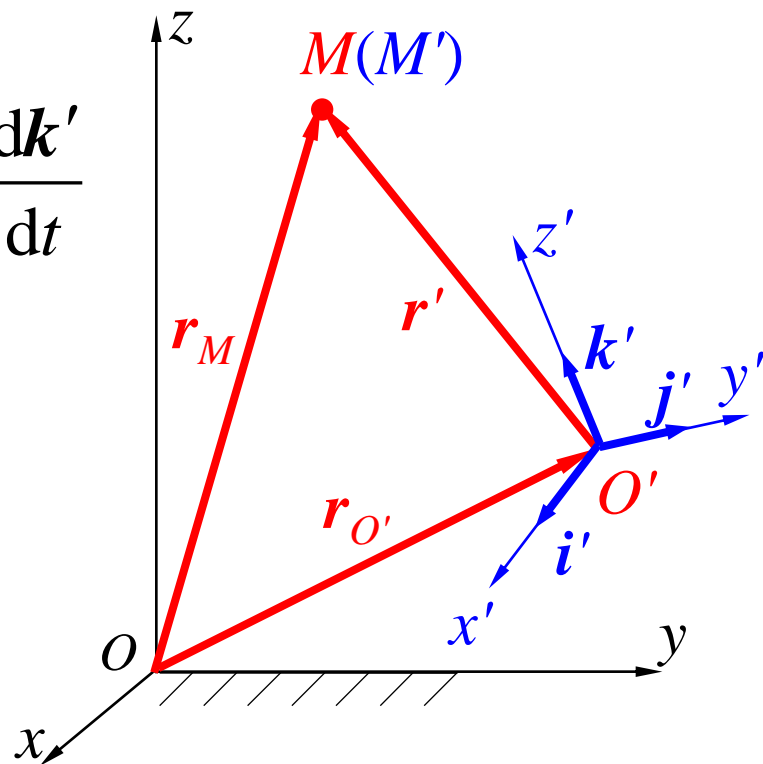


相对速度 $\mathbf{v}_r$ 是动点相对于动参考系的速度，因此 $\mathbf{i}'$ 、 $\mathbf{j}'$ 、 $\mathbf{k}'$ 是常矢量。这种导数称为**相对导数**。

## 动点的牵连速度 $v_e$ 为

$$\mathbf{v}_e = \frac{d\mathbf{r}_{M'}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_{O'}}{dt} + x' \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y' \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z' \frac{d\mathbf{k}'}{dt}$$

牵连速度是牵连点 $M'$ 点的速度，该点是动系上的点，因此它在动系上的坐标 $x'$ 、 $y'$ 、 $z'$ 是常量。



## 动点的绝对速度 $v_a$ 为

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_a &= \frac{d\mathbf{r}_M}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_{O'}}{dt} + x' \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y' \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z' \frac{d\mathbf{k}'}{dt} + \frac{dx'}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt} \mathbf{k}' \\ &= \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r\end{aligned}$$

点的速度合成定理是瞬时矢量式，共包括大小,方向六个元素，已知任意四个元素，就能求出其他两个。

## 二、应用举例

[例] 桥式吊车 已知：小车水平运行，速度为 $v_1$ ，物块A相对小车垂直上升的速度为 $v_2$ 。求物块A的运行速度。

解：选取动点：物块A，动系：小车

相对运动：铅直直线；

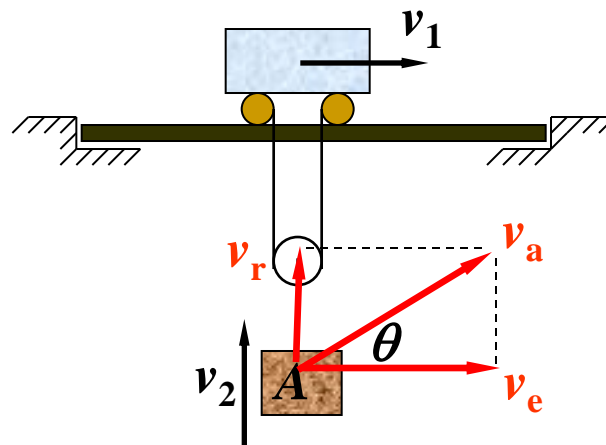
相对速度 $v_r = v_2 \uparrow$

牵连运动：平移；

牵连速度 $v_e = v_1 \rightarrow$

绝对运动：曲线，轨迹未知；

绝对速度 $v_a$ 的大小、方向待求。

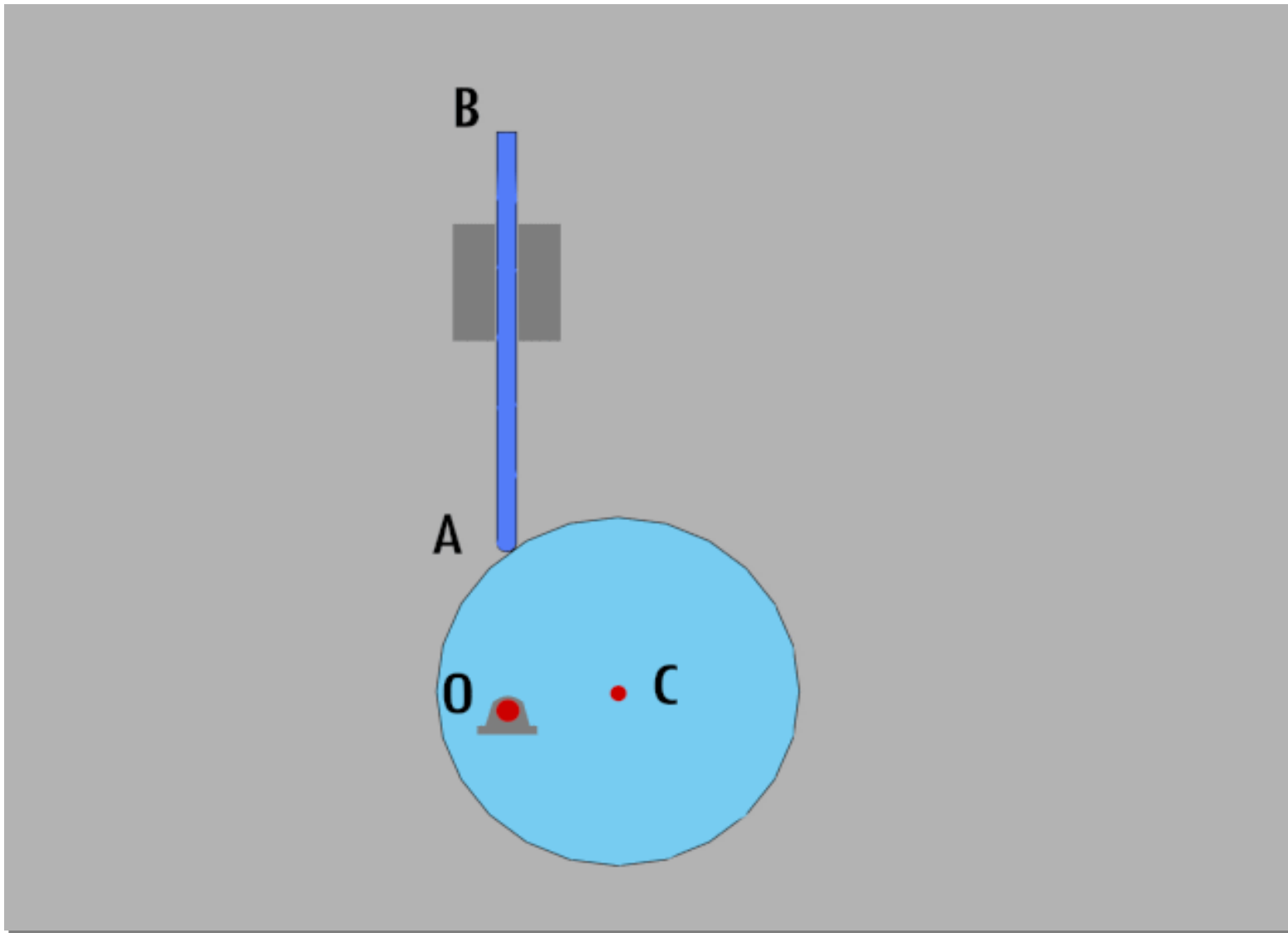


由速度合成定理： $v_a = v_e + v_r$

作出速度平行四边形如图示，则物块A的速度大小和方向为

$$v_A = v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{v_2}{v_1}$$



### [例] 圆盘凸轮机构

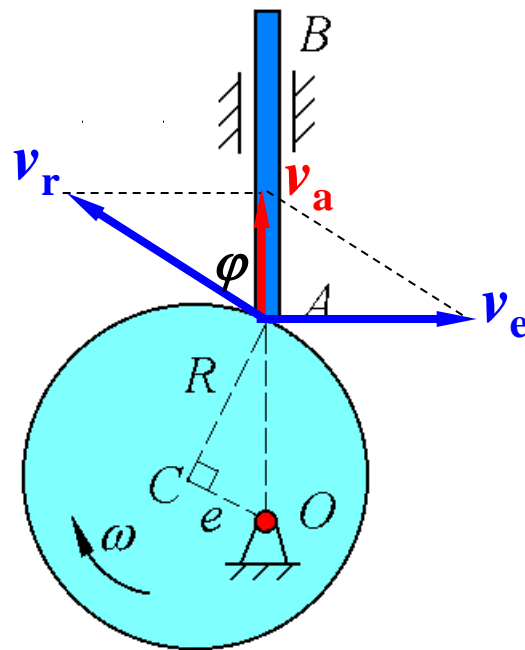
已知：  $OC=e$ ,  $R=\sqrt{3}e$ ,  $\omega$  (匀角速度)  
图示瞬时，  $OC\perp CA$  且  $O$ 、 $A$ 、 $B$  三点共线。  
求：从动杆  $AB$  的速度。

解：动点取直杆上  $A$  点，动系固结于圆盘。

绝对速度  $v_a = ?$  待求，方向  $\parallel AB$

相对速度  $v_r = ?$  未知，方向  $\perp CA$

牵连速度  $v_e = OA \cdot \omega = 2e\omega$ ，方向  $\perp OA$



由速度合成定理  $v_a = v_e + v_r$ ，  
作出速度平行四边形 如图示。

$$v_a = v_e \cdot \tan 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3} e\omega \quad \therefore v_{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{3} e\omega (\uparrow)$$



[例]刨床的急回机构如图所示。曲柄 $OA$ 的角速度为 $\omega$ ，通过滑块 $A$ 带动摇杆 $O_1B$ 摆动。已知 $OA=r$ ， $OO_1=l$ ，求当 $OA$ 水平时 $O_1B$ 的角速度 $\omega_1$ 。

解：取 $OA$ 杆上 $A$ 点为动点，摆杆 $O_1B$ 为动系。

绝对速度  $v_a = r\omega$ ，方向 $\perp OA$

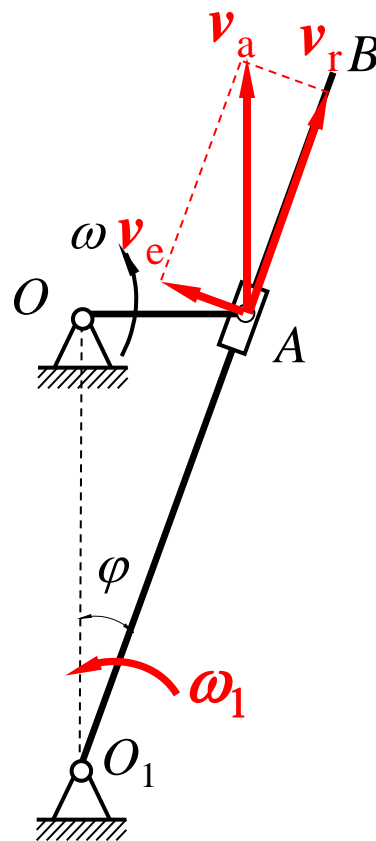
相对速度  $v_r = ?$ ，方向 $// O_1B$

牵连速度  $v_e = ?$ ，方向 $\perp O_1B$

$$v_e = v_a \sin \varphi = r\omega \sin \varphi$$

$$v_e = O_1A \cdot \omega_1 = \frac{r^2 \omega}{\sqrt{(l^2 + r^2)}}$$

$$O_1A = \sqrt{(l^2 + r^2)} \quad \omega_1 = \frac{r^2 \omega}{l^2 + r^2}$$



由上述例题可看出，求解合成运动的速度问题的一般步骤为：

- ①选取动点，动系和定系（工程问题选地面不作说明）；
- ②三种运动的分析；
- ③三种速度的分析；
- ④根据速度合成定理  $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$  作出速度平行四边形。  
根据速度平行四边形，求出未知量。

恰当地选择动点、动系是求解合成运动问题的关键。

动点、动系的选择原则

- ①**动点、动系和定系必须分别属于三个不同的物体**，否则绝对、相对和牵连运动中就缺少一种运动，不能成为合成运动
- ②**动点相对动系的相对运动轨迹要易于直观判断。**

（已知绝对运动和牵连运动求解相对运动的问题除外）

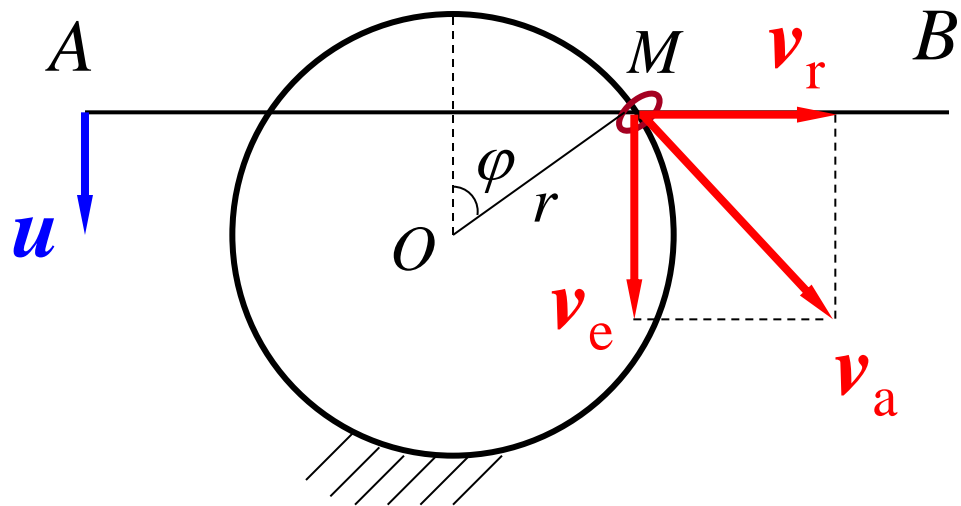
[例] 水平直杆 $AB$ 在半径为 $r$ 的固定圆环上以匀速 $u$ 竖直下落，如图。试求套在该直杆和圆环交点处的小环 $M$ 的速度。

解：以小环 $M$ 为动点，动系取在 $AB$ 杆上，动点的速度合成矢量图如图。

由图可得：

$$\sin \varphi = \frac{v_e}{v_a}$$

$$v_a = \frac{v_e}{\sin \varphi} = \frac{u}{\sin \varphi}$$



[例] 求图示机构中 $OC$ 杆端点 $C$ 的速度。其中 $v$ 与 $\theta$ 已知，且设 $OA=a$ ， $AC=b$ 。

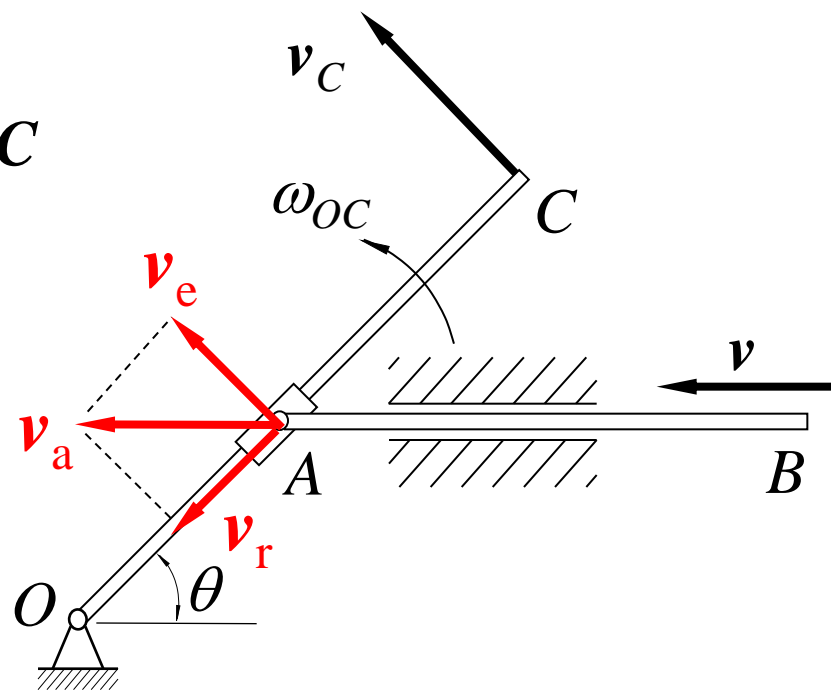
解：取套筒 $A$ 为动点，动系与 $OC$ 固连，分析 $A$ 点速度，有

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$$

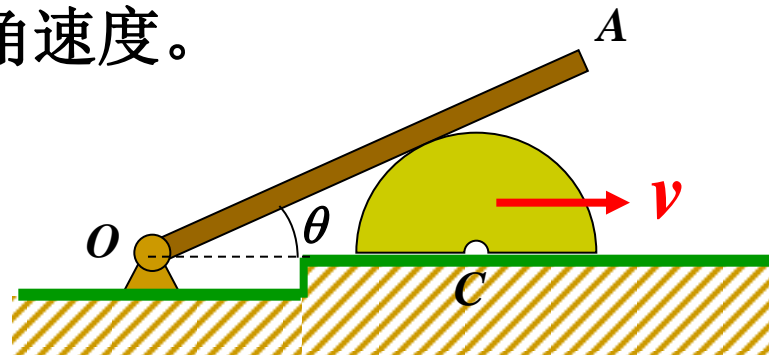
$$v_e = v_a \sin \theta = v \sin \theta$$

$$\omega_{OC} = \frac{v_e}{OA} = \frac{v \sin \theta}{a}$$

$$v_C = OC \cdot \omega_{OC} = \frac{a+b}{a} v \sin \theta$$



[例] 已知：凸轮半径 $r$ ，图示位置时其速度为 $v$ ， $\theta=30^\circ$ 。杆 $OA$ 靠在凸轮上。求：杆 $OA$ 的角速度。



**分析：**相接触的两个物体的接触点位置都随时间而变化，因此两物体的接触点都不宜选为动点，否则相对运动的分析就会很困难。这种情况下，需选择满足上述两条原则的非接触点为动点。可以发现，凸轮上 $C$ 的轨迹是直线，若选 $OA$ 为动系，其相对轨迹也容易确定是直线。

解：取凸轮上C点为动点，  
动系固结于OA杆上。

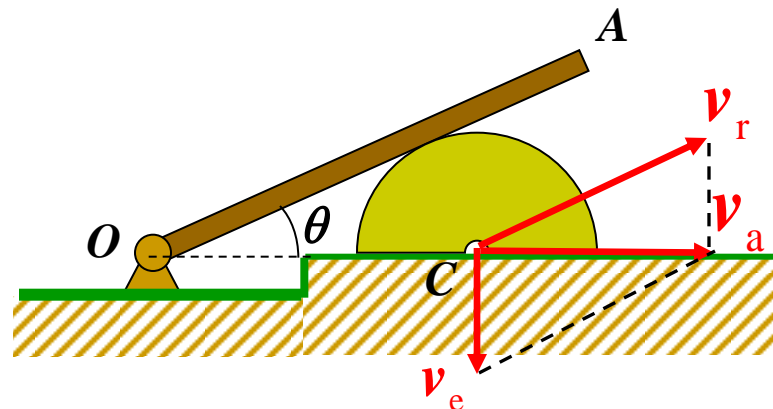
绝对运动：直线运动，

绝对速度： $v_a = v$ ，方向  $\rightarrow$

相对运动：直线运动，

相对速度： $v_r$ 未知，方向  $\parallel OA$

牵连运动：定轴转动，牵连速度： $v_e = OC \cdot \omega$  未知， $\omega$ 待求，方向  $\perp OC$



根据速度合成定理  $v_a = v_e + v_r$  作出速度平行四边形 如图示。

$$v_e = v_a \cdot \tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} v \quad \text{又 } v_e = OC \cdot \omega = \frac{r}{\sin \theta} \cdot \omega = 2r\omega,$$

$$\therefore \omega = \frac{v_e}{2r} = \frac{1}{2r} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} v = \frac{\sqrt{3}v}{6r} \quad (\curvearrowright)$$

[例] **p1947-13**  $AB$ 杆以速度 $v_1$ 向上作平移， $CD$ 杆斜向上以速度 $v_2$ 作平移，两条杆的夹角为 $\theta$ ，求套在两杆上的小环 $M$ 的速度。

解 取 $M$ 为动点， $AB$ 为动坐标系，相对速度、牵连速度如图。

$$\vec{v}_a = \vec{v}_{e1} + \vec{v}_{r1}$$

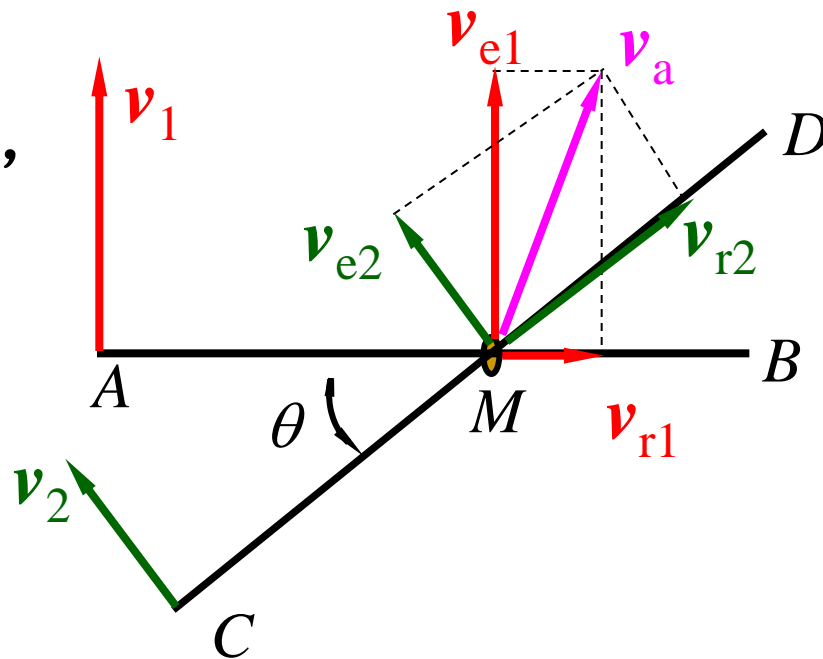
取 $M$ 为动点， $CD$ 为动坐标系，相对速度、牵连速度如图。

$$\vec{v}_a = \vec{v}_{e2} + \vec{v}_{r2}$$

由上面两式可得：

$$\vec{v}_{e1} + \vec{v}_{r1} = \vec{v}_{e2} + \vec{v}_{r2}$$

其中  $\vec{v}_{e1} = \vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_{e2} = \vec{v}_2$



$$\vec{v}_{e1} + \vec{v}_{r1} = \vec{v}_{e2} + \vec{v}_{r2}$$

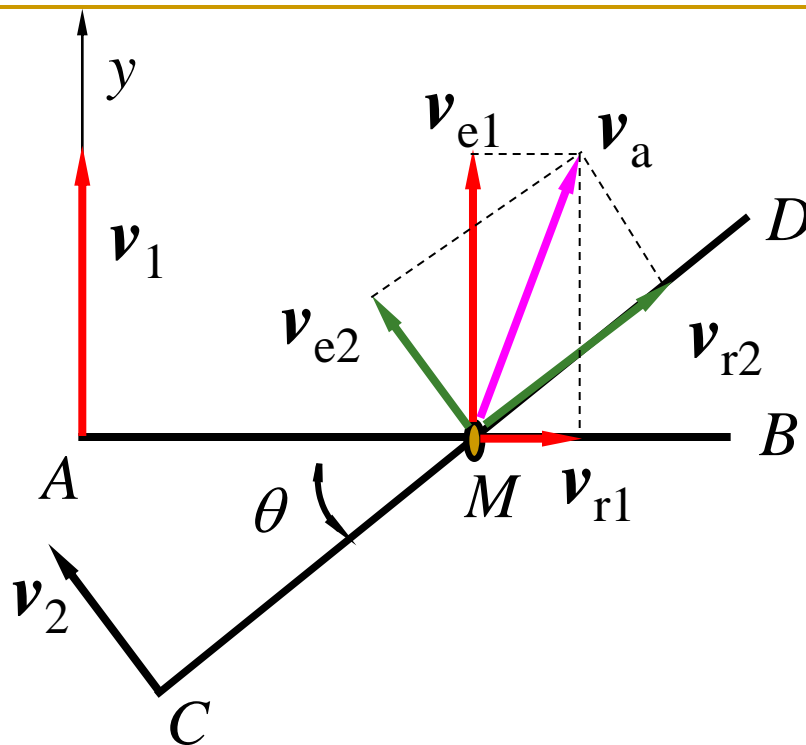
将等式两边同时向y轴投影：

$$v_1 = v_2 \cos \theta + v_{r2} \sin \theta$$

$$\therefore v_{r2} = (v_1 - v_2 \cos \theta) / \sin \theta$$

则动点M的绝对速度为：

$$\begin{aligned} v_a &= \sqrt{v_{e2}^2 + v_{r2}^2} = \sqrt{v_2^2 + \left( \frac{v_1 - v_2 \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2} \\ &= \frac{1}{\sin \theta} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \theta} \end{aligned}$$





[例] 在水面上有两只舰艇A和B均以匀速度 $v = 36 \text{ km/h}$ 行驶，A舰艇向东开，B舰艇沿以O为圆心、半径 $R = 100 \text{ m}$ 的圆弧行驶。在图示瞬时，两艇的位置 $S = 50 \text{ m}$ ， $\theta = 30^\circ$ ，试求：

(1) B艇相对A艇的速度。(2) A艇相对B艇的速度。

解：(1) 求B艇相对于A艇的速度。

以B为动点，动系固连于A艇。

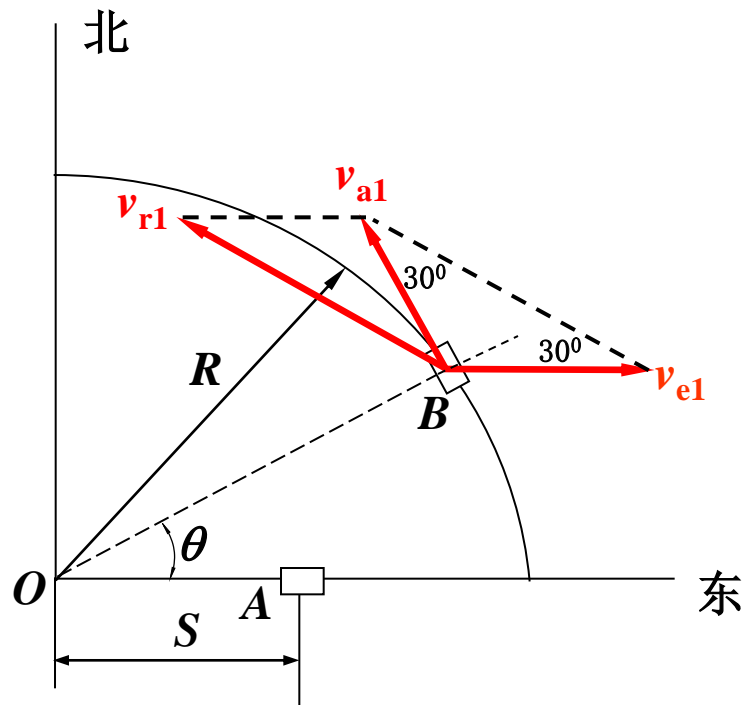
由速度矢量图

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{a1} = \vec{v}_{e1} + \vec{v}_{r1}$$

$$v_{e1} = v_A = v_B = v_{a1} = v$$

所以，得图示角度。

$$v_{r1} = 2v \cos 30^\circ = 62.4 (\text{km/h})$$



(2) 求A相对于B的速度，以A为动点，动系固连于B艇。

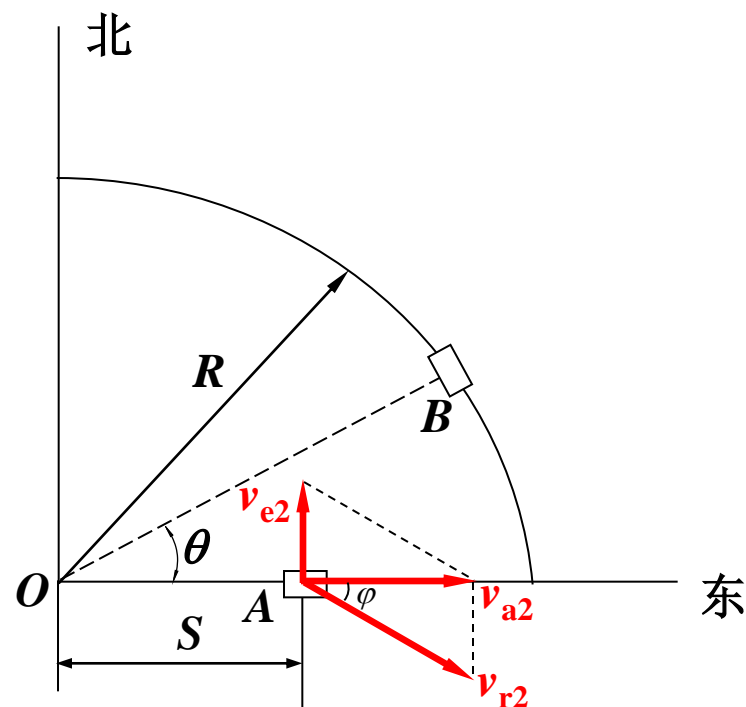
$$v_{a2} = v_A = v$$

$$v_{e2} = OA \cdot \frac{v_B}{R} = 50 \cdot \frac{v}{R} = \frac{v}{2} = 18(\text{km/h})$$

$$v_{r2} = \sqrt{v_{e2}^2 + v_{a2}^2} = 40.2(\text{km/h})$$

$$\tan \varphi = \frac{v_{e2}}{v_{a2}} = \frac{18}{36} = 0.5$$

$$\varphi = 26^\circ 34'$$



可见，A相对B的速度并不一定等于B相对A的速度。

### § 7-3 牵连运动为平移时点的加速度合成定理

设有一动点 $M$ 按一定规律沿着固连于动系 $O'x'y'z'$ 的曲线 $AB$ 运动,曲线 $AB$ 同时又随同动系 $O'x'y'z'$  相对定系 $Oxyz$ 平移。

由于牵连运动为平移, 故

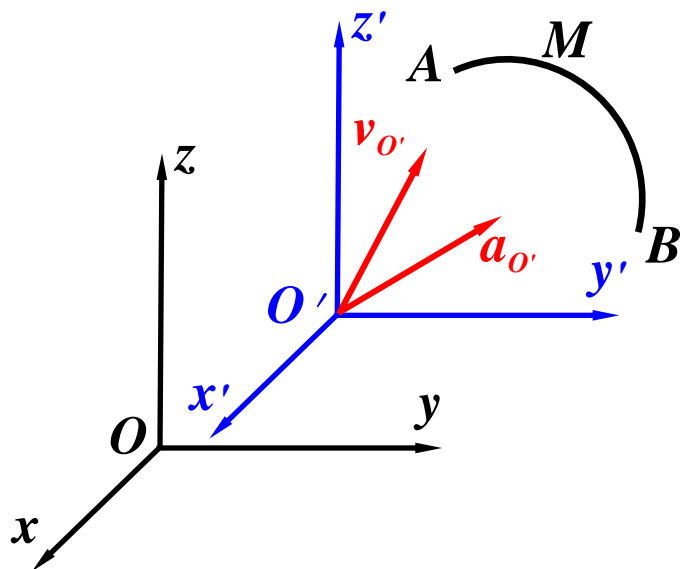
$$\vec{v}_e = \vec{v}_{O'}, \quad \vec{a}_e = \vec{a}_{O'}$$

由速度合成定理  $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$

$$\vec{v}_r = \frac{dx'}{dt} \vec{i}' + \frac{dy'}{dt} \vec{j}' + \frac{dz'}{dt} \vec{k}'$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_{O'} + \frac{dx'}{dt} \vec{i}' + \frac{dy'}{dt} \vec{j}' + \frac{dz'}{dt} \vec{k}'$$

对 $t$ 求导  $\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} + \frac{d^2x'}{dt^2} \vec{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2} \vec{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2} \vec{k}'$

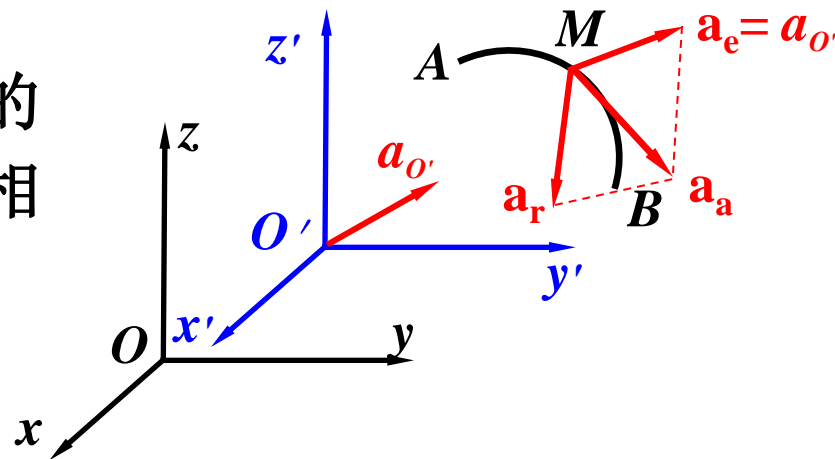


(其中  $\vec{i}'$ ,  $\vec{j}'$ ,  $\vec{k}'$  为动系坐标的单位矢量, 因为动系为平移, 故它们的方向不变, 是常矢量, 所以  $\frac{d\vec{i}'}{dt}=0, \frac{d\vec{j}'}{dt}=0, \frac{d\vec{k}'}{dt}=0$  )

$$\therefore \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} = \vec{a}_{O'} = \vec{a}_e, \quad \vec{a}_r = \frac{d^2 x'}{dt^2} \vec{i}' + \frac{d^2 y'}{dt^2} \vec{j}' + \frac{d^2 z'}{dt^2} \vec{k}'$$

$\therefore \vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r$  — 牵连运动为平移时点的加速度合成定理

即当牵连运动为平移时, 动点的绝对加速度等于牵连加速度与相对加速度的矢量和。



$$\therefore \vec{a} = \vec{a}^t + \vec{a}^n$$

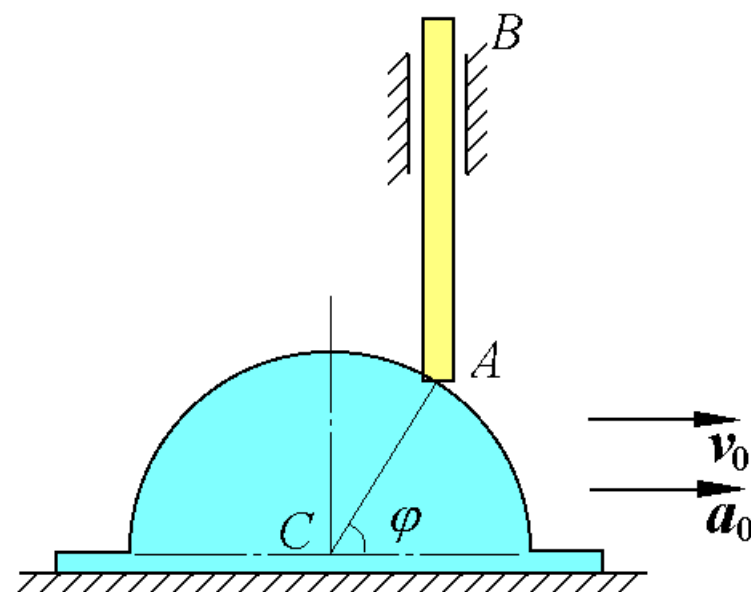
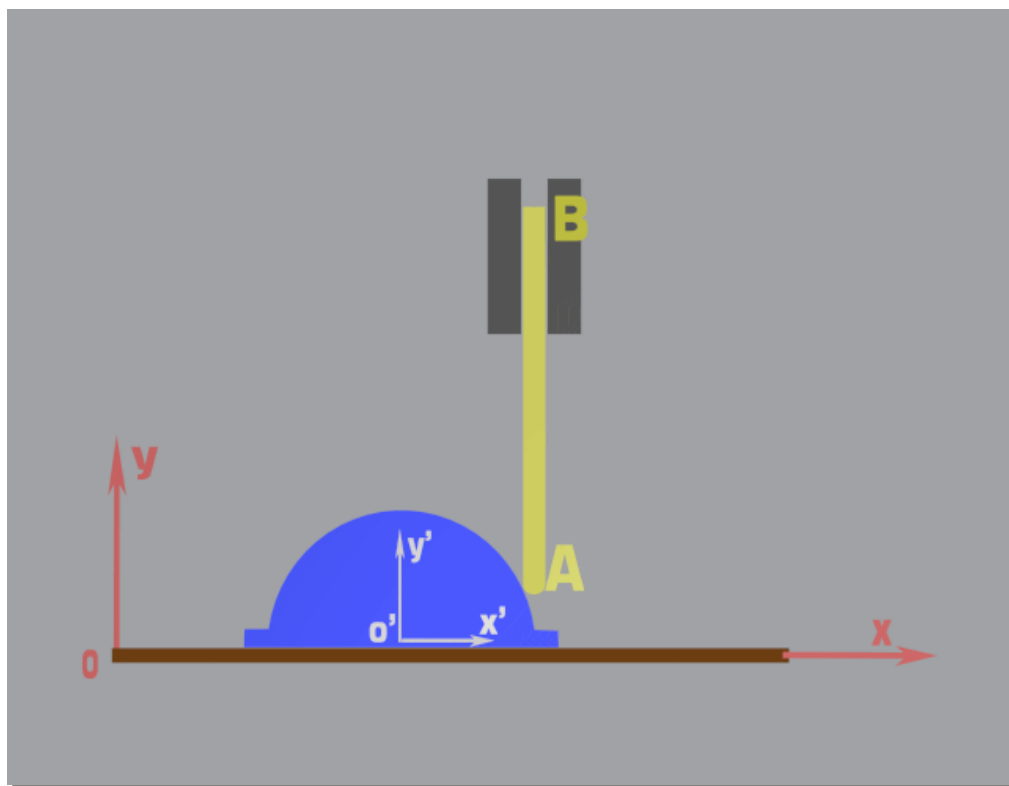
$\therefore$  一般式可写为:

$$\vec{a}_a^t + \vec{a}_a^n = \vec{a}_e^t + \vec{a}_e^n + \vec{a}_r^t + \vec{a}_r^n$$

[例] 已知：凸轮半径 $R$ ， $v_0$ ， $a_0$ 。

求： $\varphi=60^\circ$ 时，顶杆 $AB$ 的加速度。

解：取杆上的 $A$ 点为动点，  
动系与凸轮固连。



绝对速度 $v_a = ?$ , 方向 $//AB$ ; 绝对加速度 $a_a = ?$ , 方向 $//AB$ , 待求。

相对速度 $v_r = ?$ , 方向 $\perp CA$ ; 相对加速度 $a_r^t = ?$  方向 $\perp CA$

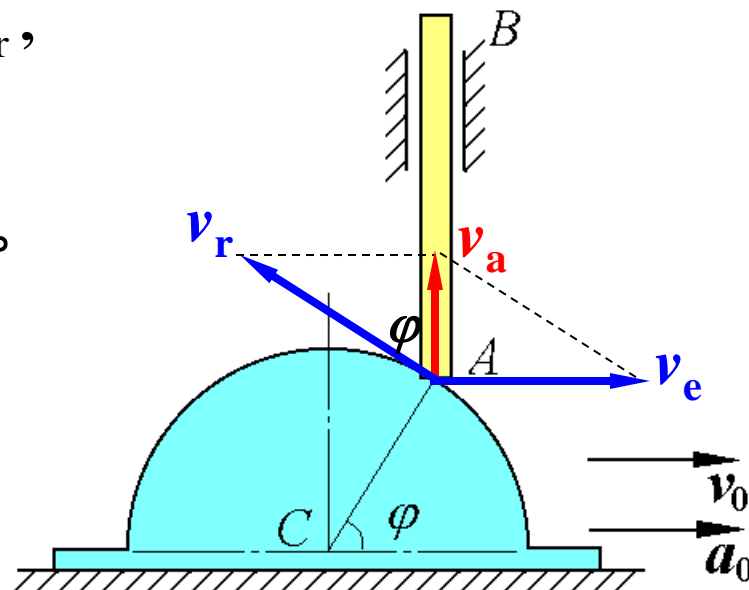
$$a_r^n = v_r^2 / R, \text{ 方向沿} CA \text{ 指向} C$$

牵连速度 $v_e = v_0$ , 方向  $\rightarrow$ ; 牵连加速度  $a_e = a_0$ , 方向 $\rightarrow$

由速度合成定理  $v_a = v_e + v_r$ ,

作出速度平行四边形, 如图示。

$$v_r = \frac{v_e}{\sin \varphi} = \frac{v_0}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} v_0$$



因牵连运动为平移，故有

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r^t + \mathbf{a}_r^n$$

其中  $a_r^n = v_r^2 / R = (\frac{2}{\sqrt{3}} v_0)^2 / R = \frac{4v_0^2}{3R}$

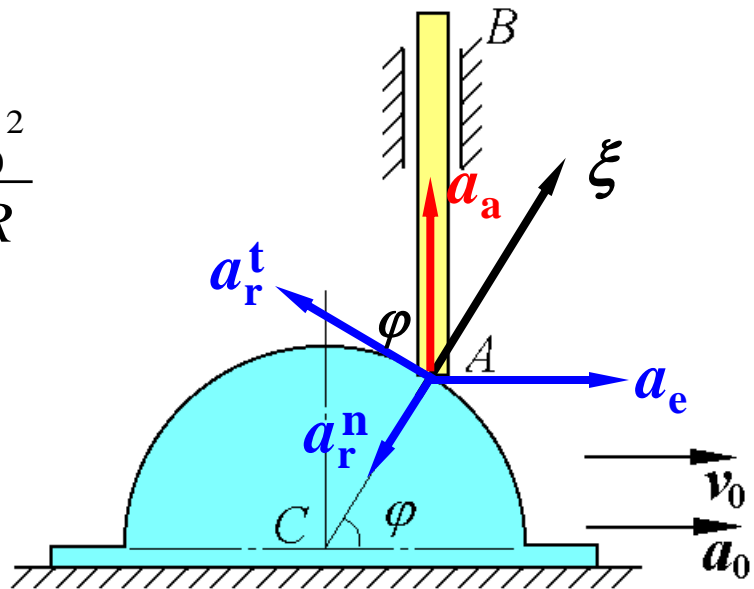
作**加速度矢量图**如图示

将上式投影到 $\xi$ 轴上，得

$$a_a \sin \varphi = a_e \cos \varphi - a_r^n$$

$$a_a = (a_e \cos \varphi - a_r^n) / \sin \varphi = (a_0 \cos 60^\circ - \frac{4v_0^2}{3R}) / \sin 60^\circ$$

整理得  $a_{AB} = a_a = \frac{\sqrt{3}}{3} (a_0 - \frac{8}{3} \frac{v_0^2}{R})$



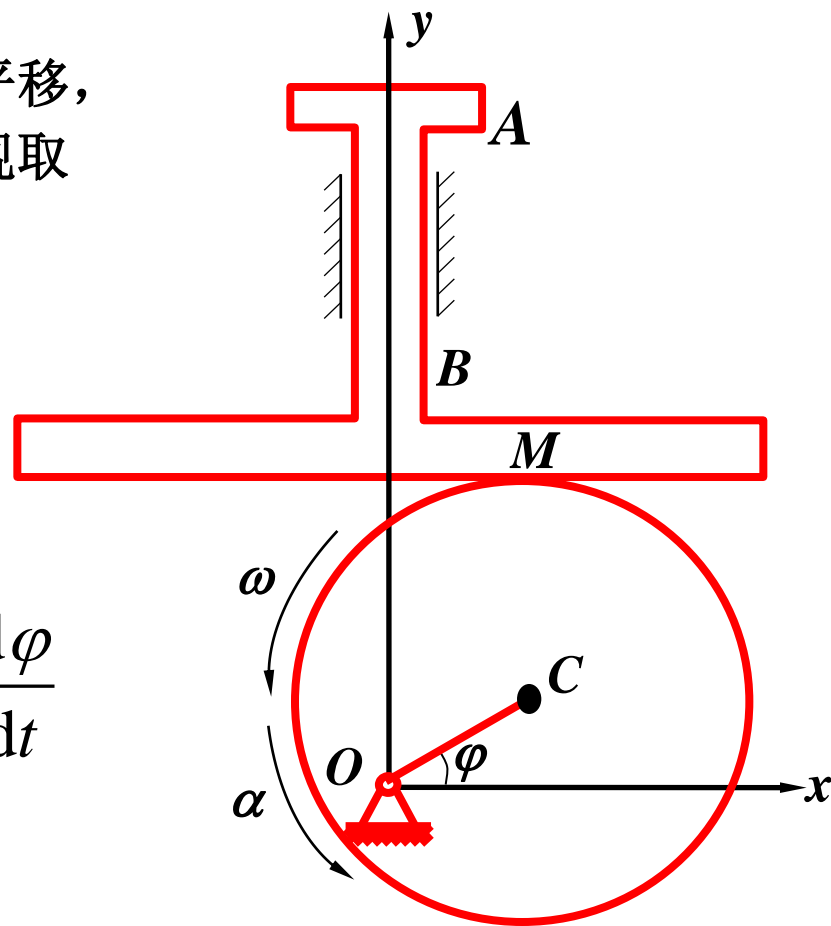
[例]平底顶杆凸轮机构如图所示，顶杆 $AB$ 可沿导轨上下移动，偏心圆盘绕轴 $O$ 转动，轴 $O$ 位于顶杆轴线上。工作时顶杆的平底始终接触凸轮表面。该凸轮半径为 $R$ ，偏心距 $OC = e$ ，凸轮绕轴 $O$ 转动的角速度为 $\omega$ ，角加速度为 $\alpha$ 。求 $OC$ 与水平线成夹角 $\varphi$ 时顶杆的速度和加速度。

解1 用运动方程求解。因推杆作平移，其上各点的速度和加速度都相同，现取推杆上与凸轮的接触点 $M$ 分析：

$$y = R + e \sin \varphi$$

$$v = \frac{dy}{dt} = e \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} = e\omega \cos \varphi$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} = e \frac{d\omega}{dt} \cos \varphi - e\omega \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} \\ &= e\alpha \cos \varphi - e\omega^2 \sin \varphi \end{aligned}$$





解2 取圆盘的中心 $C$ 为动点，动系与平底推杆 $AB$ 固连。分析动点的速度和加速度如图所示。

$$v_a = e\omega$$

$$v_{AB} = v_e = v_a \cos \varphi = e\omega \cos \varphi$$

$$\mathbf{a}_a^n + \mathbf{a}_a^t = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r$$

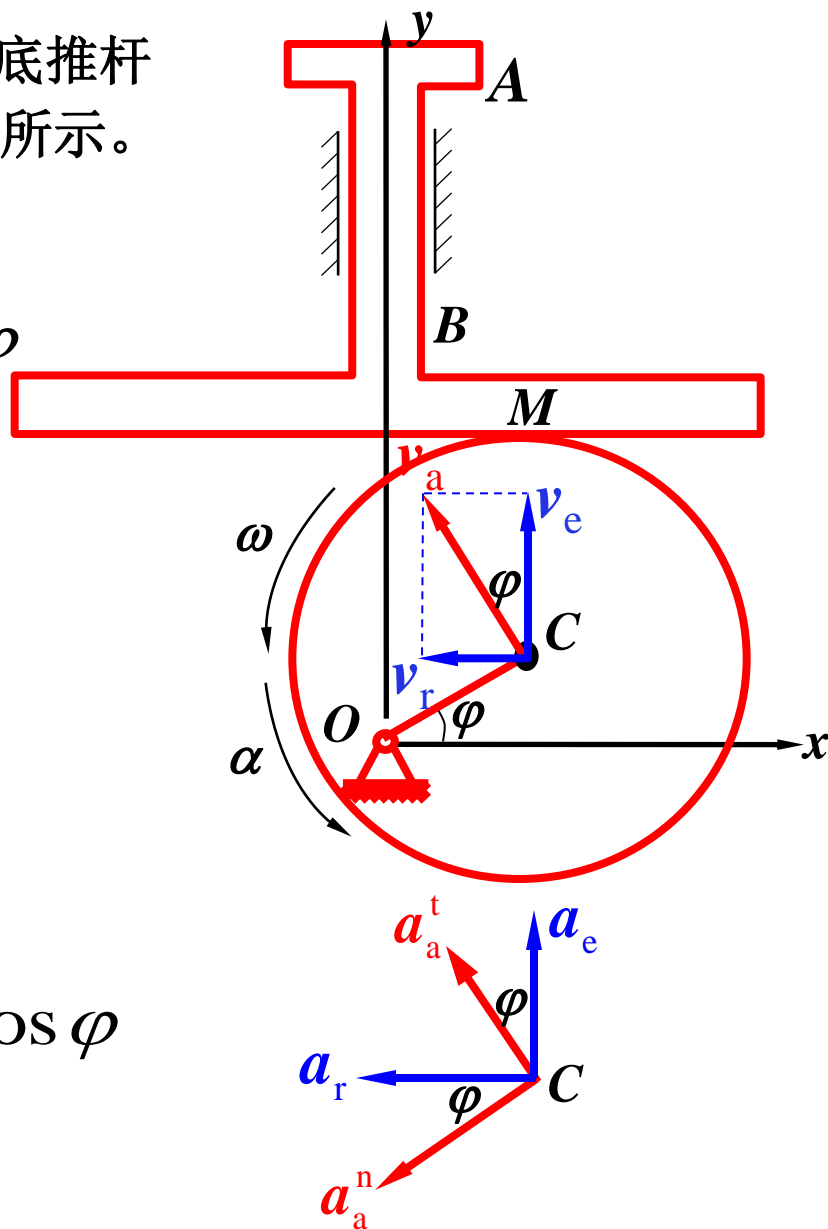
$$a_a^n = e\omega^2 \quad a_a^t = e\alpha$$

向 $y$ 轴投影：

$$-a_a^n \sin \varphi + a_a^t \cos \varphi = a_e$$

可求得：

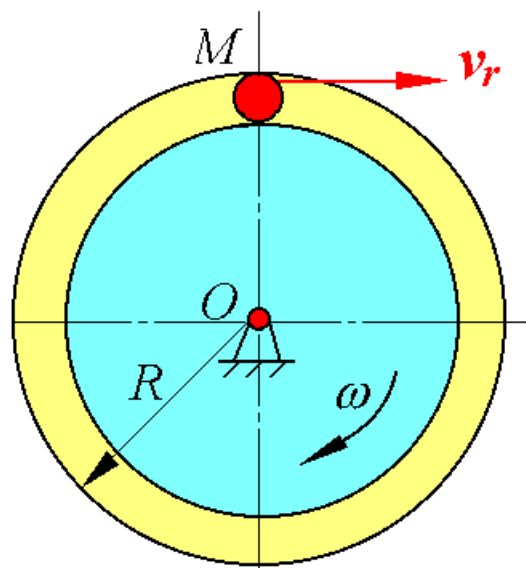
$$\begin{aligned} a_{AB} = a_e &= -a_a^n \sin \varphi + a_a^t \cos \varphi \\ &= e\alpha \cos \varphi - e\omega^2 \sin \varphi \end{aligned}$$



## § 7-4 牵连运动为转动时点的加速度合成定理

上一节我们证明了牵连运动为平移时的点的加速度合成定理，那么当牵连运动为转动时，上述的加速度合成定理是否还适用呢？下面我们来分析一特例。

设一圆盘以匀角速度 $\omega$ 绕定轴 $O$ 顺时针转动，盘上圆槽内有一点 $M$ 以大小不变的速度 $v_r$ 沿槽作圆周运动，那么 $M$ 点相对于静系的绝对加速度应是多少呢？

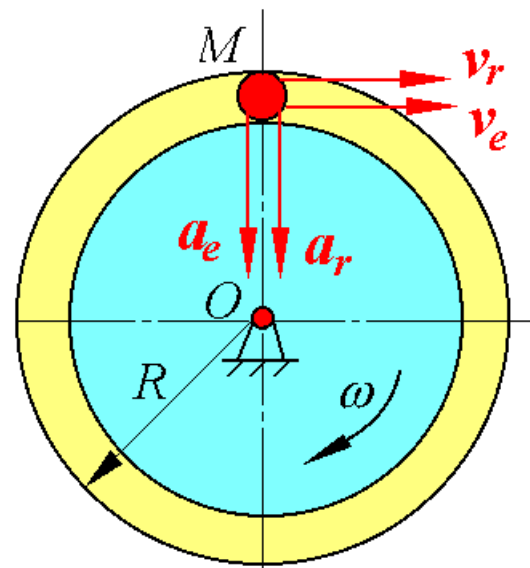


选点 $M$ 为动点，动系固结与圆盘上，  
则 $M$ 点的牵连运动为匀速转动

$$v_e = \omega R, \quad a_e = \omega^2 R$$

相对运动为匀速圆周运动，

$$v_r = \text{const}, \quad a_r = \frac{v_r^2}{R} \quad (\text{方向如图})$$



由速度合成定理可得出

$$v_a = v_e + v_r = \omega R + v_r = \text{const}$$

即绝对运动也为匀速圆周运动，所以

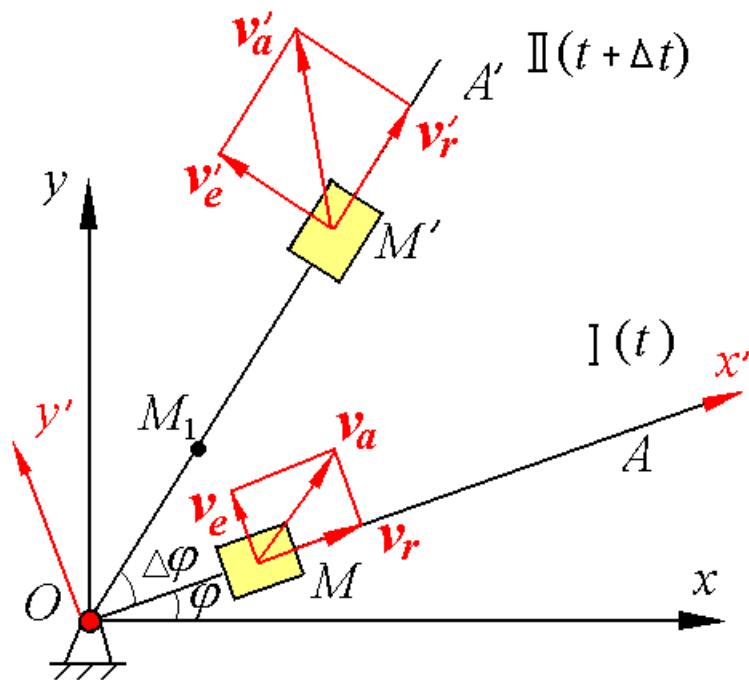
$$a_a = \frac{v_a^2}{R} = \frac{(R\omega + v_r)^2}{R} = R\omega^2 + \frac{v_r^2}{R} + 2\omega v_r$$

方向指向圆心  $O$  点

$$a_a = \frac{v_a^2}{R} = \frac{(R\omega + v_r)^2}{R} = R\omega^2 + \frac{v_r^2}{R} + 2\omega v_r$$

分析上式： $a_r = v_r^2 / R$ ， $a_e = R\omega^2$ ，还多出一项 $2\omega v_r$ 。

可见，当牵连运动为转动时，动点的绝对加速度 $a_a$ 并不等于牵连加速度 $a_e$ 和相对加速度 $a_r$ 的矢量和。那么他们之间的关系是什么呢？ $2\omega v_r$ 又是怎样出现的呢？它是什么呢？下面我们就来讨论这些问题，推证牵连运动为转动时点的加速度合成定理。



设有已知杆 $OA$ 在图示平面内以匀 $\omega$ 绕轴 $O$ 转动，套筒 $M$ （可视为点 $M$ ）沿直杆作变速运动。取套筒 $M$ 为动点，动系固结于杆 $OA$ 上，定系固结于机架。

### 三种速度分析

牵连速度  
相对速度  
绝对速度

$t$  瞬时 在位置 I

$$\mathbf{v}_e$$

$$\mathbf{v}_r$$

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$$

$t + \Delta t$  瞬时 在位置 II

$$\mathbf{v}'_e$$

$$\mathbf{v}'_r$$

$$\mathbf{v}'_a = \mathbf{v}'_e + \mathbf{v}'_r$$

可以看出，经过 $\Delta t$ 时间间隔，牵连速度和相对速度的大小和方向都变化了。

设动参考系 $O'x'y'z'$ 以角速度 $\omega_e$ 绕定轴转动，不失一般性，取定坐标系的 $z$ 轴为其转轴。设 $k'$ 的端点 $A$ 的矢径为 $r_A$ ，则 $A$ 点的速度既等于 $r_A$ 对时间的一阶导数，又可用矢积来表示，即

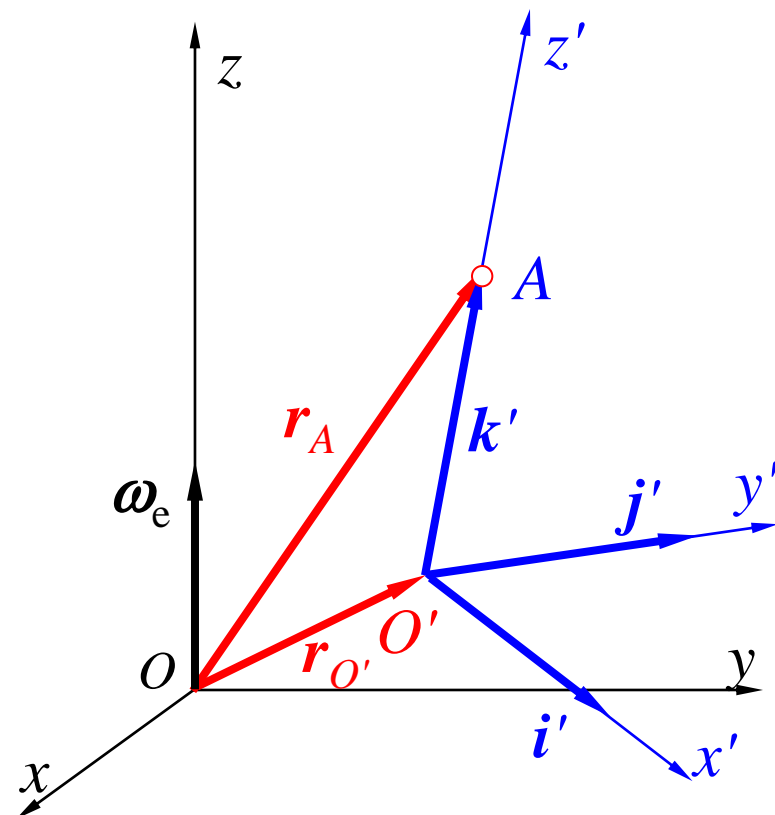
$$\mathbf{v}_A = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} = \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}_A$$

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{k}'$$

$$\frac{d\mathbf{r}_{O'}}{dt} + \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \boldsymbol{\omega}_e \times (\mathbf{r}_{O'} + \mathbf{k}')$$

$$\mathbf{v}_{O'} = \frac{d\mathbf{r}_{O'}}{dt} = \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}_{O'}$$

$$\frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{k}'$$



同样可得 $i'$ 、 $j'$ 的导数。

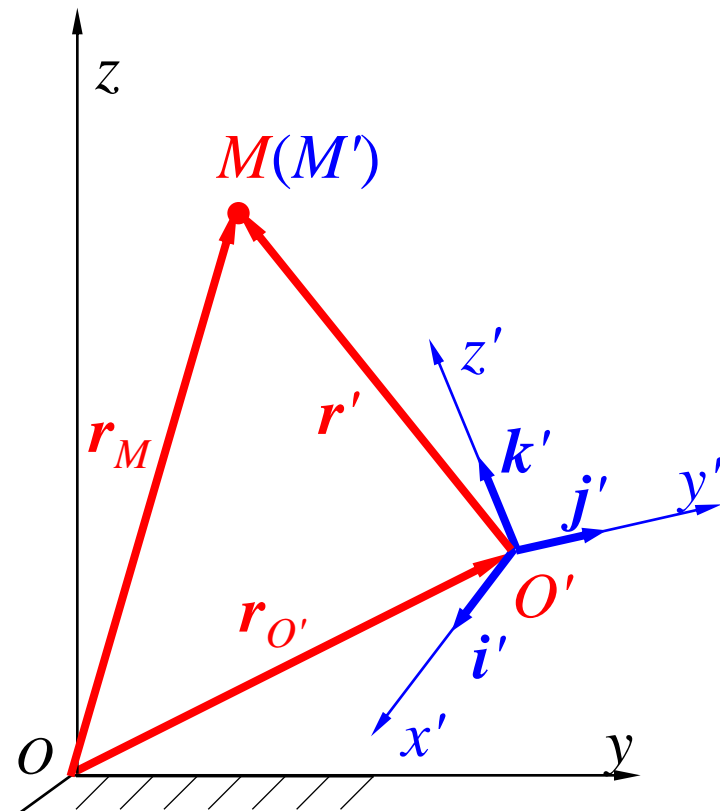
$$\frac{di'}{dt} = \omega_e \times i', \quad \frac{dj'}{dt} = \omega_e \times j', \quad \frac{dk'}{dt} = \omega_e \times k'$$

$$a_r = \frac{\tilde{d}^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \ddot{x}'i' + \ddot{y}'j' + \ddot{z}'k'$$

$$a_e = \frac{d^2 \mathbf{r}_{M'}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}_{O'} + x'\ddot{i}' + y'\ddot{j}' + z'\ddot{k}'$$

$$\begin{aligned} a_a = \frac{d^2 \mathbf{r}_M}{dt^2} &= \ddot{\mathbf{r}}_{O'} + x'\ddot{i}' + y'\ddot{j}' + z'\ddot{k}' \\ &\quad + \ddot{x}'i' + \ddot{y}'j' + \ddot{z}'k' \\ &\quad + 2(\dot{x}'\dot{i}' + \dot{y}'\dot{j}' + \dot{z}'\dot{k}')^x \end{aligned}$$

$$= a_e + a_r + 2(\dot{x}'\dot{i}' + \dot{y}'\dot{j}' + \dot{z}'\dot{k}')$$

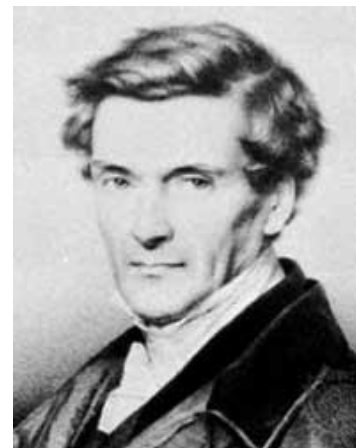


$$\begin{aligned}
 2(\dot{x}'\dot{i}' + \dot{y}'\dot{j}' + \dot{z}'\dot{k}') &= 2[\dot{x}'(\omega_e \times \dot{i}') + \dot{y}'(\omega_e \times \dot{j}') + \dot{z}'(\omega_e \times \dot{k}')] \\
 &= 2\omega_e \times (\dot{x}'\dot{i}' + \dot{y}'\dot{j}' + \dot{z}'\dot{k}') \\
 &= 2\omega_e \times \mathbf{v}_r
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + 2\omega_e \times \mathbf{v}_r$$

令  $\mathbf{a}_C = 2\omega_e \times \mathbf{v}_r$  , 称为**科氏加速度**, 于是有

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C$$



法国科里奥利。1792-1843

点的加速度合成定理：动系转动时，动点在某瞬时的绝对加速度等于该瞬时它的牵连加速度、相对加速度与科氏加速度的矢量和。



牵连运动为转动时，加速度合成定理为

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_C$$

一般式

$$\vec{a}_a^t + \vec{a}_a^n = \vec{a}_e^t + \vec{a}_e^n + \vec{a}_r^t + \vec{a}_r^n + \vec{a}_C$$

一般情况下科氏加速度  $\vec{a}_C$  的计算可以用矢积表示

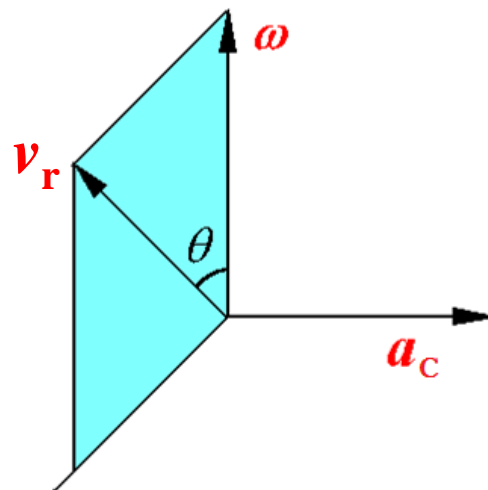
$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$$

大小： $a_C = 2\omega v_r \sin(\vec{\omega}, \vec{v}_r)$

方向：按右手法则确定。

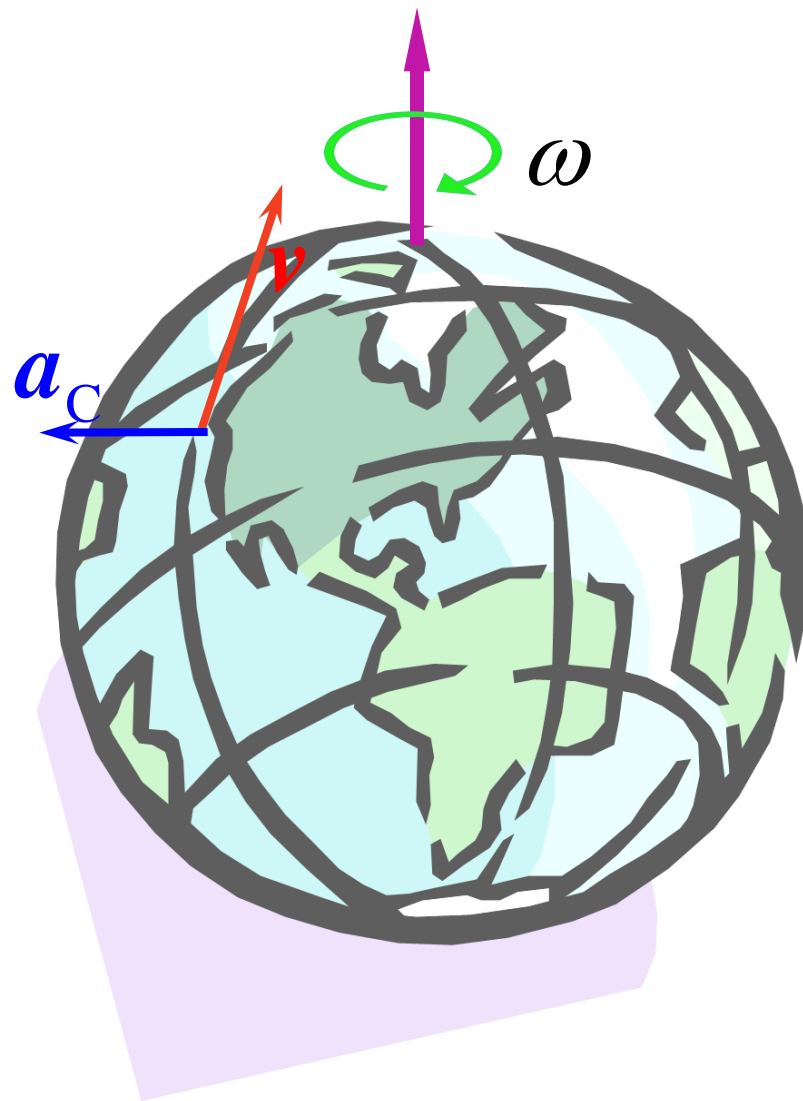
$\theta = 90^\circ$  ( $\vec{\omega} \perp \vec{v}_r$ ),  $a_C = 2\omega v_r$

$\theta = 0^\circ$  或  $180^\circ$  ( $\vec{\omega} \parallel \vec{v}_r$ ),  $a_C = 0$

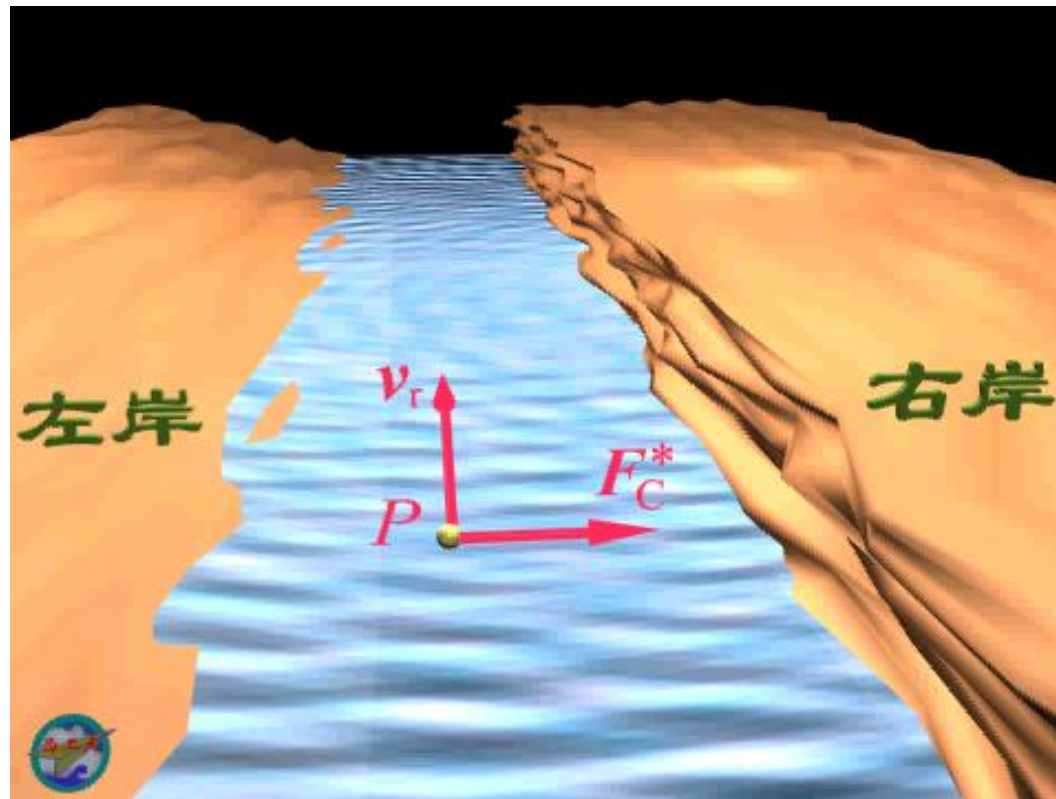


# 自然现象中的科氏加速度

地球北半球  
上水流的科氏加  
速度



在北半球，河水向北流动时，河水的科氏加速度向左，由动力学可知，河水必受右岸对水向左的作用力，河水因此对右岸有反作用力。北半球的江河，其右岸都受有较明显的冲刷。



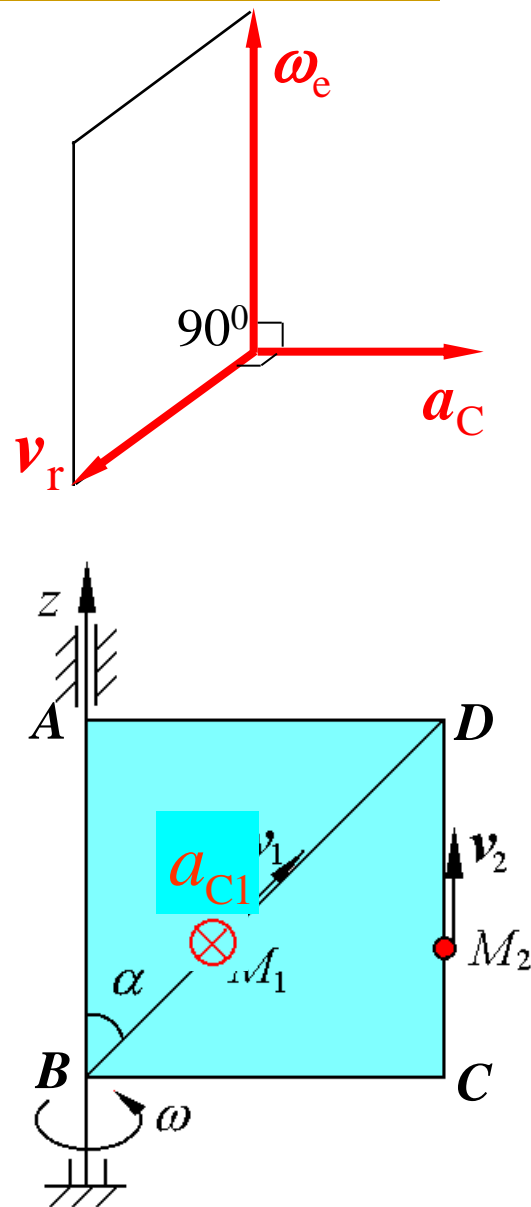
工程中常见的平面机构中 $\omega_e$ 和 $v_r$ 是垂直的，此时 $a_C = 2\omega_e v_r$ ；且真实的 $v_r$ 顺 $\omega_e$ 实际转向转 $90^\circ$  就是 $a_C$ 的方向。

[例] 矩形板 $ABCD$ 以匀角速度 $\omega$ 绕固定轴 $z$ 转动，点 $M_1$ 和点 $M_2$ 分别沿板的对角线 $BD$ 和边线 $CD$ 运动，在图示位置时相对于板的速度分别为 $v_1$ 和 $v_2$ ，计算点 $M_1$ 、 $M_2$ 的科氏加速度大小，并图示方向。

解：点 $M_1$ 的科氏加速度

$$a_{C1} = 2\omega v_1 \sin \alpha \quad \text{垂直板面向里} \otimes.$$

$$\text{点 } M_2 \text{ 的科氏加速度} \quad a_{C2} = 0 \quad (\vec{\omega} // \vec{v}_2)$$



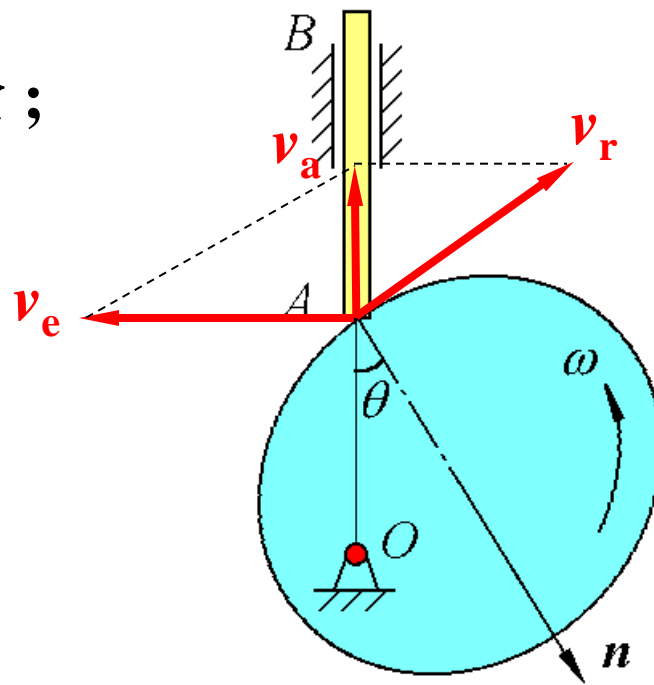
[例] 已知凸轮机构以匀角速度 $\omega$ 绕 $O$ 轴转动，  
图示瞬时 $OA=r$ ， $A$ 点的曲率半径 $\rho$ ， $\theta$ 已知。  
求：该瞬时顶杆 $AB$ 的速度和加速度。

解：动点：顶杆上 $A$ 点；    动系：凸轮；

根据速度合成定理  $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$   
作出速度平行四边形，求得

$$v_{AB} = v_a = v_e \cdot \tan \theta = r\omega \tan \theta (\uparrow)$$

$$v_r = v_e / \cos \theta = r\omega / \cos \theta$$



由牵连运动为转动时的加速度合成定理

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r^t + \mathbf{a}_r^n + \mathbf{a}_C$$

绝对加速度  $a_a = ?$  , 方向  $// AB$

牵连加速度  $a_e^t = 0$  ,  $a_e = a_e^n = r\omega^2$  , A 指向 O

相对加速度  $a_r^n = v_r^2 / \rho = r^2 \omega^2 / \rho \cos^2 \theta$  方向沿  $n$

$a_r^t = ?$  方向垂直  $n$

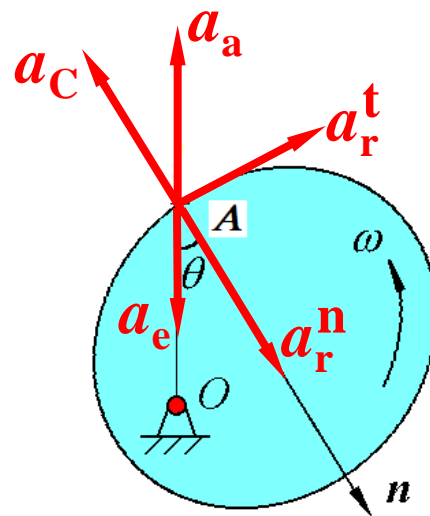
科氏加速度  $a_C = 2\omega v_r = 2r\omega^2 / \cos \theta$

$v_r$  顺  $\omega$  的转向转  $90^\circ$ , 即  $n$  的反方向。

向  $n$  轴投影:  $-a_a \cos \theta = a_e \cos \theta + a_r^n - a_C$

$$\therefore a_{AB} = a_a = -(r\omega^2 \cos \theta + r^2 \omega^2 \sec^2 \theta / \rho - 2r\omega^2 \sec \theta) / \cos \theta$$

$$= -r\omega^2 (1 + r \sec^3 \theta / \rho - 2 \sec^2 \theta)$$



[例]刨床的急回机构如图所示。曲柄 $OA$ 的角速度为 $\omega$ ，通过滑块 $A$ 带动摇杆 $O_1B$ 摆动。已知 $OA=r$ ， $OO_1=l$ ，求当 $OA$ 水平时 $O_1B$ 的角速度 $\omega_1$ 角加速度 $\alpha_1$ 。

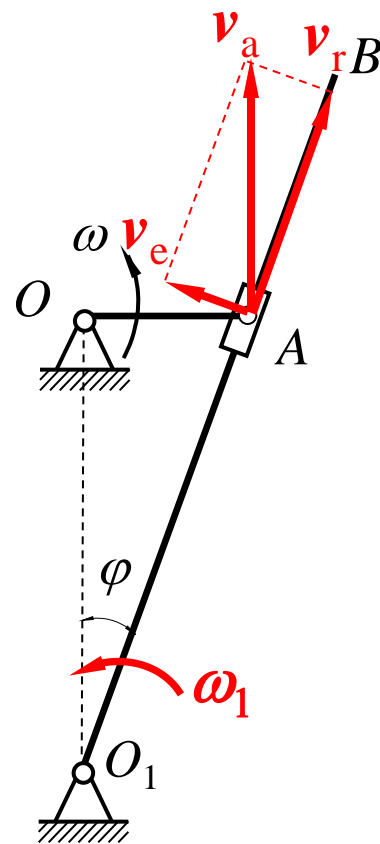
解： 选取滑块 $A$ 作为研究的动点，把动系固定在摇杆 $O_1B$ 上。作速度矢图。

$$v_e = v_a \sin \varphi = r\omega \sin \varphi$$

$$v_e = O_1A \times \omega_1 = \frac{r^2 \omega}{\sqrt{(l^2 + r^2)}}$$

$$O_1A = \sqrt{(l^2 + r^2)} \quad \omega_1 = \frac{r^2 \omega}{l^2 + r^2}$$

$$v_r = \frac{\omega r l}{\sqrt{l^2 + r^2}}$$



由于动参考系作转动，因此加速度合成定理为：

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C = \mathbf{a}_e^n + \mathbf{a}_e^t + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C$$

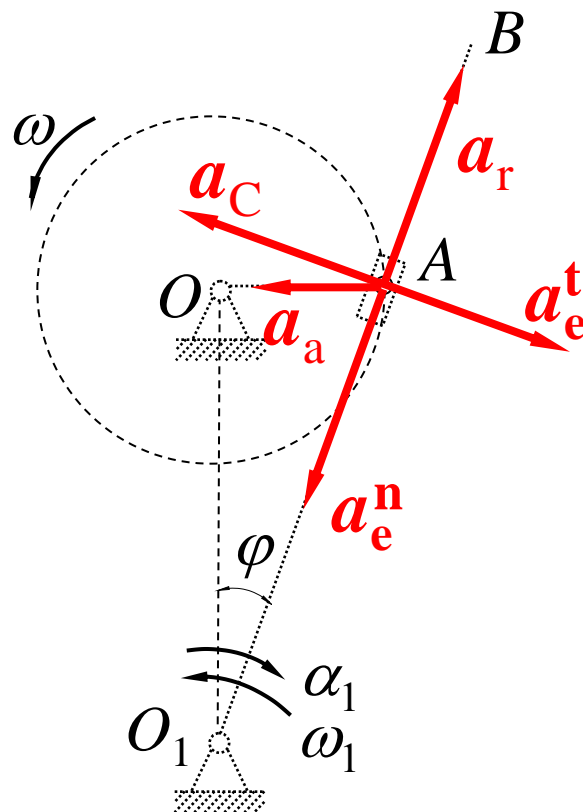
$$a_a = r\omega^2 \quad a_C = 2\omega_1 v_r$$

$$a_e^t = \alpha_1 \cdot O_1 A \quad \text{假设 } \alpha_1 \text{ 的转向为顺时针转向。}$$

$$a_e^n = O_1 A \cdot \omega_1^2 = \frac{r^4 \omega^2}{(l^2 + r^2)^{3/2}} \quad \text{可以不算}$$

$$v_r = \frac{\omega r l}{\sqrt{l^2 + r^2}}, \quad \omega_1 = \frac{r^2 \omega}{l^2 + r^2}$$

$$a_C = \frac{2\omega^2 r^3 l}{(l^2 + r^2)^{3/2}}$$





为了求得 $a_e^t$ ，应将加速度合成定理向轴 $\eta$ 投影：

$$a_{a\eta} = a_{e\eta}^n + a_{e\eta}^t + a_{r\eta} + a_{C\eta}$$

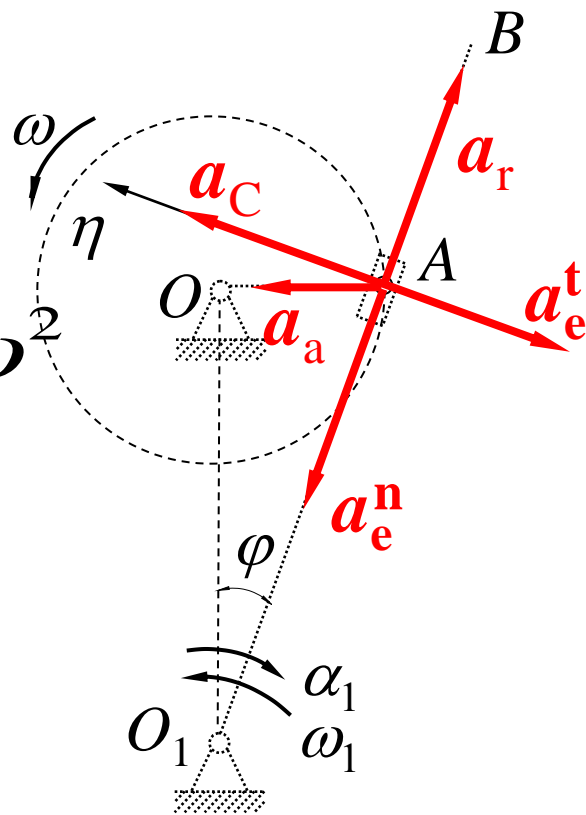
即：  $a_a \cos \varphi = a_C - a_e^t$

得：  $a_e^t = -\frac{rl(l^2 - r^2)}{(l^2 + r^2)^{3/2}} \omega^2$

摇杆 $O_1B$ 的角加速度：

$$\alpha_1 = \frac{a_e^t}{O_1A} = -\frac{rl(l^2 - r^2)}{(l^2 + r^2)^2} \omega^2$$

负号表示 $\alpha_1$ 的转向应为逆时针转向。



[例]牛头刨床机构如图所示。已知  $O_1A=200\text{mm}$ ，以匀角速度  $\omega_1=2\text{rad/s}$  转动，求图示位置滑枕  $CD$  的速度和加速度。P197、7-27

解：速度分析

1) 取套筒  $A$  为动点，动系与摇杆  $O_2B$  固连。

$$v_{a1} = O_1A \cdot \omega_1 = 200 \times 2 = 400 \text{ mm/s}$$

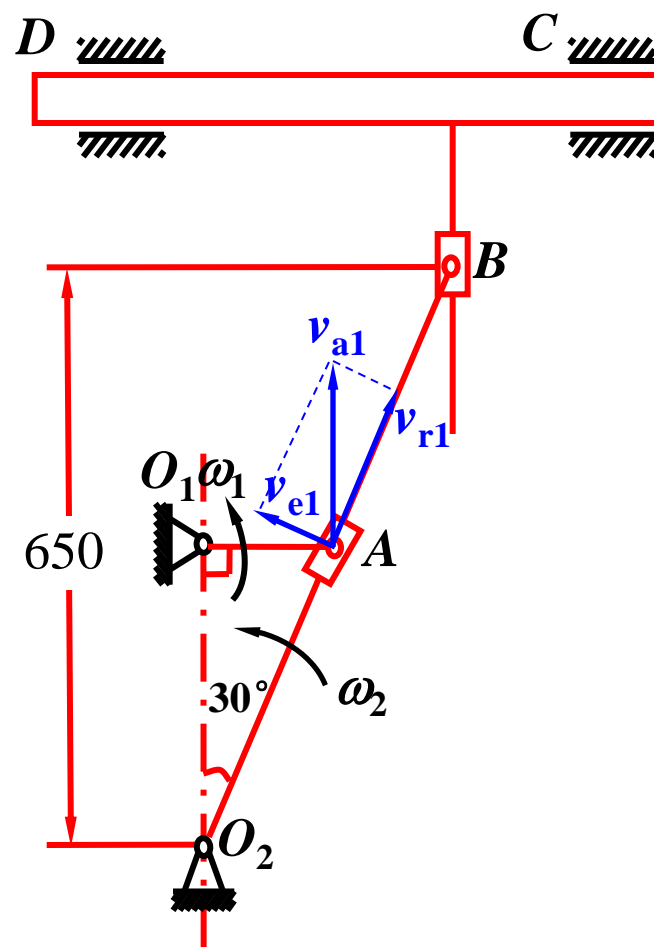
由速度合成定理作速度矢图可得：

$$v_{e1} = v_{a1} \sin 30^\circ = 200 \text{ mm/s}$$

$$v_{r1} = v_{a1} \cos 30^\circ = 200\sqrt{3} \text{ mm/s}$$

$$O_2A = \frac{O_1A}{\sin 30^\circ} = 400 \text{ mm}$$

$$\omega_2 = \omega_{o_2B} = \frac{v_{e1}}{O_2A} = \frac{200}{400} = 0.5 \text{ rad/s}$$



2) 取套筒B为动点，动系与滑枕CD固连。

由速度合成定理作速度矢图可得：

$$v_{a2} = O_2B \cdot \omega_2 = \frac{650}{\cos 30^\circ} \times 0.5 = \frac{650}{\sqrt{3}} \text{ mm/s}$$

$$v_{e2} = v_{a2} \cos 30^\circ = 325 \text{ mm/s}$$

滑枕CD的速度为  $v_{CD} = v_{e2} = 325 \text{ mm/s}$

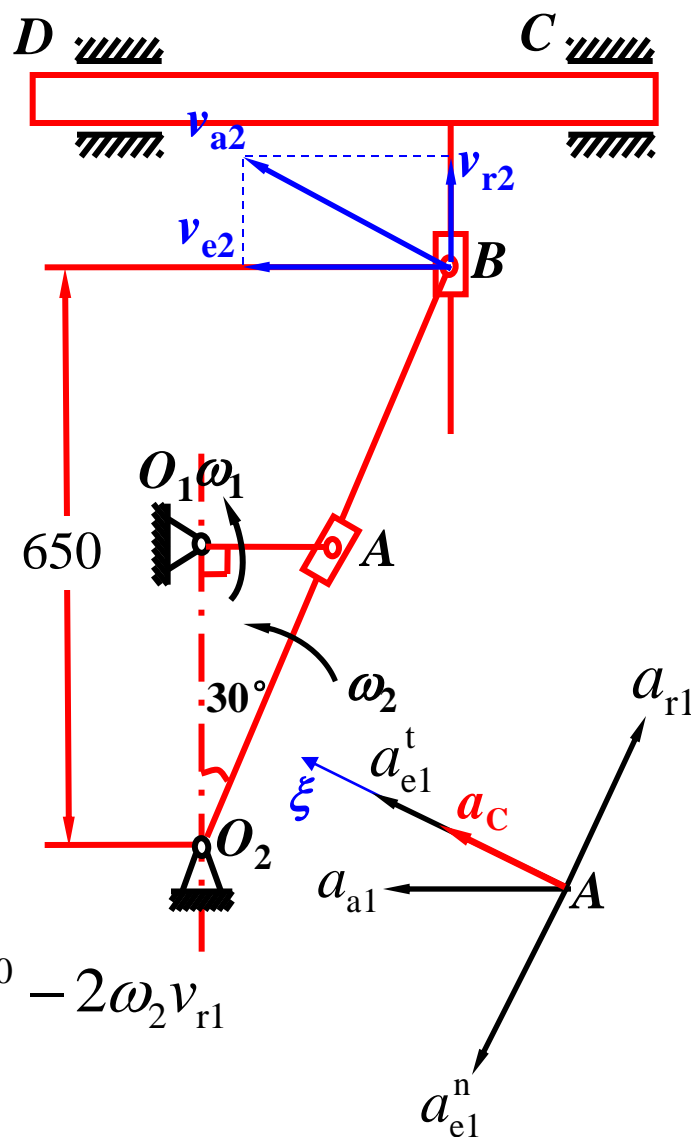
加速度分析

由A点的加速度合成定理有

$$a_{a1} = a_{a1}^n = a_{e1}^n + a_{e1}^t + a_{r1} + a_C$$

在 $\xi$ 轴上投影得  $a_{a1} \cos 30^\circ = a_{e1}^t + a_C$

$$\begin{aligned} \text{于是 } a_{e1}^t &= a_{a1} \cos 30^\circ - a_C = O_1A\omega_1^2 \cos 30^\circ - 2\omega_2 v_{r1} \\ &= 200\sqrt{3} \text{ mm/s}^2 \end{aligned}$$



$O_2B$ 杆的角加速度为

$$\alpha_2 = \alpha_{O_2B} = \frac{a_{e1}^t}{O_2A} = \frac{200\sqrt{3}}{400} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ rad/s}^2$$

由B点的加速度合成定理有

$$a_{a2}^n + a_{a2}^t = a_{e2} + a_{r2}$$

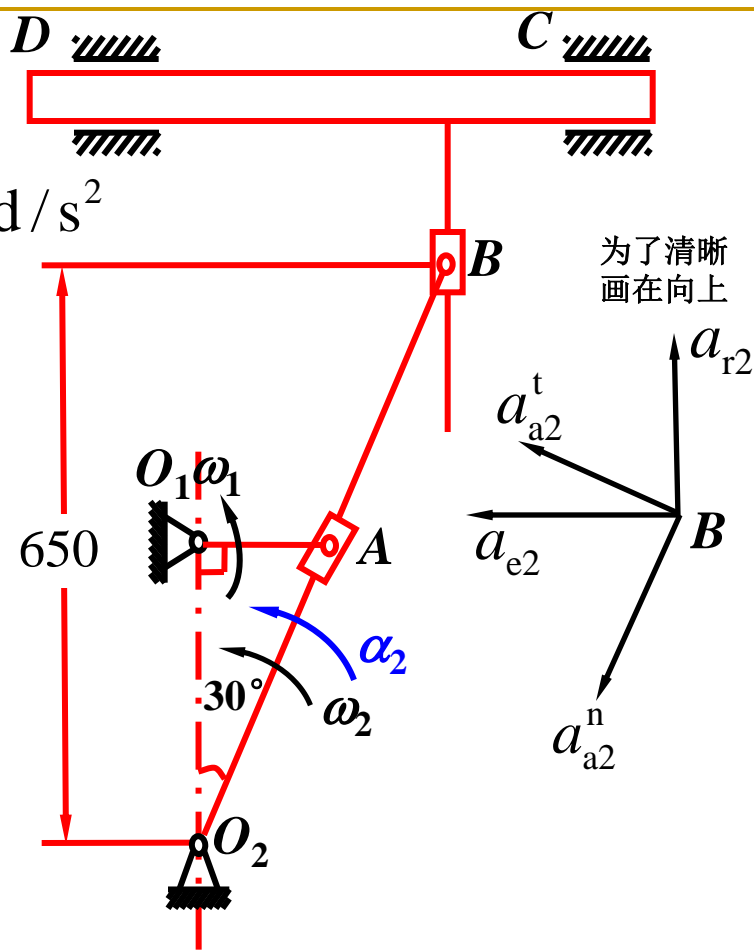
将各加速度向水平方向投影得：

$$a_{a2}^n \cos 60^\circ + a_{a2}^t \cos 30^\circ = a_{e2}$$

$$a_{a2}^n = O_2B \cdot \omega_2^2 = \frac{650}{\cos 30^\circ} \cdot 0.5^2 = \frac{325}{\sqrt{3}} \text{ mm/s}^2$$

$$a_{a2}^t = O_2B \cdot \alpha_2 = \frac{650}{\cos 30^\circ} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 650 \text{ mm/s}^2$$

滑枕CD的加速度为  $a_{CD} = a_{e2} = 657 \text{ mm/s}^2$



[例] **P194.7-15**在公路行使的两车速度恒为72km/h。在A车中的观察者看来车B的速度和加速度为多大？在B车中的观察者看来车A的速度和加速度又为多大？

解：选B为动点，A为动系(平移)，得到的是B相对于动系的速度和加速度，即在A中观察到车B的速度和加速度。

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{a1} = \vec{v}_{e1} + \vec{v}_{r1} = \vec{v}_A + \vec{v}_{r1}$$

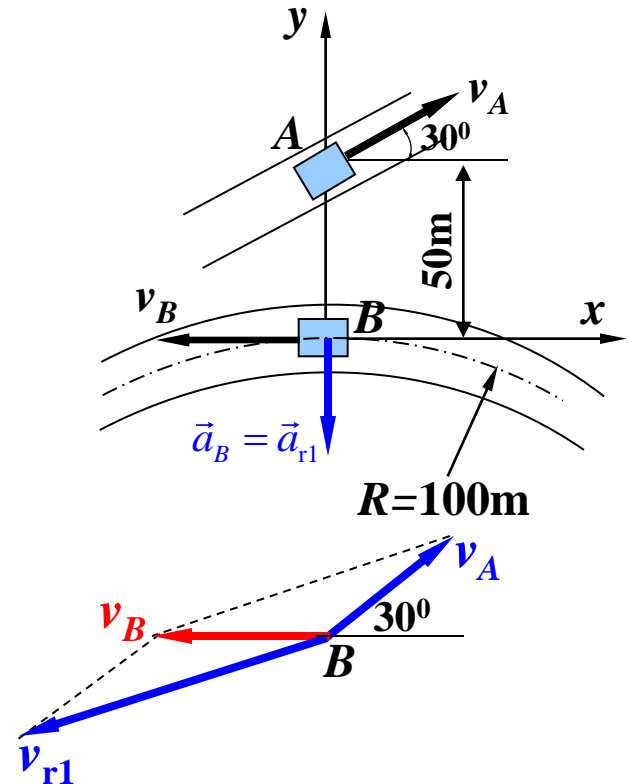
$$v_A = v_B = 72\text{km/h} = 20\text{m/s}$$

$$\vec{v}_B = -20\vec{i}, \quad \vec{v}_A = 20\cos 30^\circ \vec{i} + 20\sin 30^\circ \vec{j}$$

$$\therefore \vec{v}_{r1} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = -(37.3\vec{i} + 10\vec{j})\text{m/s}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{a1} = \vec{a}_{e1} + \vec{a}_{r1} = \vec{a}_{r1}$$

$$\therefore \vec{a}_{r1} = \vec{a}_B = -\frac{v_B^2}{R} \vec{j} = -4\vec{j}\text{m/s}^2$$



选A为动点，B为动系(转动)，得到的是A相对于动系的速度和加速度，即在B中观察到车A的速度和加速度。

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{a2} = \vec{v}_{e2} + \vec{v}_{r2}$$

$$\vec{v}_A = 20 \cos 30^\circ \vec{i} + 20 \sin 30^\circ \vec{j}$$

$$\vec{v}_{e2} = -150 \cdot \frac{v_B}{R} \vec{i} = -30 \vec{i}$$

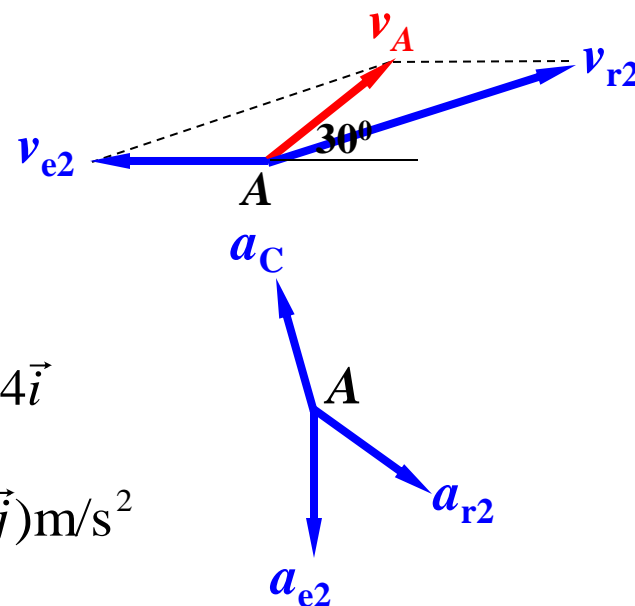
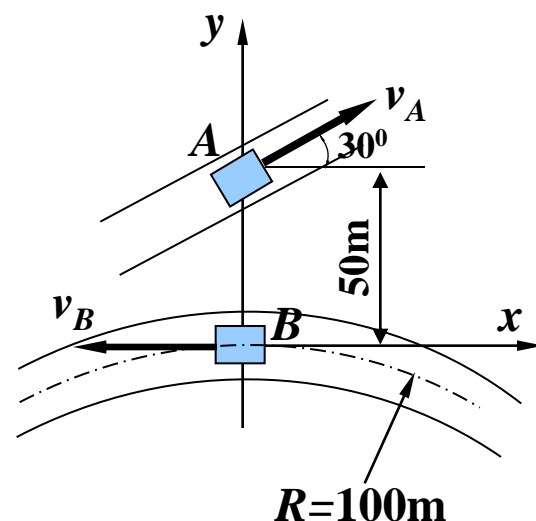
$$\therefore \vec{v}_{r2} = \vec{v}_A - \vec{v}_{e2} = (47.3 \vec{i} + 10 \vec{j}) \text{m/s}$$

$$\vec{a}_A = 0 = \vec{a}_{a2} = \vec{a}_{e2} + \vec{a}_{r2} + \vec{a}_C$$

$$\vec{a}_{e2} = -150 \left( \frac{v_B}{R} \right)^2 \vec{j} = -150 \cdot (0.2)^2 = -6 \vec{j}$$

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r = 2(0.2\vec{k}) \times (47.3\vec{i} + 10\vec{j}) = 18.9\vec{j} - 4\vec{i}$$

$$\therefore \vec{a}_{r2} = -\vec{a}_{e2} - \vec{a}_C = 6\vec{j} - 18.9\vec{j} + 4\vec{i} = (4\vec{i} - 12.9\vec{j}) \text{m/s}^2$$

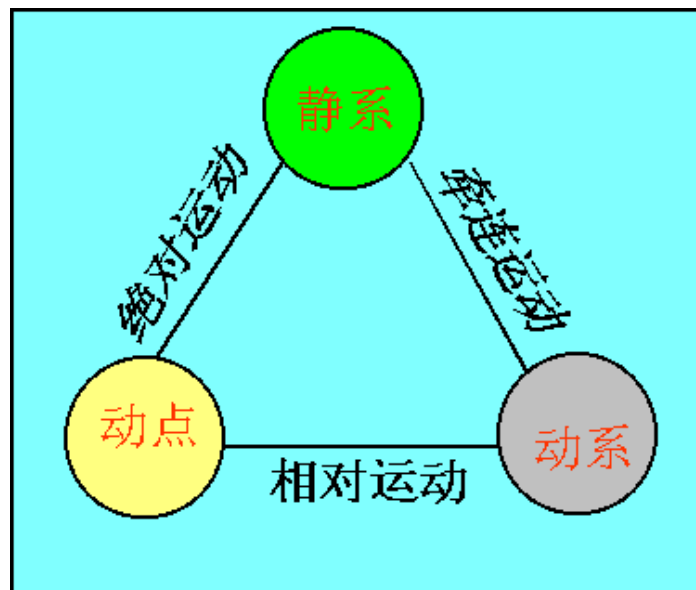


## 第七章 点的合成运动习题课

### 一、概念及公式

#### 1、一点、二系、三运动

点的绝对运动为点的相对运动  
与牵连运动的合成。



#### 2、速度合成定理 $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$

#### 3、加速度合成定理

牵连运动为平移时  $\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r$

注意加速度切  
向和法向分量

牵连运动为转动时  $\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C$  ( $\mathbf{a}_C = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$ )

## 二、解题步骤

- 1、选择动点、动系和定系。
- 2、分析三种运动：绝对运动、相对运动和牵连运动。
- 3、作速度分析,画出速度平行四边形,求出有关未知量(速度,角速度)。
- 4、作加速度分析,画出加速度矢量图,求出有关的加速度、角加速度未知量。



### 三、解题技巧

1、恰当地选择动点和动系,应满足选择原则,具体地有:

①两个不相关的动点,求二者的相对速度。

根据题意,选择其中之一为动点,动系为固结于另一点的坐标系。

②运动刚体上有一动点,点作复杂运动。

该点取为动点,动系固结于运动刚体上。

③机构传动,传动特点是在一个刚体上存在一个不变的接触点,相对于另一个刚体运动。

例如导杆滑块机构,取滑块为动点,动系固结于导杆。凸轮挺杆机构,取杆上与凸轮接触点为动点,动系固结与凸轮。摇杆滑道机构,取滑道中的点为动点,摇杆为动系等。

④特殊问题，特点是相接触两个物体的接触点位置都随时间而变化，此时，这两个物体的接触点都不宜选为动点，应选择满足前述的选择原则的非接触点为动点。

2、速度问题，一般采用几何法求解简便，即作出速度平行四边形求解，超过三个矢量，必须采用解析法求解；

3、加速度问题，往往超过三个矢量，一般采用解析（投影）法求解，投影轴的选取依解题简便的要求而定。

## 四、注意问题

- 1、牵连速度及加速度是牵连点的速度及加速度。
- 2、**牵连为转动时**加速度分析**不要丢掉**  $\vec{a}_c$ ，正确分析和计算  $\vec{a}_c$ 。
- 3、加速度矢量方程的投影是等式两端的投影，**特别要注意与静力平衡方程的投影式不同。**
- 4、圆周运动时，  $a_n = v^2 / R = \omega^2 R$   
非圆周运动时，  $a_n = v^2 / \rho = \omega^2 \rho$  ( $\rho$  为曲率半径)

## [例] 曲柄滑杆机构

已知:  $OA=l$ ,  $\varphi=45^\circ$  时,  $\omega$ ,  $\alpha$ ;  
求: 小车的速度与加速度.

解: 动点:  $OA$  杆上  $A$  点;

动系: 固结在滑杆上.

绝对运动: 圆周运动,  $v_a = l\omega$  (方向  $\perp OA$ )

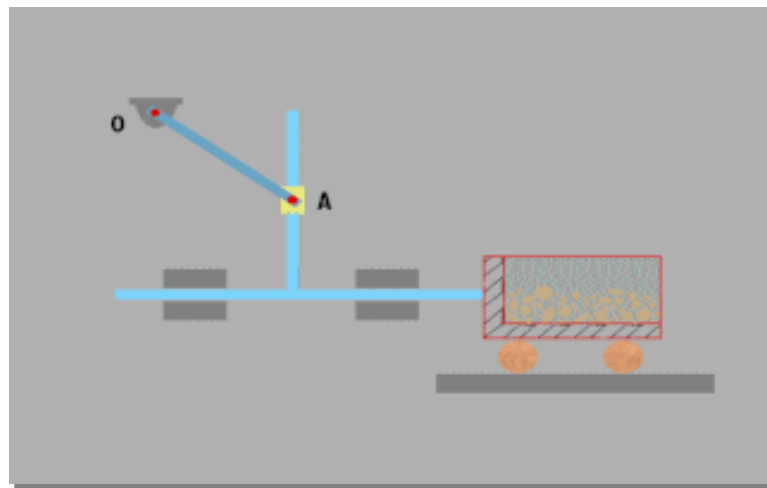
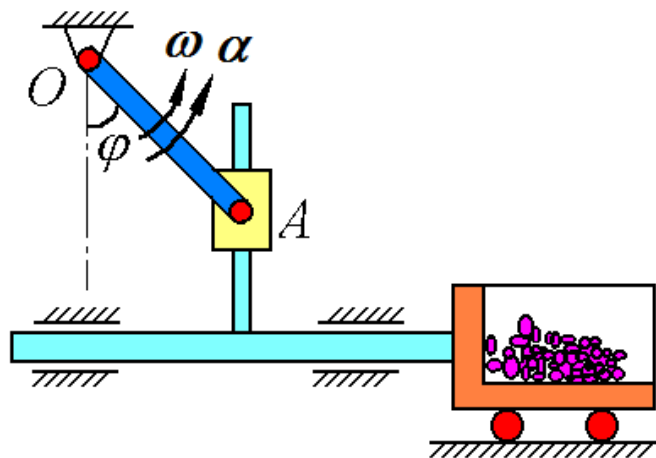
$a_a^t = l\alpha$  (方向  $\perp OA$ )       $a_a^n = l\omega^2$  (沿  $AO$  指向  $O$ )

相对运动: 直线运动,

$v_r = ?$      $a_r = ?$       铅直方向

牵连运动: 平移;

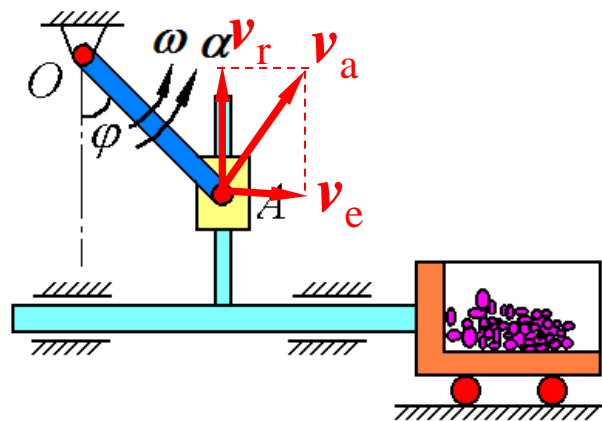
$v_e = ?$      $a_e = ?$       方向水平,  
大小待求.



根据速度合成定理  $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$  作出速度平行四边形, 如图示

$$v_e = v_a \cos \varphi = l\omega \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} l\omega (\rightarrow)$$

**小车的速度:**  $v = v_e = \sqrt{2} l\omega / 2$



根据牵连运动平移的加速度合成定理

$$\mathbf{a}_a^t + \mathbf{a}_a^n = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r$$

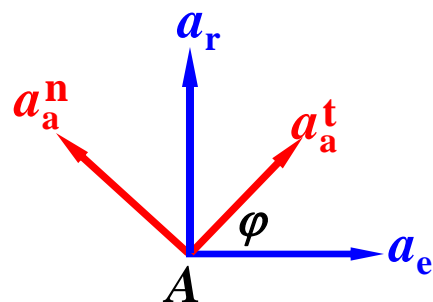
作出加速度矢量图如图示。

在水平方向投影:

$$a_a^t \cos \varphi - a_a^n \sin \varphi = a_e$$

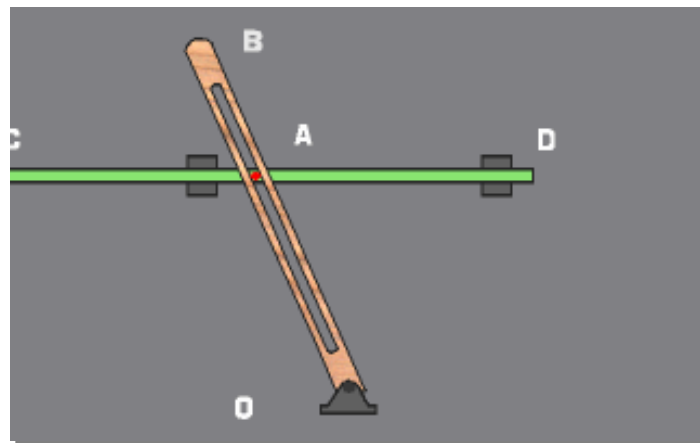
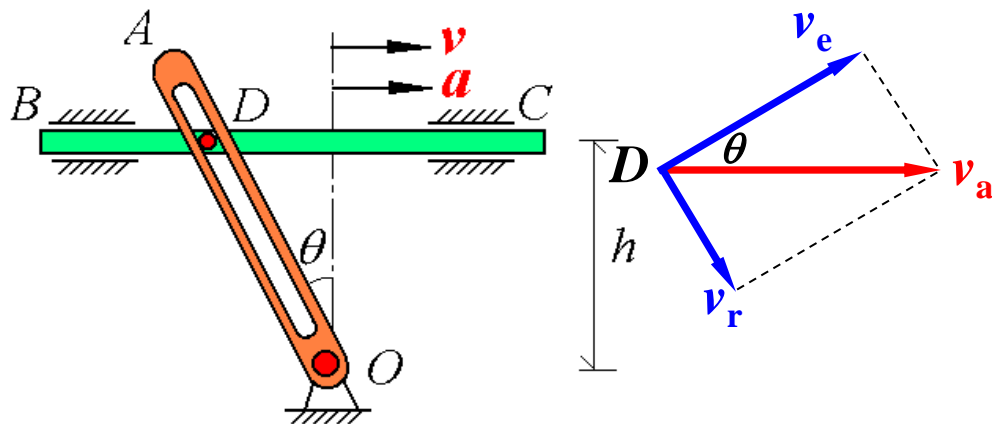
$$\therefore a_e = l\alpha \cos 45^\circ - l\omega^2 \sin 45^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} (\alpha - \omega^2) l \quad , \quad \text{方向如图示}$$



小车的加速度:  $a = a_e$

[例] 已知摇杆滑道机构  $h, \theta, v, a$ 。求:  $OA$  杆的  $\omega, \alpha$ 。



解: 动点: 销子  $D$  ( $BC$ 上); 动系: 固结于  $OA$ 。

绝对运动: 直线运动,  $v_a = v, a_a = a$

相对运动: 直线运动,  $v_r = ?, a_r = ?$ , 沿  $OA$  线

牵连运动: 定轴转动,  $v_e = OD \cdot \omega = ?, \perp OA$

$a_e^t = OD \cdot \alpha = ?, \perp OA$ ;  $a_e^n = OD \cdot \omega^2 = ?$  指向  $O$

根据速度合成定理  $v_a = v_e + v_r$  作出速度平行四边形, 如图示。

$$v_e = v_a \cos \varphi = v \cos \theta, \quad v_r = v_a \sin \theta = v \sin \theta$$

$$\omega = v_e / OD = v \cos \theta / \left( \frac{h}{\cos \theta} \right) = v \frac{\cos^2 \theta}{h} \quad ( \curvearrowright )$$

# 根据牵连运动为转动的加速度合成定理

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e^t + \mathbf{a}_e^n + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C$$

作加速度矢量图。

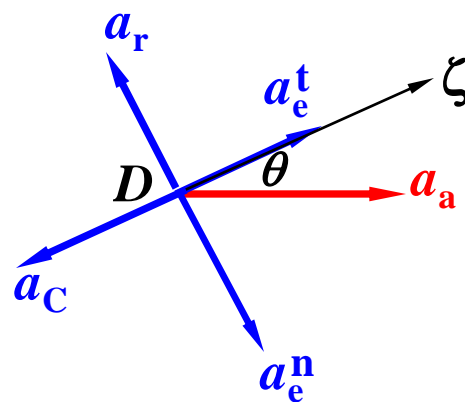
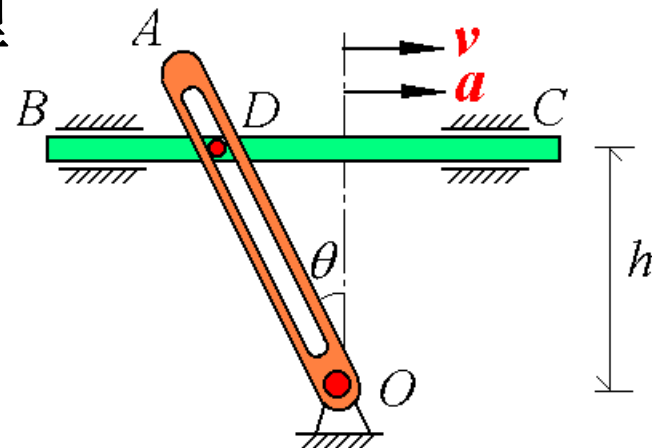
$$a_e^n = \frac{h}{\cos \theta} \cdot \left( \frac{v \cos^2 \theta}{h} \right)^2 = \frac{v^2 \cos^3 \theta}{h},$$

$$a_C = 2\omega v_r = 2 \frac{v \cos^2 \theta}{h} \cdot v \sin \theta$$

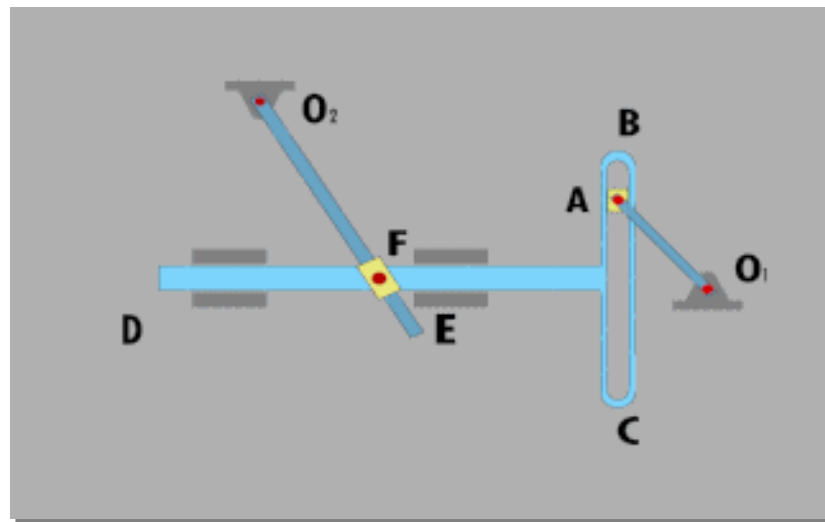
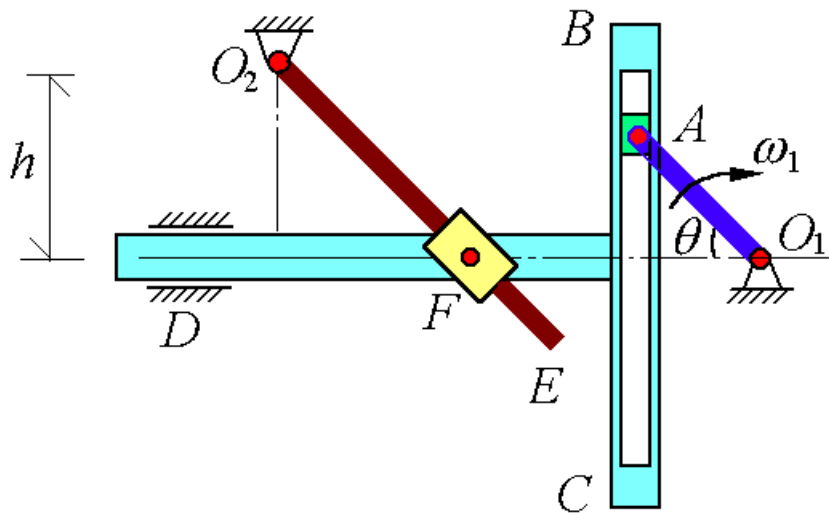
投至 $\xi$ 轴:  $a_a \cos \theta = a_e^t - a_C$

$$a_e^t = a_C + a_a \cos \theta = \frac{2v^2 \cos^2 \theta \sin \theta}{h} + a \cos \theta$$

$$\alpha = \frac{a_e^t}{OD} = \frac{v^2}{h^2} \cos^2 \theta \sin 2\theta + \frac{a}{h} \cos^2 \theta \quad ( \uparrow )$$



[例] 已知曲柄滑块机构  $O_1A=r$ ,  $\omega_1$ ,  $\theta$ ,  $h$ 。图时瞬时  $O_1A \parallel O_2E$ 。求: 该瞬时  $O_2E$  杆的  $\omega_2$ 。



解: 动点:  $O_1A$  上  $A$  点; 动系: 固结于  $BCD$  上。

绝对运动: 圆周运动;  $v_a = r\omega_1$ ,  $\perp O_1A$

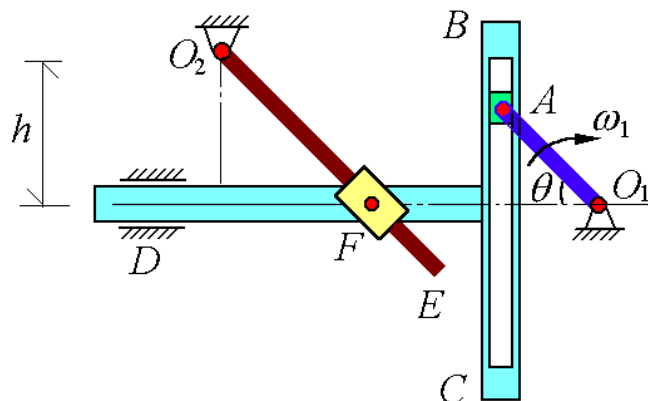
相对运动: 直线运动;  $v_r = ?$ ,  $\parallel BC$

牵连运动: 平移;  $v_e = ?$ , 水平方向



根据  $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$   
作出速度平行四边形

$$v_e = v_a \sin \theta = r\omega_1 \sin \theta$$



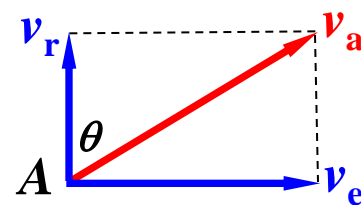
再选动点： $BCD$ 上 $F$ 点

动系：固结于 $O_2E$ 上，

绝对运动：直线运动， $v_{Fa} = r\omega_1 \sin \theta (\rightarrow)$

相对运动：直线运动， $v_{Fr} = ?$ , ( $// O_2E$ )

牵连运动：定轴转动， $v_{Fe} = ?$ , ( $\perp O_2E$ )

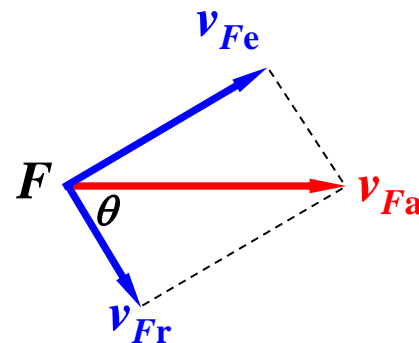


根据  $\mathbf{v}_{Fa} = \mathbf{v}_{Fe} + \mathbf{v}_{Fr}$  作出速度平行四边形

$$v_{Fe} = v_{Fa} \sin \theta = r\omega_1 \sin \theta \cdot \sin \theta = r\omega_1 \sin^2 \theta$$

$$\because v_{Fe} = O_2F \cdot \omega_2, \quad O_2F = h / \sin \theta$$

$$\therefore \omega_2 = \frac{v_{Fe}}{O_2F} = r\omega_1 \sin^2 \theta \cdot \frac{\sin \theta}{h} = \frac{r\omega_1}{h} \sin^3 \theta \quad ( \quad )$$



[例] 图示曲柄滑道机构，圆弧轨道的半径  $R = OA = 10\text{cm}$ ，已知曲柄绕轴  $O$  以匀速  $n = 120\text{rpm}$  转动，求当  $\varphi = 30^\circ$  时滑道  $BCD$  的速度和加速度。

解：取滑块  $A$  为动点，动系与滑道  $BCD$  固连。作速度平行四边形。

求得曲柄  $OA$  转动的角速度为

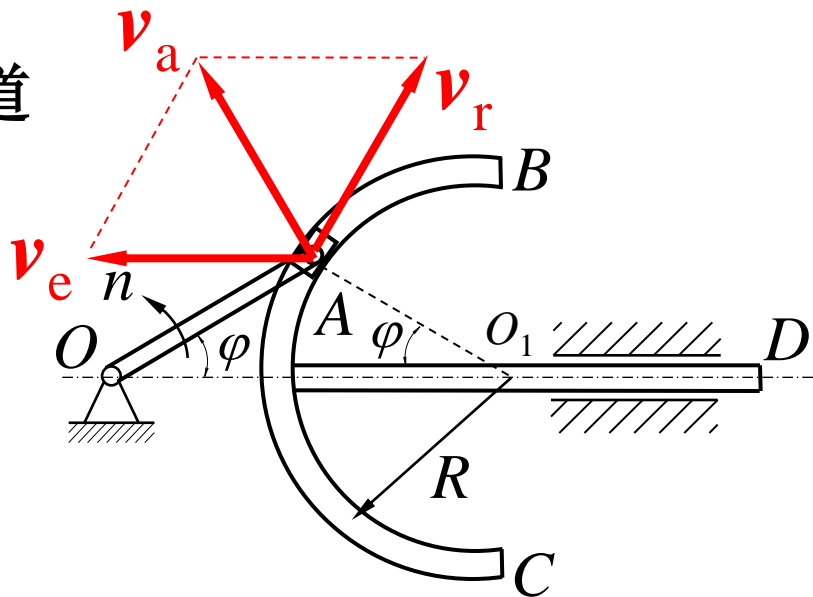
$$\omega = \frac{n\pi}{30} = 4\pi \text{ rad/s}$$

由速度合成定理  $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$

$$v_a = \omega \cdot OA = 125.6 \text{ cm/s}$$

$$v_e = v_r = v_a = 125.6 \text{ cm/s}$$

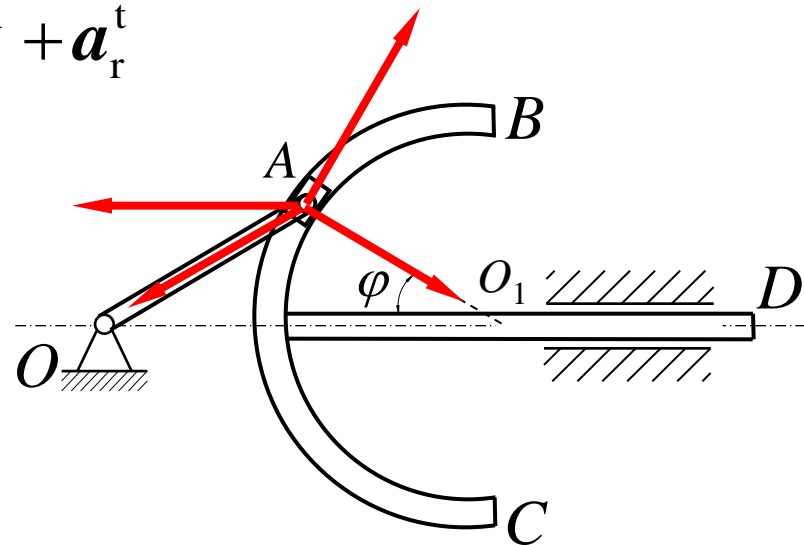
$$v_{BCD} = v_e = 125.6 \text{ cm/s}$$



由加速度合成定理得  $\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r^n + \boldsymbol{a}_r^t$

$$\begin{aligned} a_a &= a_a^n = \omega^2 \cdot OA \\ &= (4\pi)^2 \cdot 10 = 1579 \text{ cm/s}^2 \end{aligned}$$

$$a_r^n = \frac{v_r^2}{O_1A} = \frac{125.6^2}{10} = 1579 \text{ cm/s}^2$$

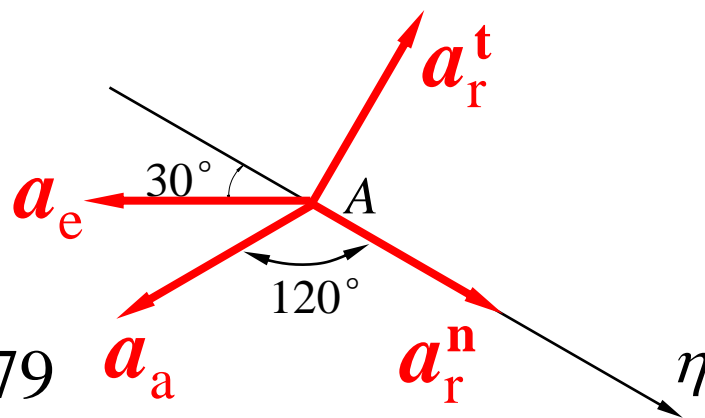


将加速度向 $\eta$ 轴上投影有:

$$\eta: -a_a \cos 60^\circ = -a_e \cos 30^\circ + a_r^n$$

$$a_e = \frac{a_a \cos 60^\circ + a_r^n}{\cos 30^\circ} = \frac{1579 \times 0.5 + 1579}{\sqrt{3}/2}$$

$$= 2740 \text{ cm/s}^2 = 27.4 \text{ m/s}^2$$



速度图在原图上画，  
加速度图在边上画，  
保持方向一致。

## [例] 凸轮机构

已知：凸轮半径为 $R$ ，图示瞬时 $O$ 、 $C$ 在一条铅直线上；已知： $\theta$ ， $v$ ， $a$ 。

求：该瞬时 $OA$ 杆的角速度和角加速度。

分析：由于接触点在两个物体上的位置均是变化的，因此不宜选接触点为动点。

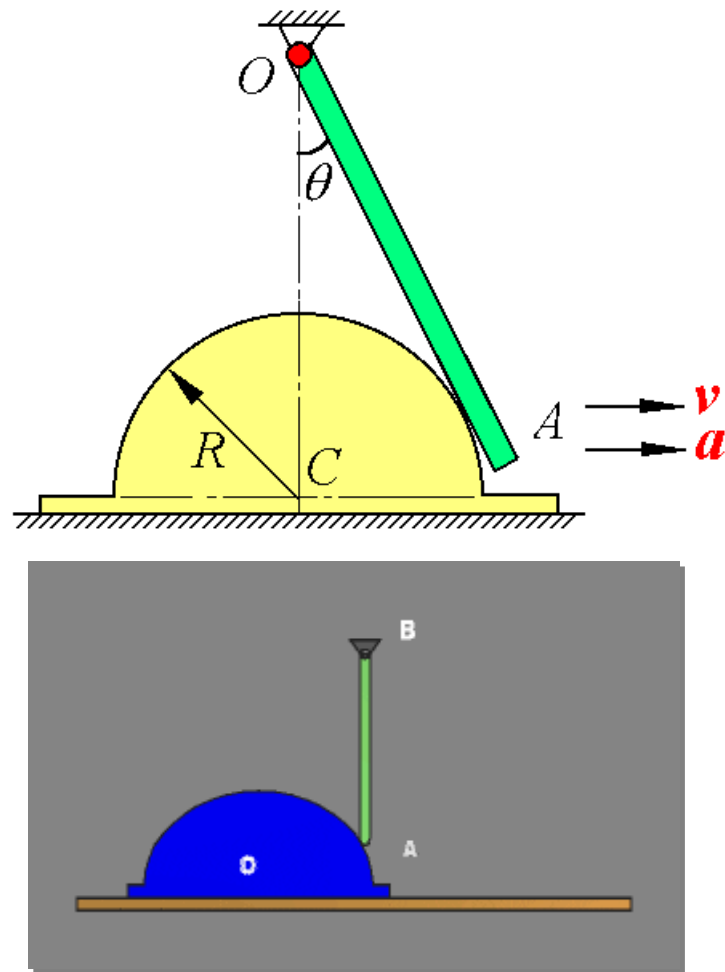
解：取凸轮上 $C$ 点为动点，动系固结于 $OA$ 杆上。

绝对运动：直线运动；相对运动：直线运动；牵连运动：定轴转动。

$$v_a = v, \quad a_a = a$$

$$v_r = ?, \quad a_r = ? \quad \text{方向} // OA \quad v_e = ?, \quad \text{方向} \perp OC$$

$$a_e^n = OC \cdot \omega^2 = ? \quad \text{指向} O ; \quad a_e^t = OC \cdot \alpha = ?, \quad \text{方向} \perp OC$$



根据  $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$  作出速度平行四边形

$$v_e = v_a = v, v_r = 0$$

$$\omega = \frac{v_e}{OC} = \frac{v}{R/\sin\theta} = \frac{v}{R} \sin\theta \quad ( \curvearrowright )$$

根据  $\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e^t + \mathbf{a}_e^n + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C$

作出加速度矢量图  $a_C = 2\omega v_r = 0$

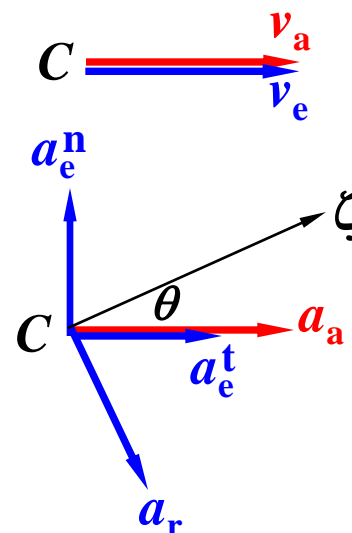
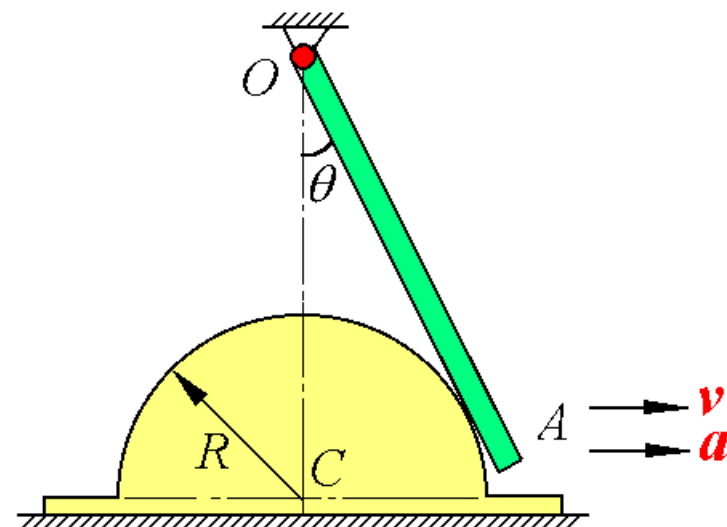
$$a_e^n = OC\omega^2 = \frac{R}{\sin\theta} \cdot \left(\frac{v}{R} \sin\theta\right)^2 = \frac{v^2}{R} \sin\theta$$

投至  $\zeta$  轴:  $a_a \cos\theta = a_e^t \cos\theta + a_e^n \sin\theta$

$$a_e^t = a_a - a_e^n \tan\theta$$

$$\alpha = \frac{a_e^t}{OC} = \frac{a - v^2 \sin\theta / R}{R / \sin\theta} = \frac{a \sin\theta}{R} - \frac{v^2 \sin^2\theta}{R^2}$$

转向由上式符号决定,  $\alpha > 0$  则逆时针,  $\alpha < 0$  则顺时针。

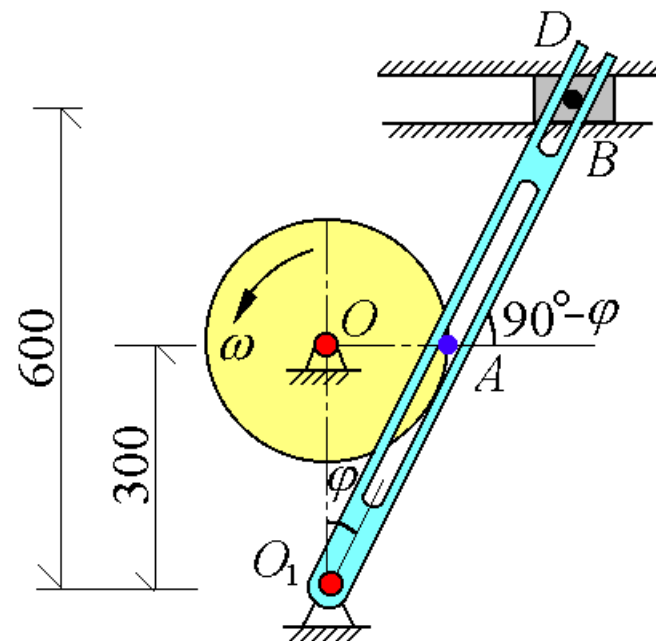
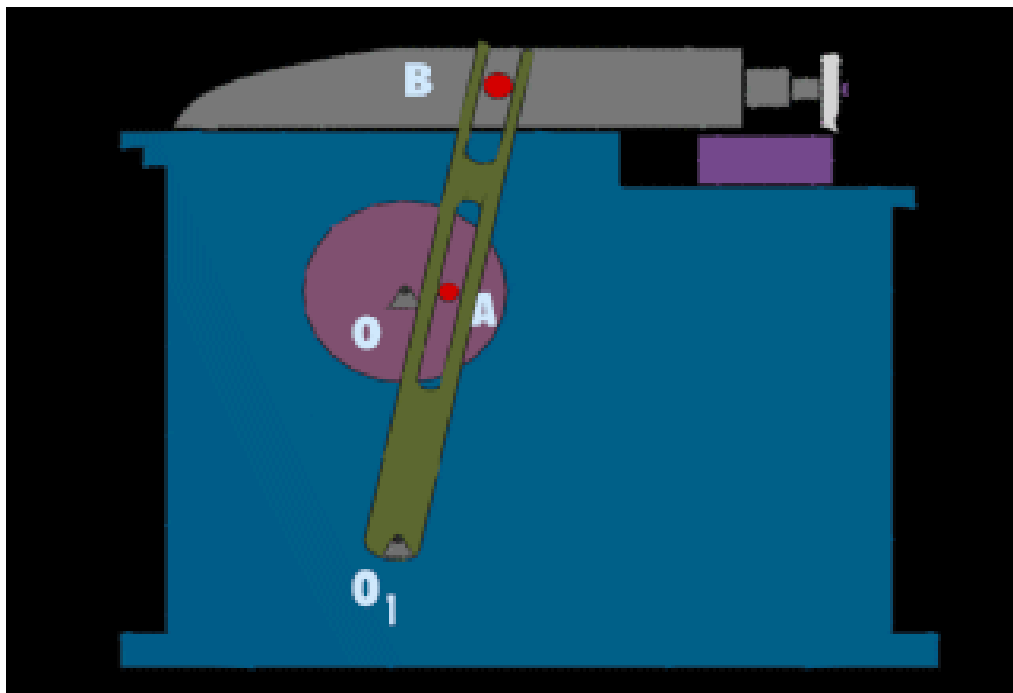


## [例] 刨床机构

已知：主动轮 $O$ 转速  $n = 30 \text{ r/min}$

$OA = 150 \text{ mm}$ ，图示瞬时， $OA \perp OO_1$

求： $O_1D$ 杆的角速度 $\omega_1$ 和角加速度 $\alpha_1$   
及滑块 $B$ 的速度和加速度。



解：动点：轮 $O$ 上 $A$ 点，动系： $O_1D$ 。  
 根据  $v_a = v_e + v_r$  作出速度平行四边形。

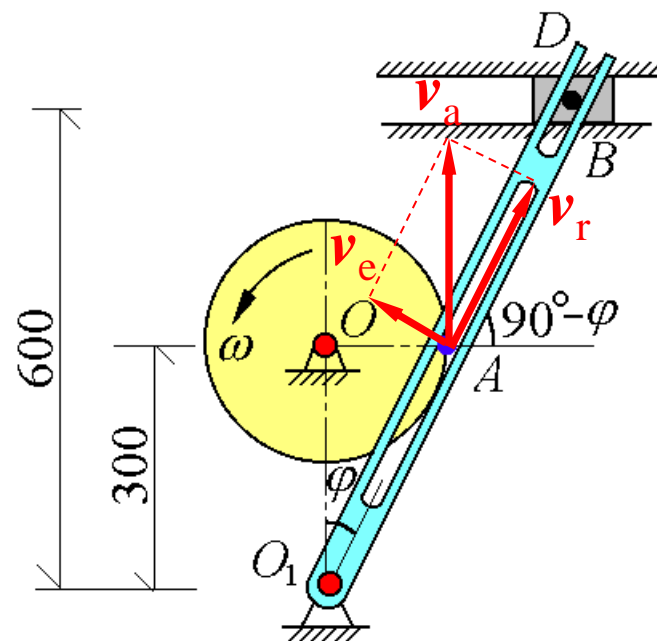
其中 
$$v_a = OA \cdot \omega = 0.15 \times \frac{n\pi}{30} = 0.15\pi \text{ m/s}$$

$$\therefore v_e = v_a \sin \varphi = 0.03\sqrt{5}\pi \text{ m/s}$$

$$\omega_1 = \frac{v_e}{O_1A} = \frac{0.03\sqrt{5}\pi}{0.15\sqrt{5}} = \frac{\pi}{5} \text{ rad/s} \quad ( \quad )$$

$$(\cos \varphi = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \sin \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5})$$

$$v_r = v_a \cos \varphi = 0.06\sqrt{5}\pi \text{ m/s}$$



根据  $\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e^t + \mathbf{a}_e^n + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_c$

作加速度矢量图

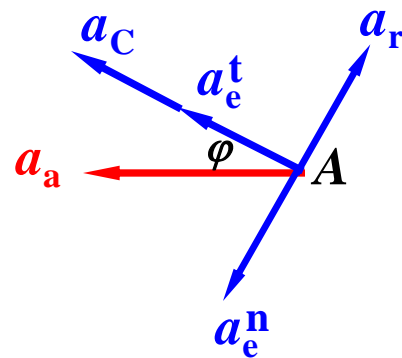
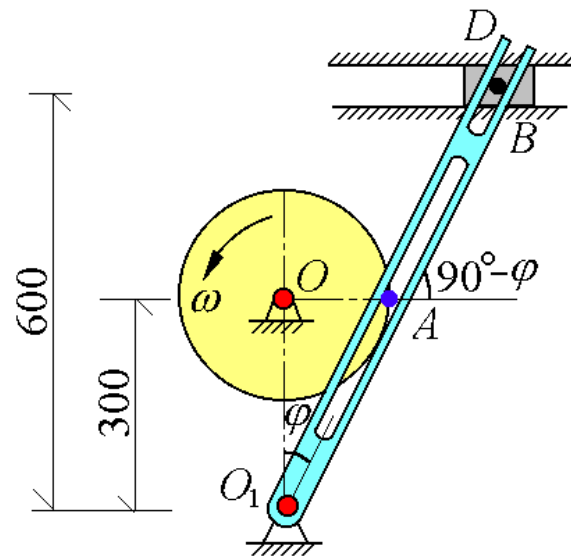
$$a_a = 0.15\pi^2 \quad a_c = 2\omega_1 v_r$$

投至  $a_c$  方向:  $a_a \cos \varphi = a_c + a_e^t$

$$a_e^t = 0.15\pi^2 \times \frac{2\sqrt{5}}{5} - 2 \times \frac{\pi}{5} \times 0.06\sqrt{5}\pi = \frac{0.18\sqrt{5}}{5} \pi^2 \text{ m/s}^2$$

$$\alpha_1 = \frac{a_e^t}{O_1A} = \frac{0.18\sqrt{5}\pi^2}{5} \cdot \frac{1}{0.15\sqrt{5}} = \frac{6}{25} \pi^2 \text{ rad/s}^2 \quad ( \quad )$$

再选动点: 滑块  $B$ ; 动系:  $O_1D$ 。





根据  $\mathbf{v}_{Ba} = \mathbf{v}_{Be} + \mathbf{v}_{Br}$  作出速度矢量图。

$$v_{Be} = 2v_e = 0.06\sqrt{5}\pi \text{ m/s},$$

$$\therefore v_B = v_{Ba} = v_{Be} / \cos \varphi = 0.15\pi \text{ m/s}$$

$$v_{Br} = v_{Be} \tan \varphi = 0.03\sqrt{5}\pi \text{ m/s}$$

根据  $\mathbf{a}_{Ba} = \mathbf{a}_{Be}^t + \mathbf{a}_{Be}^n + \mathbf{a}_{Br} + \mathbf{a}_{BC}$

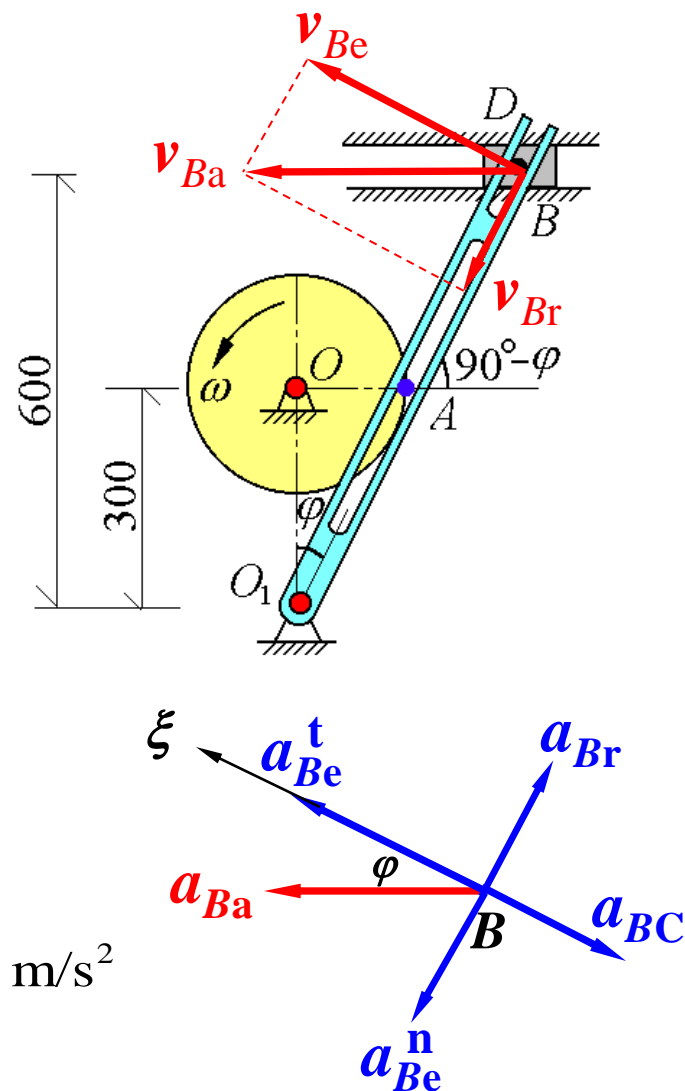
作出加速度矢量图

投至  $\xi$  轴  $a_{Ba} \cos \varphi = a_{Be}^t - a_{BC}$

$$\text{其中 } a_{Be}^t = 2a_e = \frac{0.36\sqrt{5}}{5} \pi^2 \text{ m/s}^2$$

$$a_{BC} = 2\omega_1 v_{Br} = 2 \times \frac{\pi}{5} \times 0.03\sqrt{5}\pi = \frac{0.06\sqrt{5}}{5} \pi^2 \text{ m/s}^2$$

$$\therefore a_B = a_{Ba} = \left( \frac{0.36\sqrt{5}\pi^2}{5} - \frac{0.06\sqrt{5}\pi^2}{5} \right) / \frac{2\sqrt{5}}{5} = 0.15\pi^2 \text{ m/s}^2$$



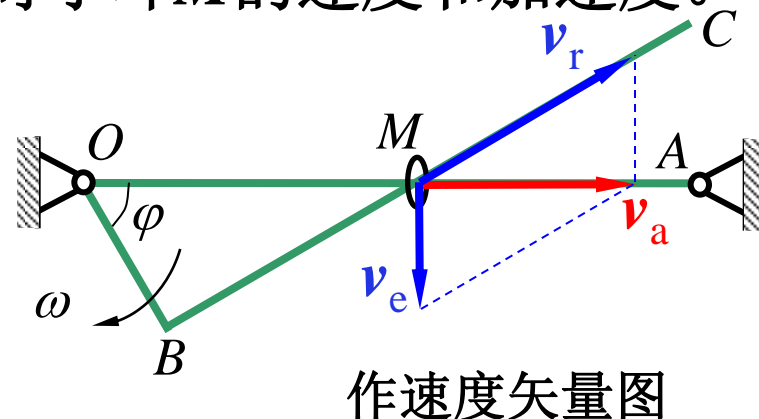
[例] **P1977-26** 图示曲杆  $OBC$  绕  $O$  轴转动，使套在其上的小环  $M$  沿固定直杆  $OA$  滑动。已知  $OB=10\text{cm}$ ， $OB$  与  $BC$  垂直，曲杆的角速度为  $0.5\text{rad/s}$ ，求当  $\varphi=60^\circ$  时小环  $M$  的速度和加速度。

解：动点：小环  $M$ ，动系：固结在曲杆  $OBC$  上绕  $O$  轴转动。

绝对运动：小环  $M$  沿  $OA$  杆的直线运动；

相对运动：小环  $M$  沿着  $BC$  的直线运动，

牵连运动：曲杆绕  $O$  轴的转动。



$$\text{因为 } v_e = OM \cdot \omega = \frac{OB \cdot \omega}{\cos 60^\circ} = \frac{10 \times 0.5}{0.5} = 10 \text{ cm/s}$$

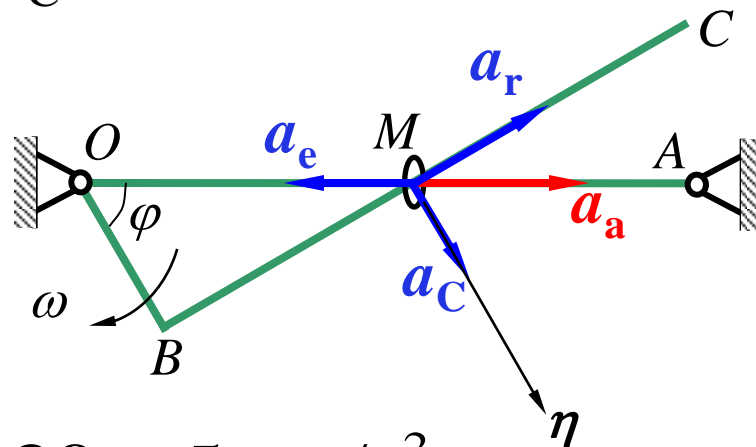
由三角关系求得小环的绝对速度为：

$$v_a = v_e \tan \varphi = 10 \times \sqrt{3} = 17.3 \text{ cm/s}$$

$$v_r = 2v_e = 20 \text{ cm/s}$$

由加速度合成定理,  $\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C$

作小环  $M$  的加速度矢量如图所示 :



计算已知量

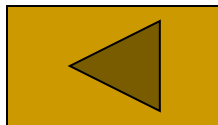
$$a_e = a_e^n = \omega^2 \cdot OM = 0.5^2 \times 20 = 5 \text{ cm/s}^2$$

$$a_C = 2\omega v_r = 2 \times 0.5 \times 20 = 20 \text{ cm/s}^2$$

向  $\eta$  方向投影, 有:  $a_a \cos \varphi = -a_e \cos \varphi + a_C$

解得  $a_a = -a_e + a_C / \cos \varphi = -5 + 2 \times 20 = 35 \text{ cm/s}^2$

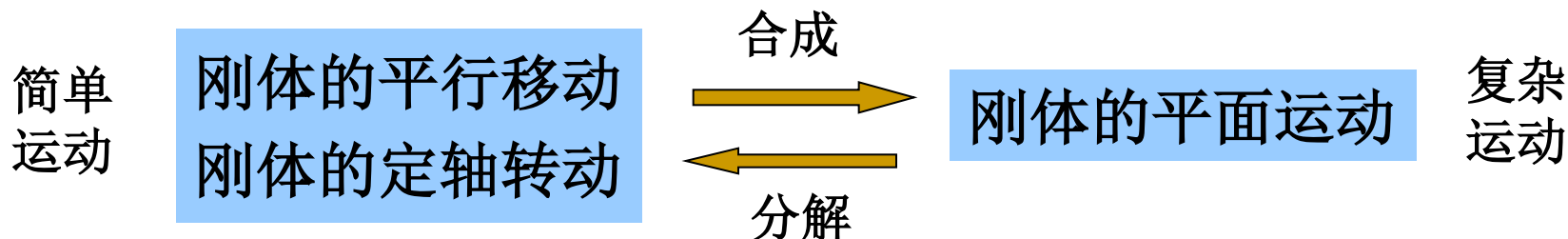
# 本章结束



# 理论力学

## 第八章 刚体的平面运动

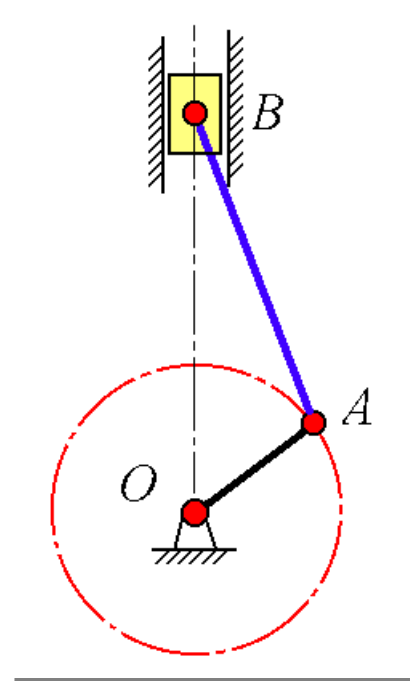
## § 8-1 刚体平面运动概述

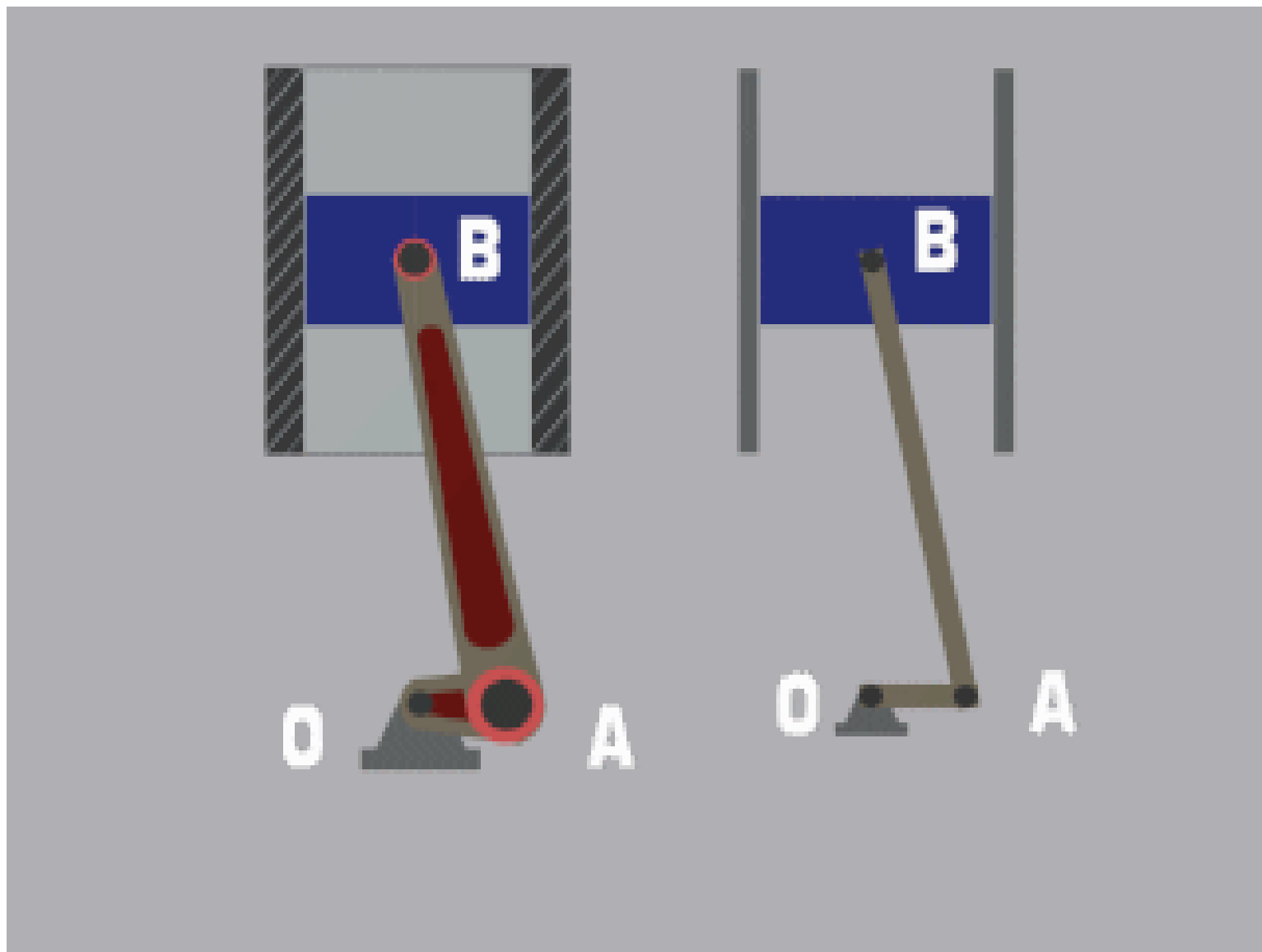


### 一、平面运动的定义

在运动过程中，刚体上任一点到**某一固定平面**的距离始终保持不变。也就是说，刚体上任一点都在与该固定平面平行的某一平面内运动。具有这种特点的运动称为刚体的平面运动。

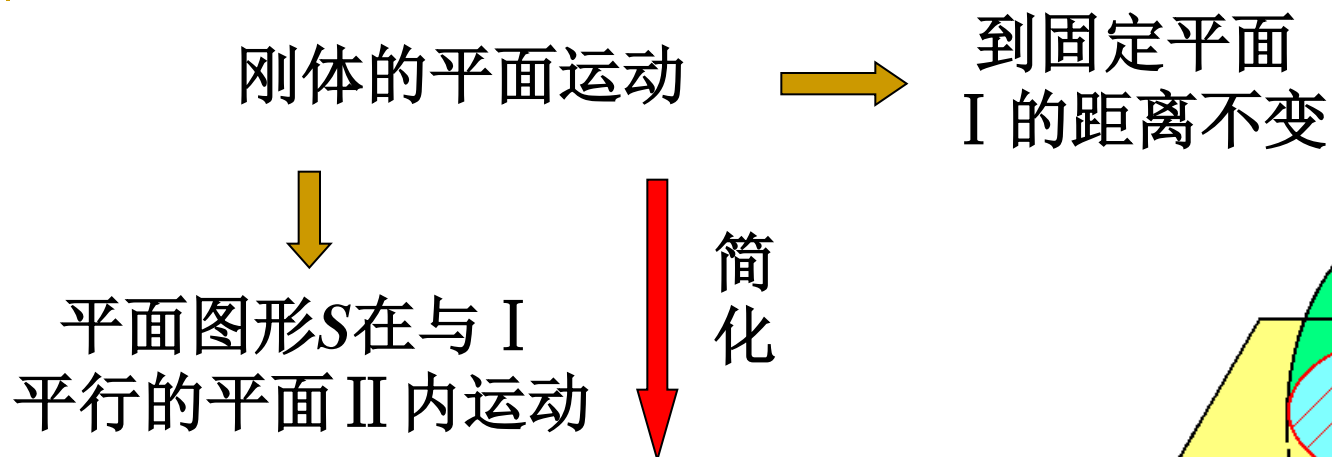
例如：曲柄连杆机构中连杆 $AB$ 的运动，  
 $A$ 点作圆周运动， $B$ 点作直线运动，因此，  
 $AB$  杆的运动既不是平移也不是定轴转动，  
而是平面运动。







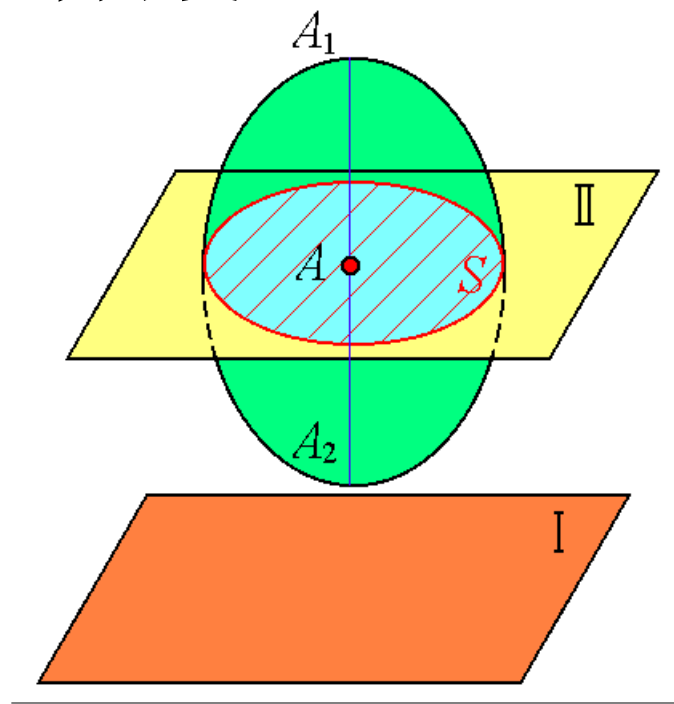
## 二、平面运动的简化



平面图形  $S$  在其自身平面内的运动

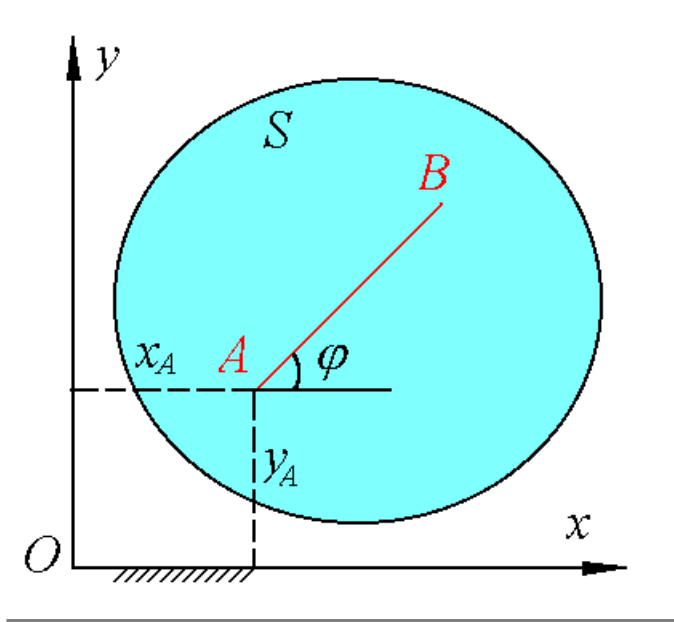
研究平面运动  $\downarrow$

不需考虑刚体的形状和尺寸，只需研究平面图形的运动，确定平面图形上各点的速度和加速度。



### 三、平面运动方程

为了确定代表平面运动刚体的平面图形的位置，我们只需确定平面图形内任意一条线段的位置。



任意线段 $AB$ 的位置可用 $A$ 点的坐标和 $AB$ 与 $x$ 轴夹角表示。因此图形 $S$  的位置决定于  $x_A, y_A, \varphi$  三个独立的参变量。所以

平面运动方程 
$$\begin{cases} x_A = f_1(t) \\ y_A = f_2(t) \\ \varphi = f_3(t) \end{cases}$$

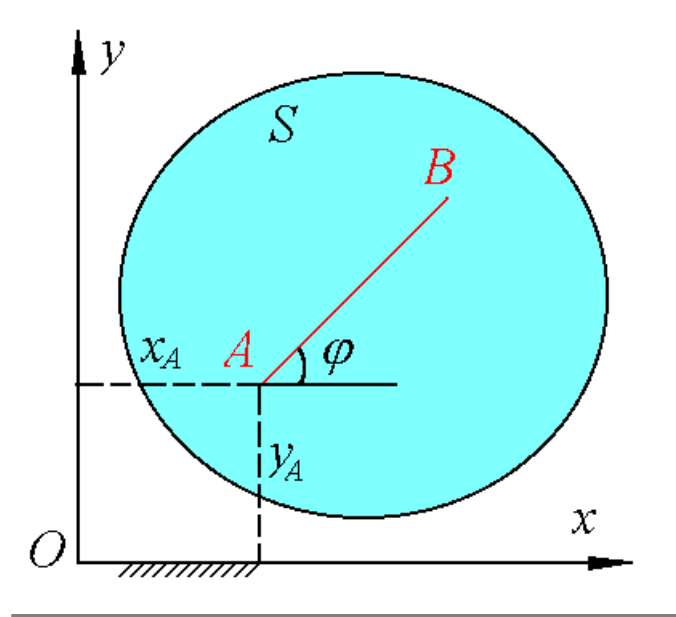
对于每一瞬时  $t$ ，都可以求出对应的  $x_A, y_A, \varphi$ ，图形  $S$  在该瞬时的位置也就确定了。

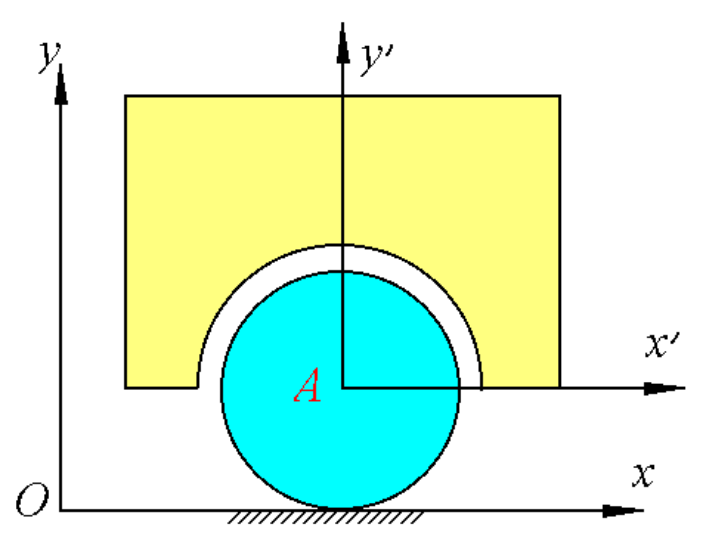
#### 四、平面运动分解为平移和转动

当图形  $S$  上  $A$  点不动时，  
则刚体作定轴转动；

当图形  $S$  上  $\varphi$  角不变时，  
则刚体作平移。

故刚体平面运动可以看成是  
平移和转动的合成运动。





例如 车轮的运动

车轮的平面运动可以看成是车轮随同车厢的平移和相对车厢的转动的合成。

车轮对于静系的平面运动 （绝对运动）

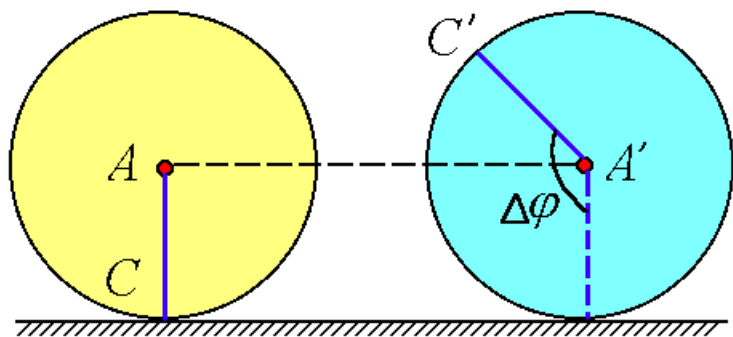
动系 $Ax'y'$  相对静系的平移 （牵连运动）

车轮相对动系 $Ax'y'$  的转动 （相对运动）

三种运动都是刚体运动

我们称动系上的原点  $A$  为基点，于是

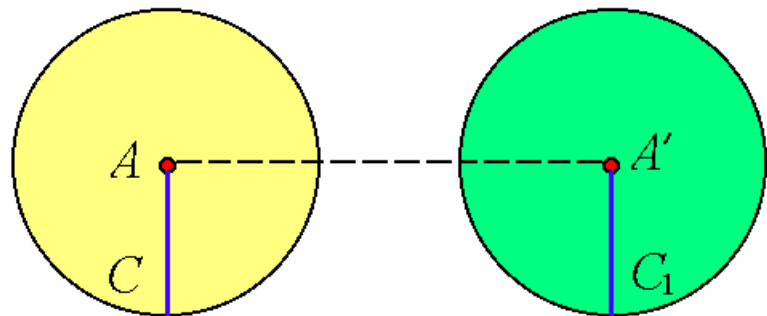
I - II



车轮的平面运动

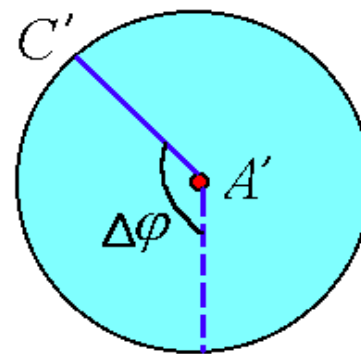
$=$

刚体的平面运动可以分解为随基点的平移（牵连运动）和绕基点的转动（相对运动）。



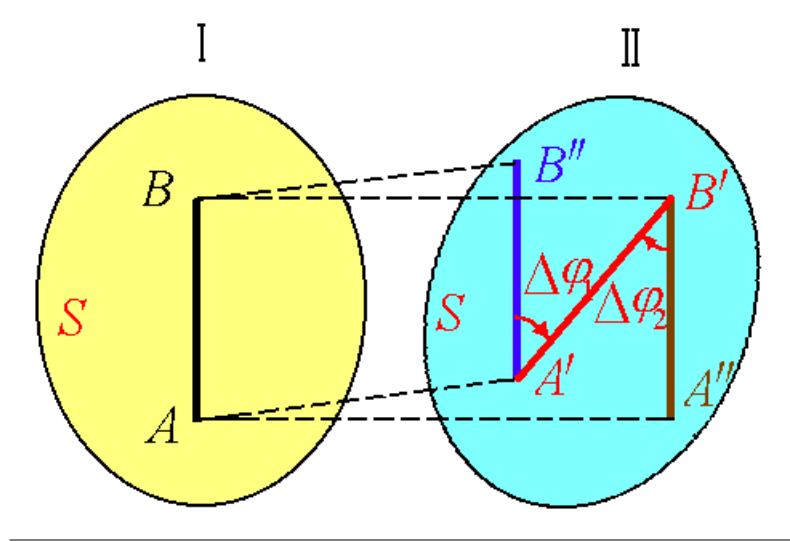
随基点  $A$  的平移

$+$



绕基点  $A'$  的转动

再例如：平面图形 $S$ 在 $\Delta t$  时间内从位置I运动到位置II

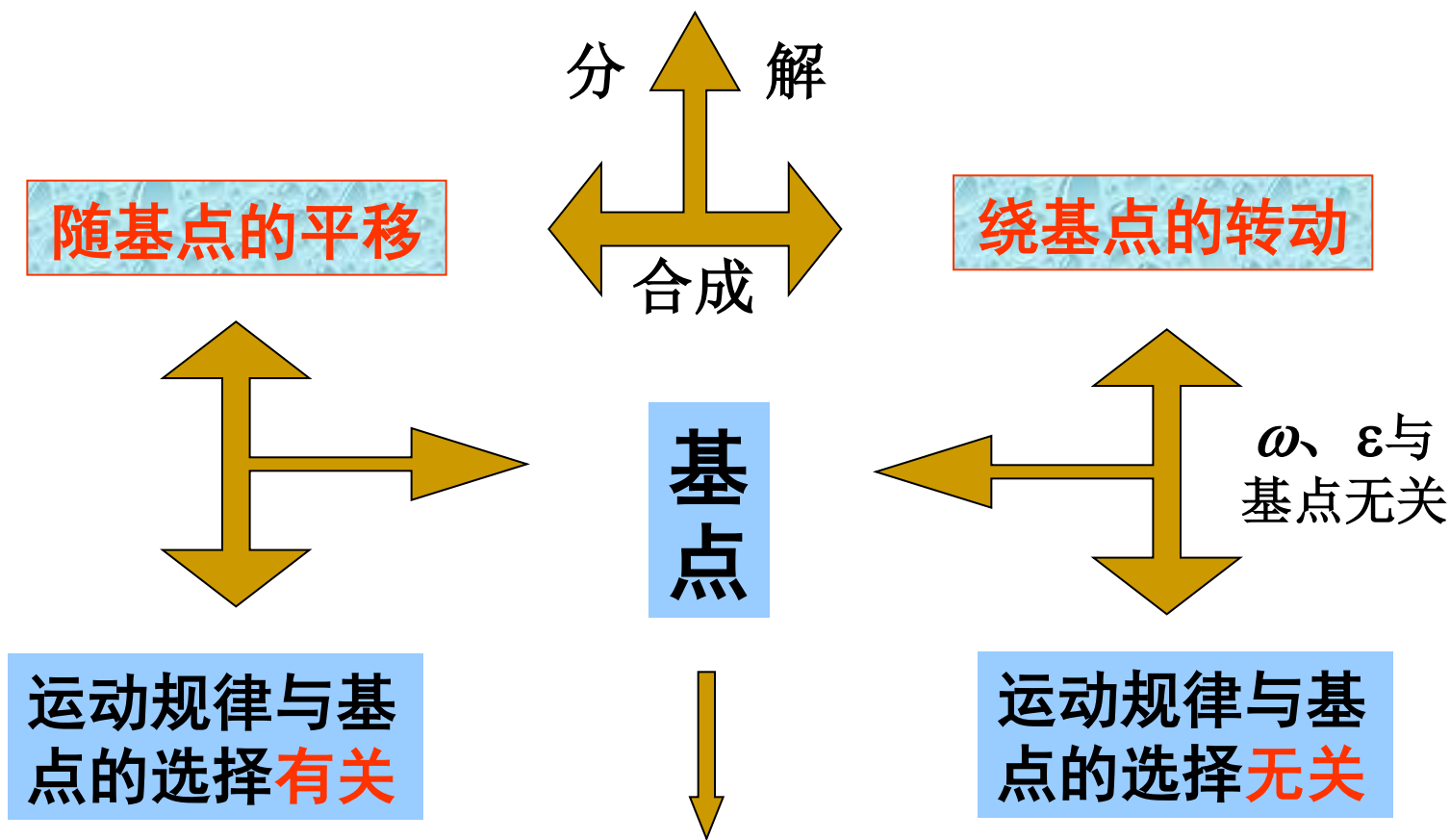


- ① 以 $A$ 为基点：随基点 $A$ 平移到 $A'B''$ 后，绕基点转  $\Delta\varphi_1$ 角到 $A'B'$ ；
- ② 以 $B$ 为基点：随基点 $B$ 平移到 $A''B'$ 后，绕基点转  $\Delta\varphi_2$ 角到 $A'B'$ 。

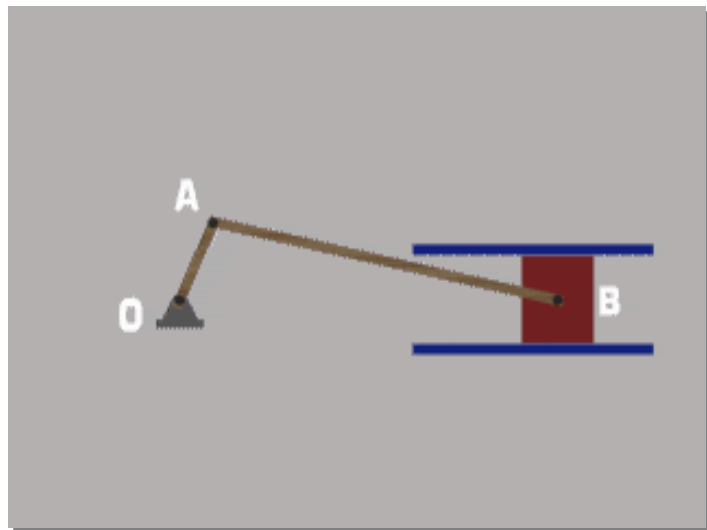
图中看出： $AB \parallel A'B'' \parallel A''B'$ ， $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2$ ；于是有

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi_2}{\Delta t}, \quad \omega_1 = \omega_2; \quad \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{d\omega_2}{dt}, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

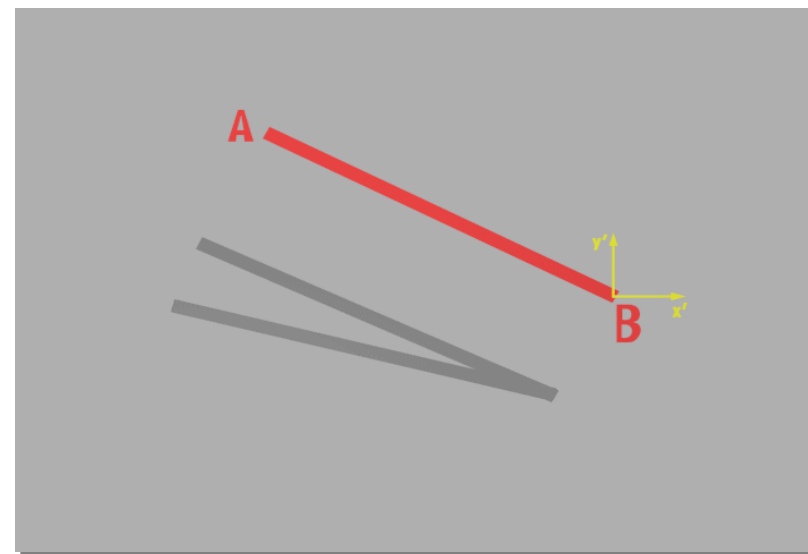
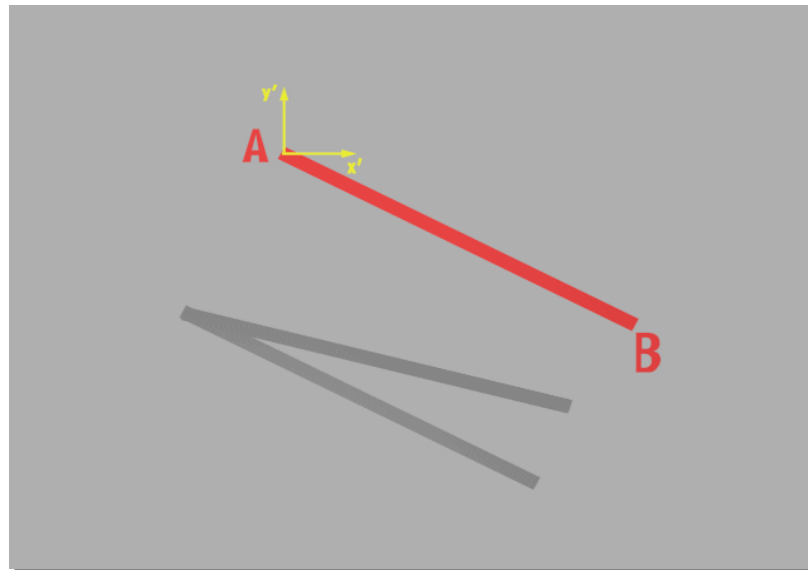
# 刚体的平面运动



任意选取，通常选取运动情况已知的点作为基点



曲柄连杆机构  
 $AB$ 杆作平面运动  
 平面运动的分解



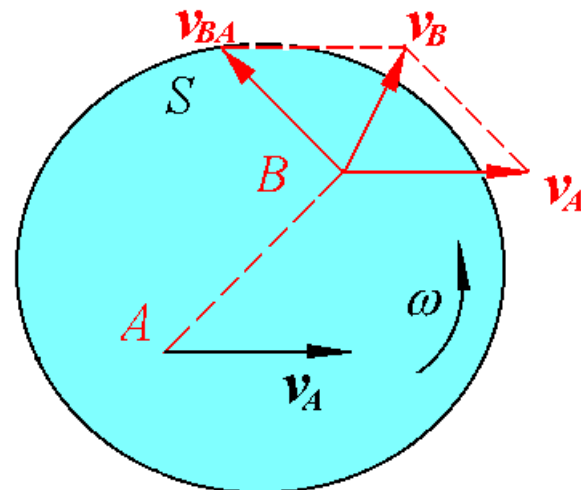


## § 8-2 平面图形内点的速度分析

### 一、基点法（速度合成法）

已知：图形 $S$ 内一点 $A$ 的速度  $\bar{v}_A$ ，  
图形角速度  $\omega$ 。求  $\bar{v}_B$ 。

取 $A$ 为**基点**，将动系**铰结于** $A$ 点，  
动系随基点作平移。



取 $B$ 为动点，则 $B$ 点的运动可视为牵连运动为平移和相对运动为圆周运动的合成， $\bar{v}_a = \bar{v}_B$ ； $\bar{v}_e = \bar{v}_A$ ； $\bar{v}_r = \bar{v}_{BA}$ ，

其中 $v_{BA}$ 大小： $v_{BA} = BA \omega$ ；垂直 $BA$ 并指向与 $\omega$ 转向一致。

根据速度合成定理  $\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r$ ，则  $B$ 点速度为：

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$$

即平面图形上任一点的速度等于基点的速度与该点随图形绕基点转动速度的矢量和。这种求解速度的方法称为**基点法**，也称为**速度合成法**。它是求解平面图形内一点速度的基本方法。

## 二、速度投影法（对任意一个刚体均成立）

由于 $A, B$ 点是任意的，因此  $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$  表示了图形上任意两点速度间的关系。由于恒有  $\bar{v}_{BA} \perp AB$ ，因此将上式在  $AB$  上投影，有

$$[\bar{v}_B]_{AB} = [\bar{v}_A]_{AB} \quad \text{—速度投影定理}$$

平面图形上任意两点的速度在该两点连线上的投影相等。这种求解速度的方法称为 **速度投影法**。（对任意一个刚体均成立）

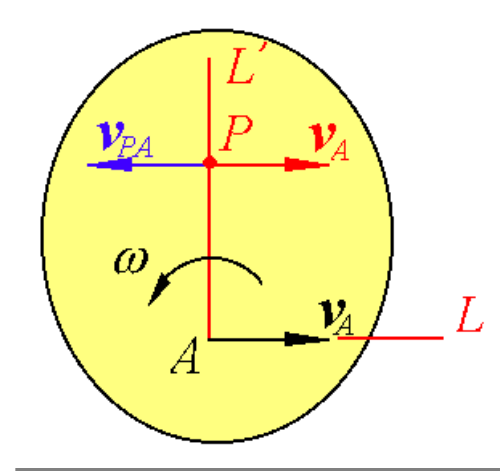
### 三、速度瞬心法

#### 1. 问题的提出

若选取速度为零的点作为基点，求解速度问题的计算会大大简化。于是，自然会提出，在某一瞬时图形（或其扩展部分）是否有一点速度等于零？如果存在的话，该点如何确定？

#### 2. 速度瞬心的概念

平面图形 $S$ ，某瞬时其上一点 $A$ 速度 $\bar{v}_A$ ，图形角速度 $\omega$ ，沿 $\bar{v}_A$ 方向取半直线 $AL$ ，然后顺 $\omega$ 的转向转 $90^\circ$ 至 $AL'$ 的位置，在 $AL'$ 上取长度  $AP = v_A / \omega$  则：  $\bar{v}_P = \bar{v}_A + \bar{v}_{PA}$



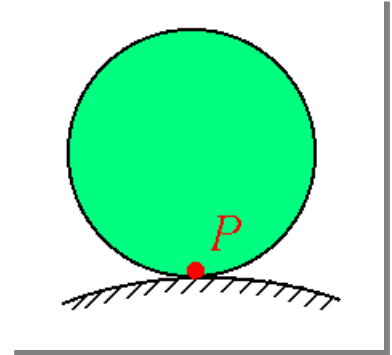
$v_{PA} = AP \cdot \omega = v_A$ ，方向 $\perp PA$ ，恰与 $\bar{v}_A$ 反向。所以

$$v_P = 0$$

即在某一瞬时必唯一存在一点速度等于零，该点称为平面图形在该瞬时的瞬时速度中心，简称速度瞬心。

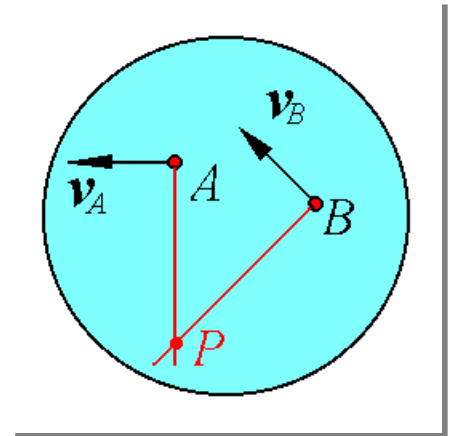
### 3. 几种确定速度瞬心位置的方法

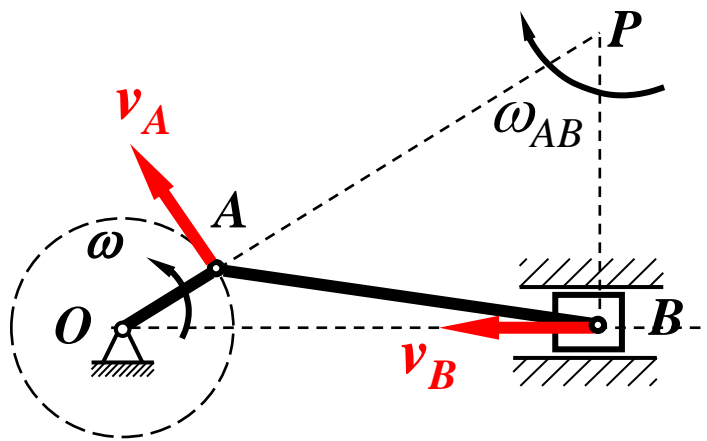
① 已知一平面图形在固定面上作无滑动的滚动（称为纯滚动），则图形与固定面的接触点 $P$ 为速度瞬心。



② 已知某瞬间平面图形上 $A, B$ 两点速度 $\bar{v}_A, \bar{v}_B$ 的方向，且 $\bar{v}_A$ 不平行 $\bar{v}_B$ 。

过 $A, B$ 两点分别作速度 $\bar{v}_A, \bar{v}_B$ 的垂线，交点 $P$ 即为该瞬时的速度瞬心。

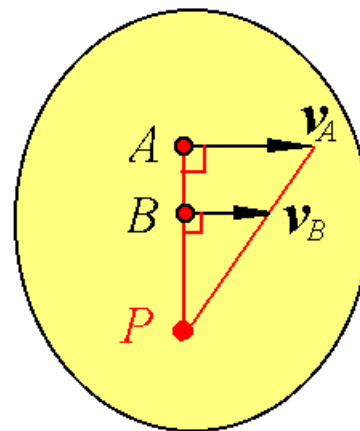




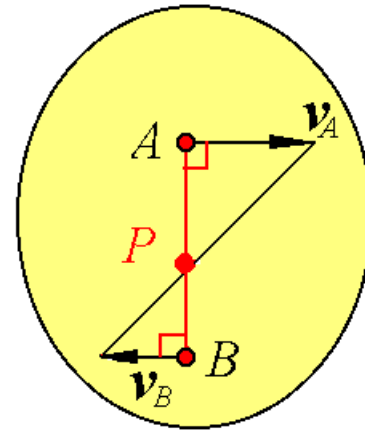
③ 已知某瞬时图形上  $A, B$  两点速度  $\bar{v}_A, \bar{v}_B$  的大小, 且  $\bar{v}_A \perp AB, \bar{v}_B \perp AB$

(a)  $\bar{v}_A$  与  $\bar{v}_B$  同向,  $\omega = \frac{|v_A - v_B|}{AB}$

(b)  $\bar{v}_A$  与  $\bar{v}_B$  反向,  $\omega = \frac{v_A + v_B}{AB}$



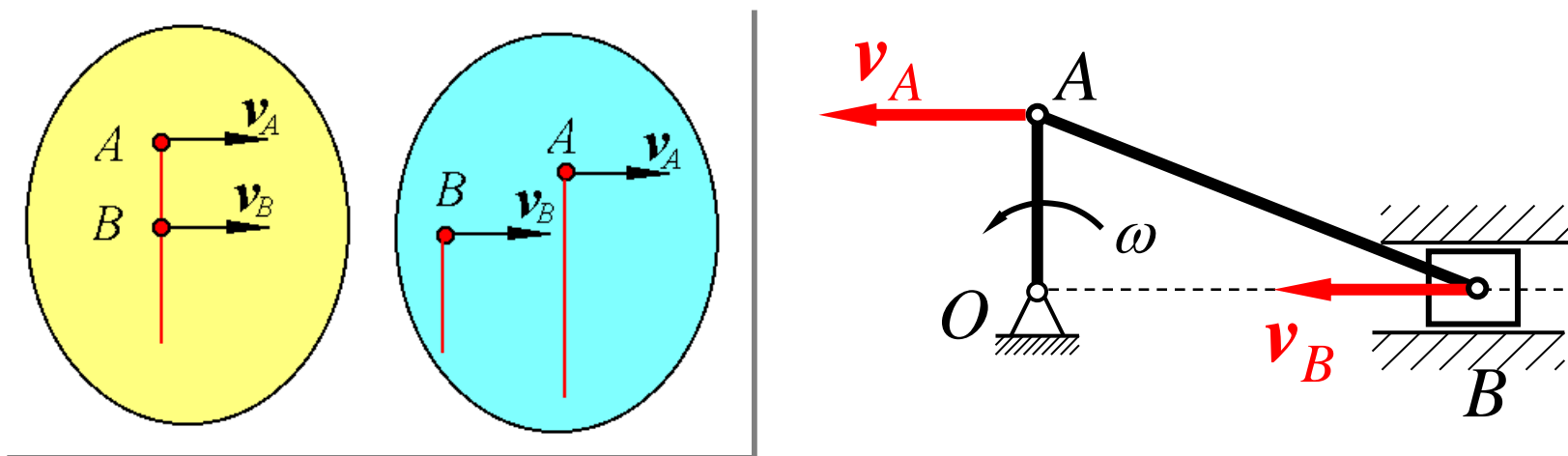
(a)



(b)

④ 已知某瞬时图形上 $A$ ， $B$ 两点的速度方向相同，且不与 $AB$ 连线垂直。此时，图形的瞬心在无穷远处，图形的角速度 $\omega=0$ 。于是

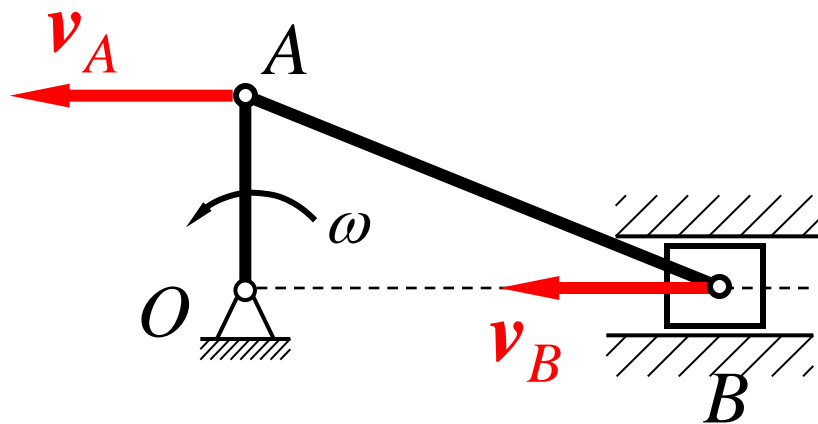
图形上各点的速度在该瞬时相等，这种情况称为**瞬时平移**。  
特别注意**瞬时平移**在此瞬时各点的速度相等，刚体的角速度为零，但各点的加速度并不相等，角加速度不等于零。



例如：曲柄连杆机构在图示位置时，连杆 $AB$ 作瞬时平移。

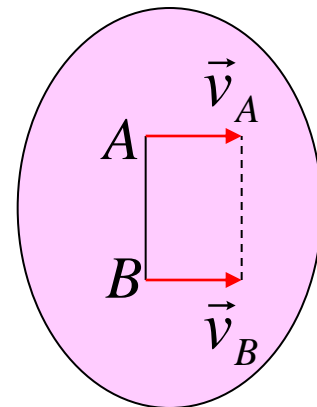
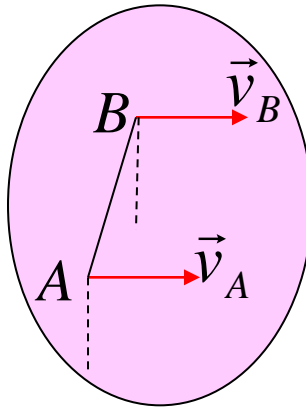
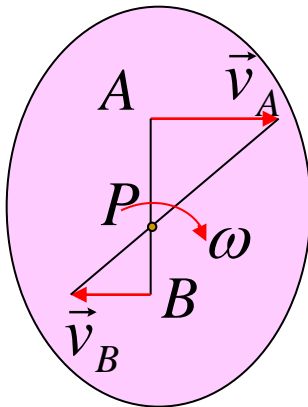
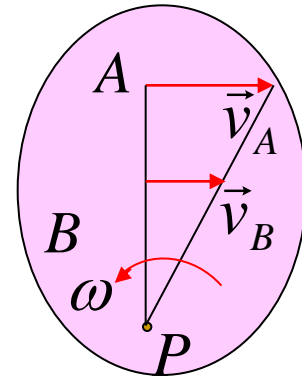
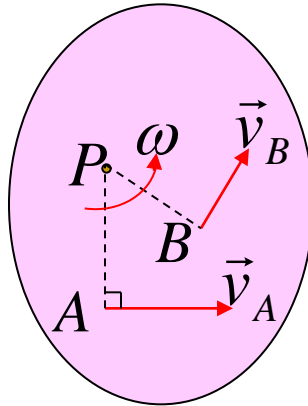
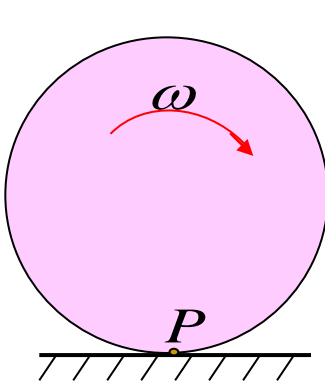
此时连杆 $AB$ 的图形角速度 $\omega_{AB}=0$ ，

此瞬时 $AB$ 杆上各点的速度都相等。但各点的加速度并不相等。设 $\omega$ 为匀角速，则  $a_A = a_A^n = OA \cdot \omega^2 (\downarrow)$



而  $\bar{a}_A$  的方向沿 $AO$ 的,  $\bar{a}_B \neq \bar{a}_A$  瞬时平移与平移不同

# 确定瞬心的一般方法：





## 4. 速度瞬心法

利用速度瞬心求解平面图形上点的速度的方法,称为速度瞬心法。

平面图形在任一瞬时的运动可以视为绕速度瞬心的瞬时转动, 速度瞬心又称为平面图形的瞬时转动中心。

若 $P$ 点为速度瞬心, 则任意一点 $A$ 的速度

大小  $v_A = AP \cdot \omega$  ; 方向  $\perp AP$ , 指向与 $\omega$ 一致。

## 5. 注意的问题

- ①速度瞬心在平面图形上的位置不是固定的, 而是随时间不断变化的。在任一瞬时是唯一存在的。
- ②速度瞬心的速度为零, 其加速度一定不为零, 不同于定轴转动。
- ③刚体作瞬时平移时, 虽然各点的速度相同, 但各点的加速度是一定不相同的, 不同于刚体作平移。

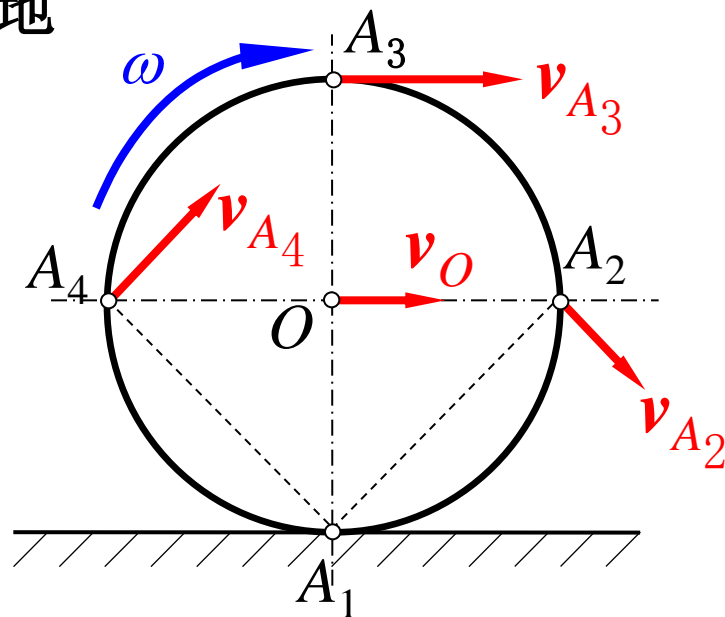
[例1] 已知轮子在地面上作纯滚动，轮心的速度为 $v$ ，半径为 $r$ 。求轮子上 $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$ 和 $A_4$ 点的速度。

解：很显然速度瞬心在轮子与地面的接触点即 $A_1$

$$v_{A_1} = 0$$

$$v_O = r\omega = v$$

各点的速度方向分别为各点与 $A_1$ 点连线的垂线方向，转向与 $\omega$ 相同，由此可见车轮顶点的速度最快，最下面点的速度为零。



$$v_{A_2} = v_{A_4} = \sqrt{2}r\omega = \sqrt{2}v \quad v_{A_3} = 2r\omega = 2v$$

[例2] 已知：曲柄连杆机构 $OA=AB=l$ ，  
取柄 $OA$ 以匀 $\omega$ 转动。求：当 $\varphi=45^\circ$ 时，  
滑块 $B$ 的速度及 $AB$ 杆的角速度。

解：机构中， $OA$ 作定轴转动， $AB$ 作  
平面运动，滑块 $B$ 作平移。

### 基点法

研究  $AB$ ，以  $A$  为基点，且  $v_A = l\omega$ ，方向如图所示。

根据  $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$ ，

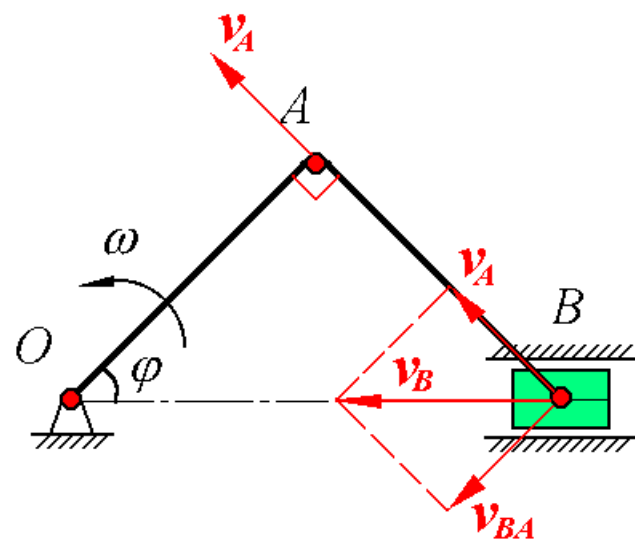
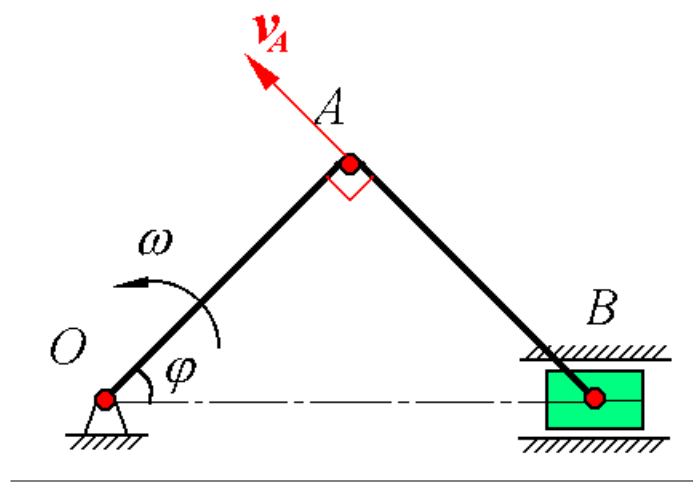
在  $B$  点做 速度平行四边形，如图示。

$$v_B = v_A / \cos\varphi$$

$$= l\omega / \cos 45^\circ = \sqrt{2}l\omega (\leftarrow)$$

$$v_{BA} = v_A \tan\varphi = l\omega \cdot \tan 45^\circ = l\omega$$

$$\therefore \omega_{AB} = v_{BA} / AB = l\omega / l = \omega \quad (\curvearrowright)$$



**速度投影法** 研究 $AB$ ,  $v_A \Rightarrow l\omega$   
 方向 $\perp OA$ ,  $\bar{v}_B$ 方向沿 $BO$ 直线

根据速度投影定理  $[\bar{v}_B]_{AB} = [\bar{v}_A]_{AB}$

$$v_A = v_B \cos \varphi$$

$$\therefore v_B = v_A / \cos \varphi$$

$$= l\omega / \cos 45^\circ = \sqrt{2}l\omega (\leftarrow) \quad \text{不能求出 } \omega_A$$

**速度瞬心法**

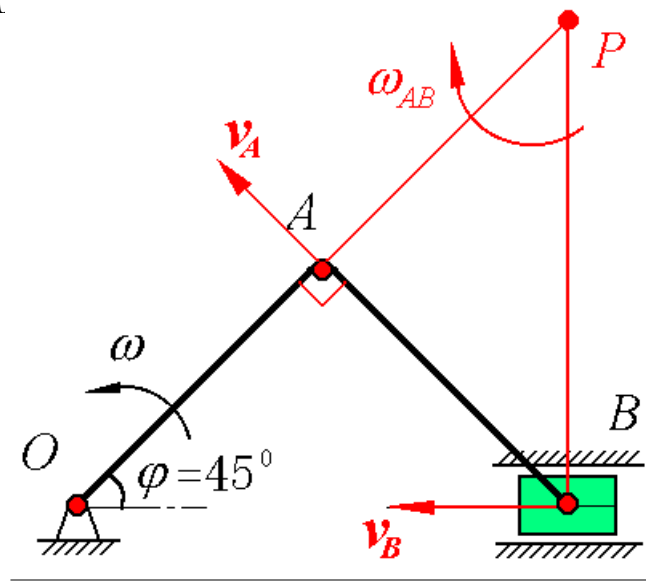
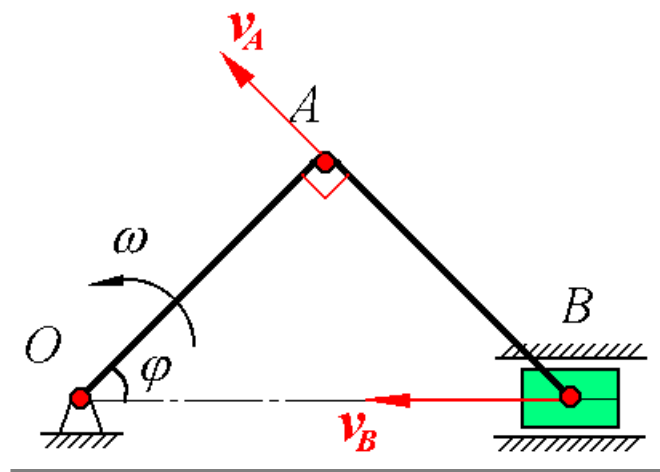
研究 $AB$ , 已知 $\bar{v}_A, \bar{v}_B$ 的方向, 因此  
 可确定出 $P$ 点为速度瞬心

$$\because v_A = l\omega, AP = l$$

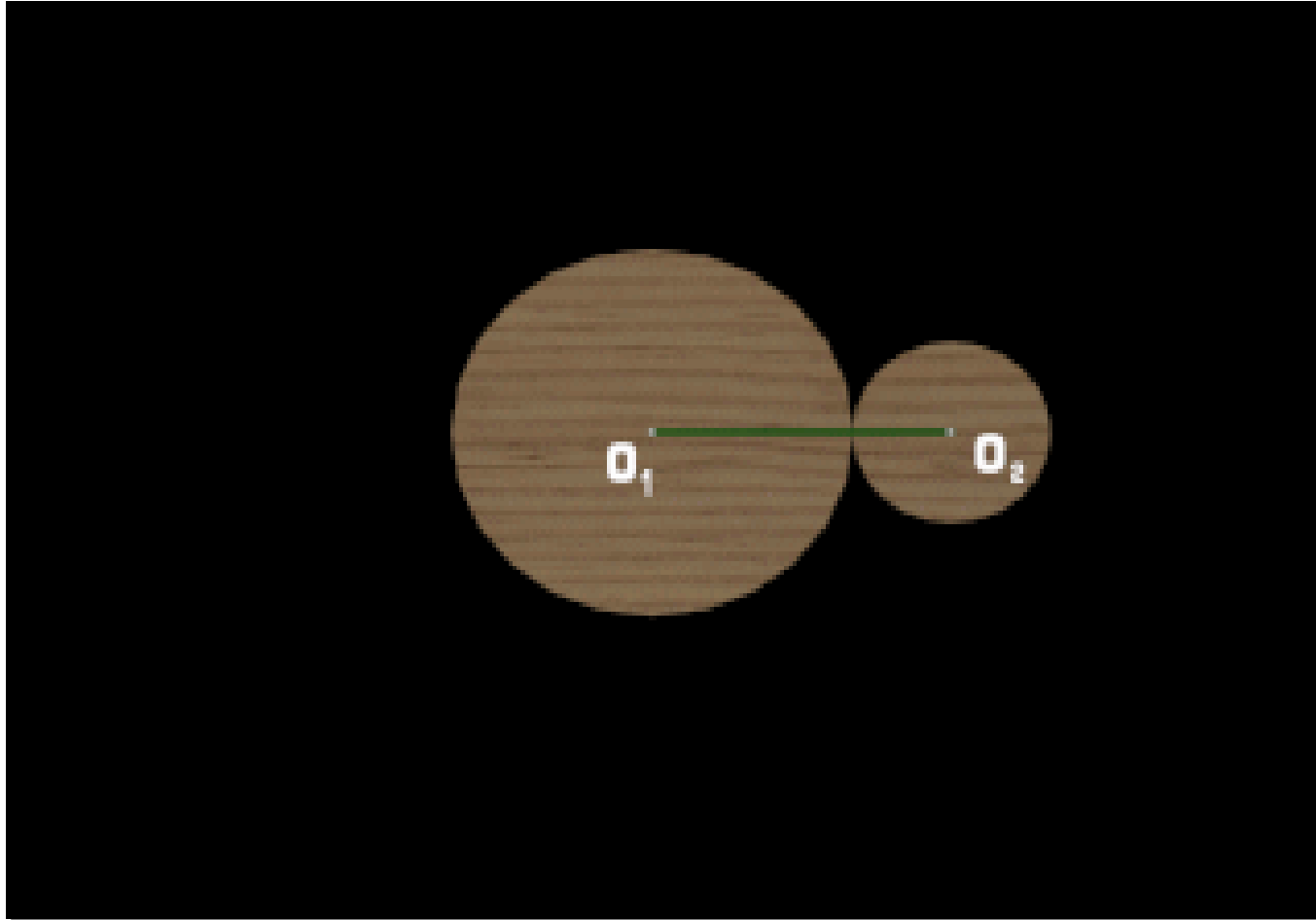
$$\therefore \omega_{AB} = v_A / AP = l\omega / l = \omega \quad (\curvearrowright)$$

$$v_B = BP \cdot \omega_{AB} = \sqrt{2}l\omega (\leftarrow)$$

试比较上述三种方法的特点。



# 行星齿轮机构



[例3] 行星齿轮机构。已知:  $R, r, \omega_o$  。

轮A作纯滚动, 轮O不动。

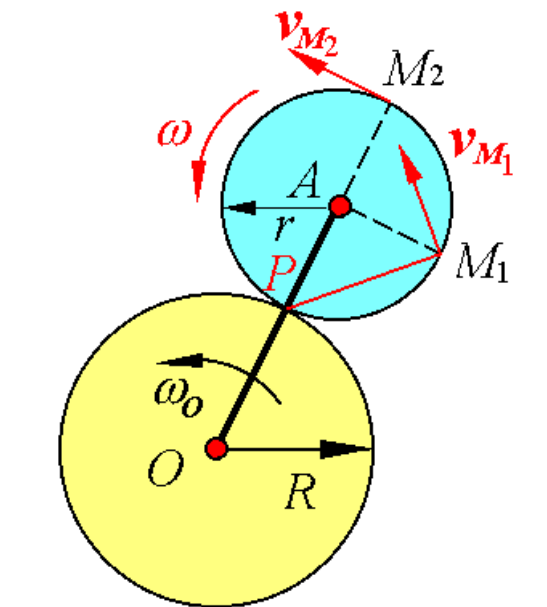
求  $\bar{v}_{M_1}, \bar{v}_{M_2}$  。

解:  $OA$ 定轴转动; 轮A作平面运动, 瞬心 $P$ 点

$$v_A = (R+r)\omega_o = r\omega \quad \therefore \omega = \frac{R+r}{r}\omega_o \quad (\curvearrowright)$$

$$v_{M_1} = PM_1 \cdot \omega = \sqrt{2}r \cdot \frac{R+r}{r}\omega_o = \sqrt{2}(R+r)\omega_o,$$

$$v_{M_2} = PM_2 \cdot \omega = 2r \cdot \frac{R+r}{r}\omega_o = 2(R+r)\omega_o, \text{方向均如图示}$$



[例4]图示曲柄连杆机构中连杆 $AB$ 上固连一块三角板 $ABD$ ，机构由曲柄 $O_1A$ 带动。已知曲柄的角速度为 $\omega=2\text{rad/s}$ ，曲柄 $O_1A=0.1\text{m}$ ，水平距离 $O_1O_2=0.05\text{m}$ ， $AD=0.05\text{m}$ ，当 $O_1A \perp O_1O_2$ 时， $AB \parallel O_1O_2$ ，且 $AD$ 与 $AO_1$ 在同一直线上， $\varphi=30^\circ$ 。试求三角板 $ABD$ 的角速度和点 $D$ 的速度。

解：运动分析： $O_1A$ 和 $O_2B$ 作定轴转动； $ABD$ 作平面运动，其速度瞬心在点 $C$ 。

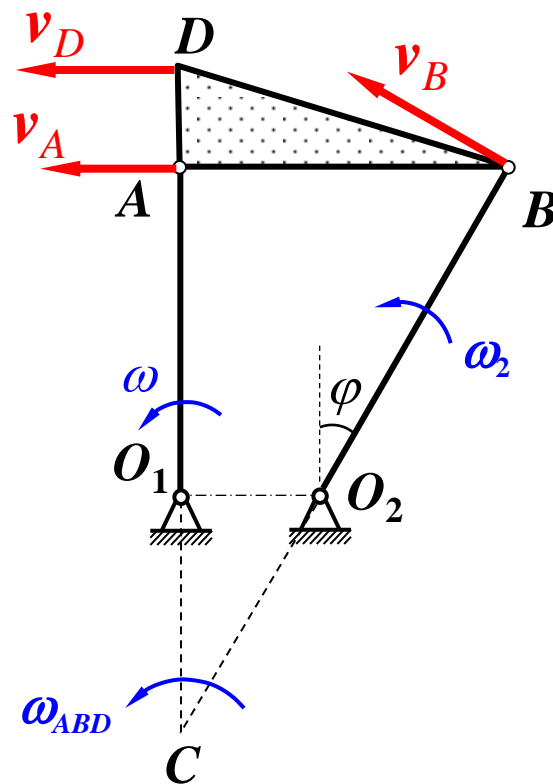
$$CA = CO_1 + O_1A = 0.1866 \text{ m}$$

$$v_A = O_1A \cdot \omega = 0.2 \text{ m/s}$$

$$\omega_{ABD} = \frac{v_A}{CA} = 1.072 \text{ rad/s}$$

$$CD = CA + AD = 0.2366 \text{ m}$$

$$v_D = CD \cdot \omega_{ABD} = 0.254 \text{ m/s}$$



[例5] 图示机构，已知曲柄 $OA$ 的角速度为 $\omega$ ，角 $\alpha = \beta = 60^\circ$ ， $OA = AB = BO_1 = O_1C = r$ ，求滑块 $C$ 的速度。

解： $AB$ 和 $BC$ 作平面运动，  
其瞬心分别为 $P_1$ 和 $P_2$ 点，则

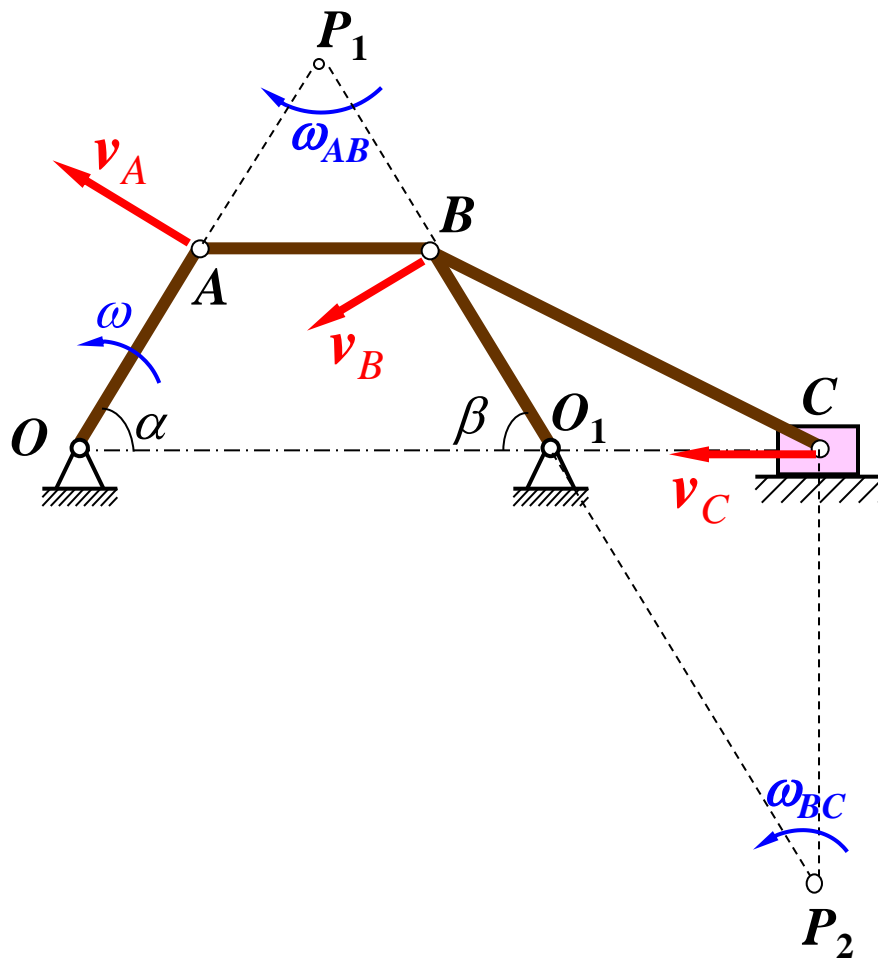
$$v_A = OA \cdot \omega = r\omega$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{P_1A} = \frac{r\omega}{r} = \omega$$

$$v_B = P_1B \cdot \omega_{AB} = r\omega$$

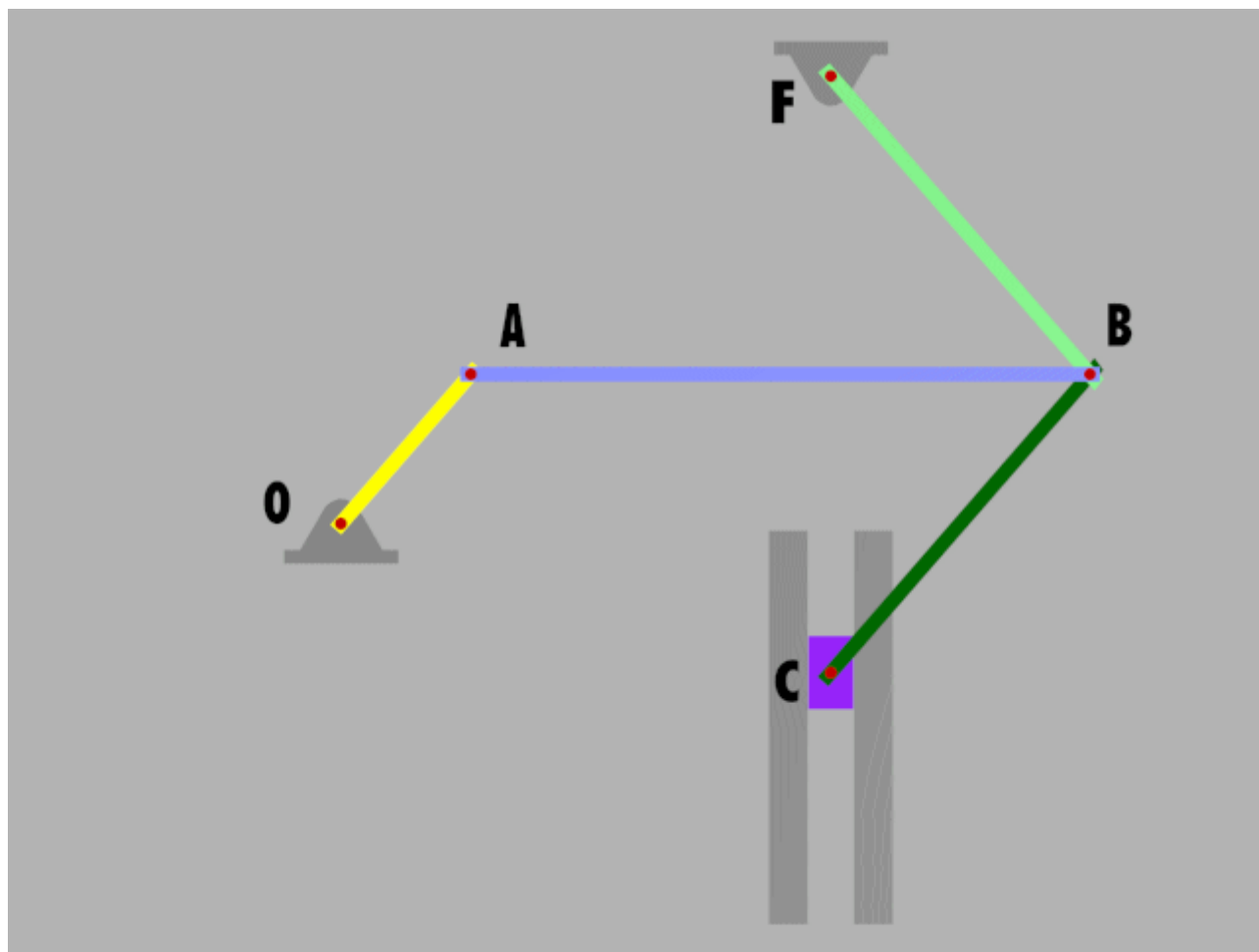
$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{P_2B} = \frac{r\omega}{3r} = \frac{1}{3}\omega$$

$$v_C = P_2C \cdot \omega_{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3}r\omega$$





## 曲柄肘杆压床机构



**[例6]** 曲柄肘杆式压床如图。已知曲柄 $OA$ 长 $r$ 以匀角速度 $\omega$ 转动,  $AB = BC = BD = l$ , 当曲柄与水平线成 $30^\circ$ 角时, 连杆 $AB$ 处于水平位置, 而肘杆 $DB$ 与铅垂线也成 $30^\circ$ 角。试求图示位置时, 杆 $AB$ 、 $BC$ 的角速度以及冲头 $C$ 的速度。

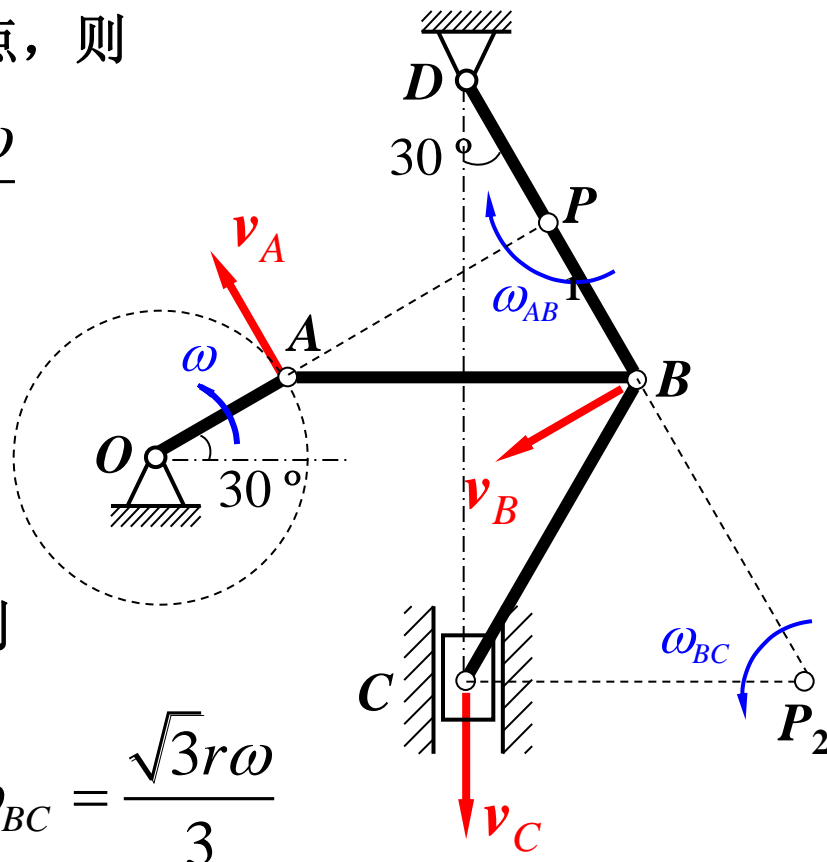
解: 连杆 $AB$ 作平面运动, 瞬心在 $P_1$ 点, 则

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{P_1A} = \frac{r\omega}{AB \cos 30^\circ} = \frac{2\sqrt{3}r\omega}{3l}$$

$$\begin{aligned} v_B &= P_1B \cdot \omega_{AB} = AB \sin 30^\circ \cdot \omega_{AB} \\ &= \frac{l}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}r\omega}{3l} = \frac{\sqrt{3}}{3} r\omega \end{aligned}$$

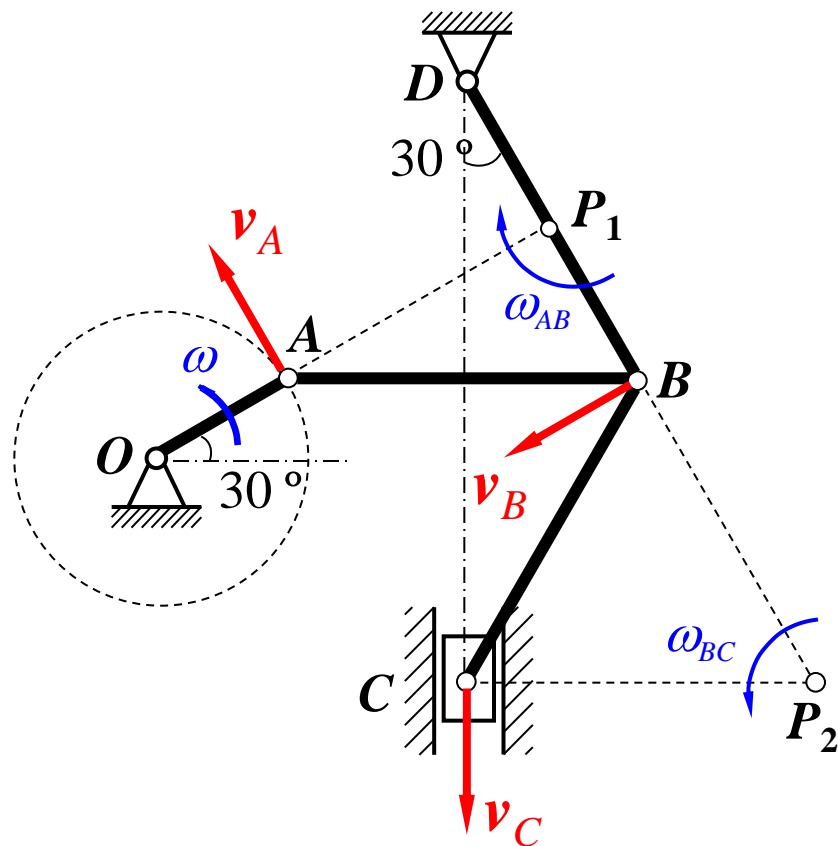
连杆 $BC$ 作平面运动, 瞬心在 $P_2$ 点, 则

$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{P_2B} = \frac{\sqrt{3}r\omega}{3l} \quad v_C = P_2C \cdot \omega_{BC} = \frac{\sqrt{3}r\omega}{3}$$

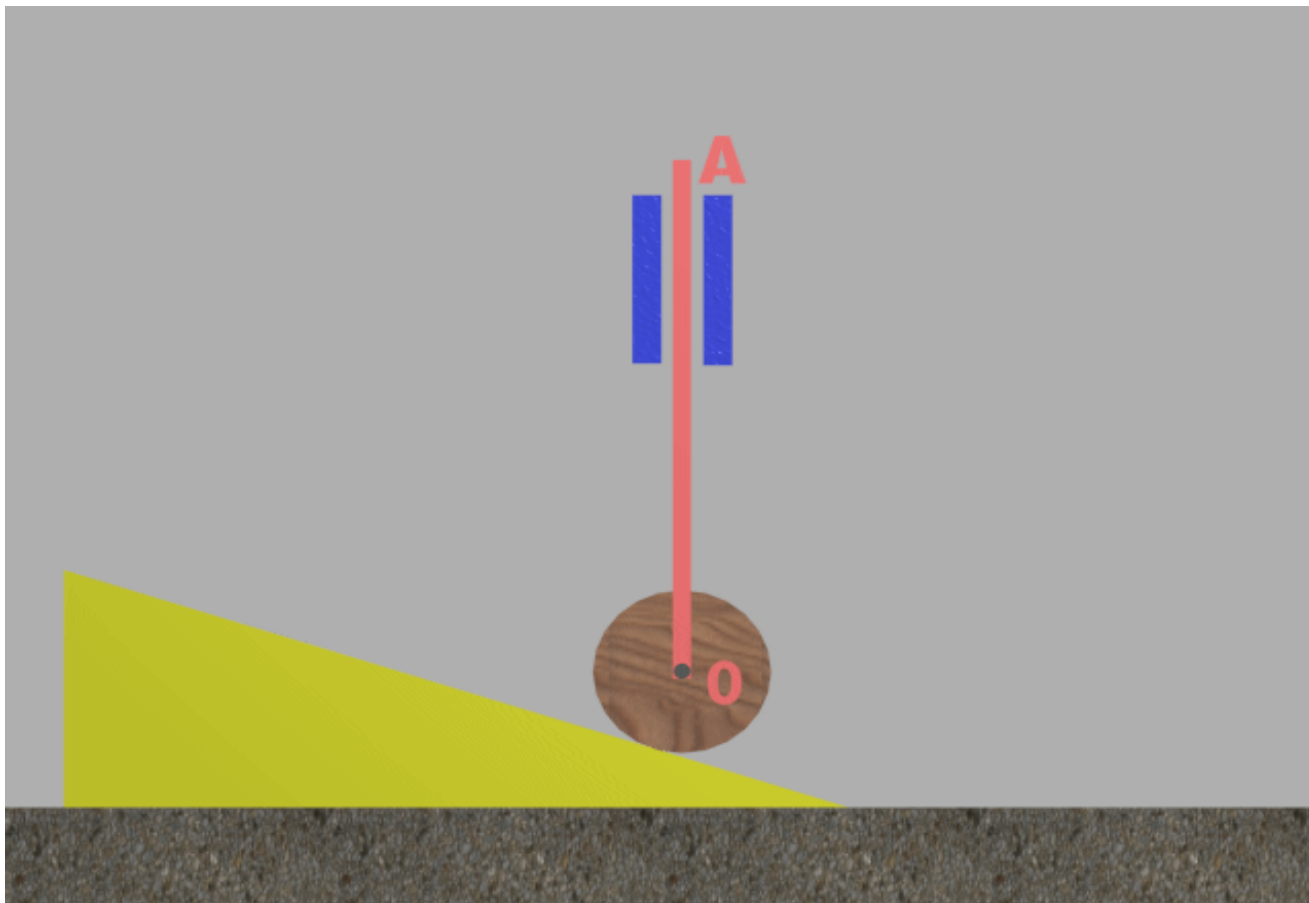


## 特别提示

每个作平面运动的刚体在每一瞬时都有自己的速度瞬心和角速度，并且瞬心在刚体或其扩展部分上，不能认为瞬心在其他刚体上。例如， $AB$ 杆的瞬心在 $P_1$ 点， $BC$ 杆的瞬心在 $P_2$ 点，而且 $P_1$ 也不是 $DB$ 杆上的点。

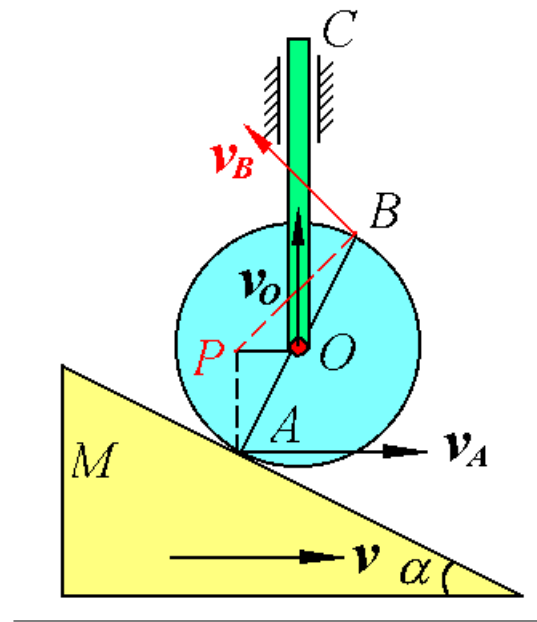


# 平面机构



[例7] 平面机构中, 楔块 $M$ :  $\alpha=30^\circ$ ;  $v=12\text{cm/s}$ ; 盘:  $r=4\text{cm}$ , 与楔块间无滑动。求圆盘的 $\omega$ 及轴 $O$ 的速度和 $B$ 点速度。

解: 杆 $OC$ , 楔块 $M$ 作平移, 圆盘作平面运动, 由 $v_A$ 及 $v_O$ 方位可确定 $P$ 为盘的速度瞬心。



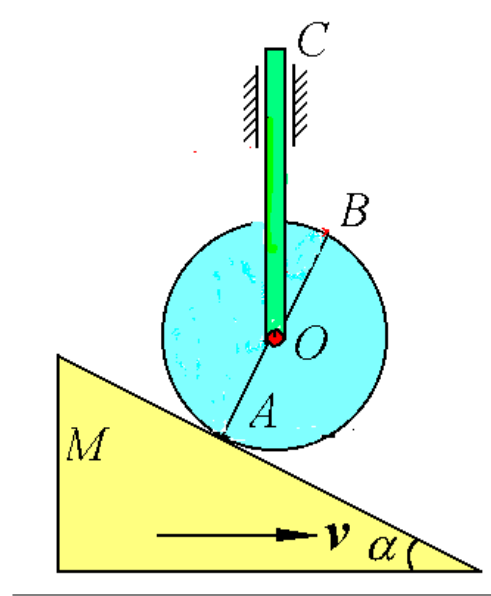
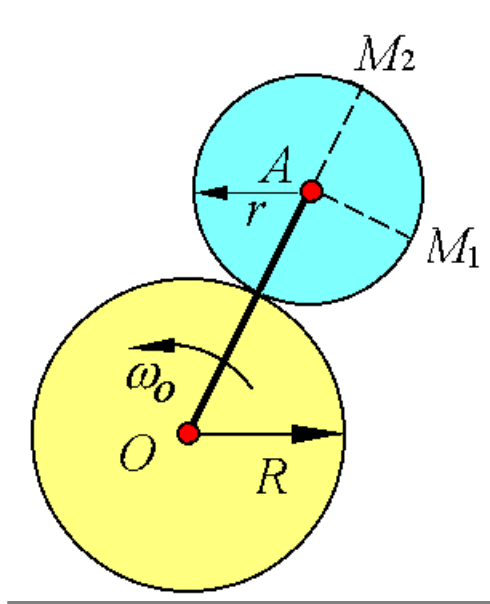
$$v_A = v = 12 \text{ cm/s},$$

$$\omega = \frac{v_A}{PA} = \frac{12}{r \cos \alpha} = \frac{12}{4 \cos 30^\circ} = 2\sqrt{3} \text{ rad/s} \quad (\curvearrowright)$$

$$v_O = PO \cdot \omega = r \sin \alpha \cdot \omega = 4 \sin 30^\circ \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ m/s} (\uparrow)$$

$$PB = \sqrt{PO^2 + OB^2 - 2 \cdot PO \cdot OB \cos 120^\circ} = \sqrt{2^2 + 4^2 + 2 \times 2 \times 4 \times \frac{1}{2}} = 2\sqrt{7} \text{ m}$$

$$v_B = PB \cdot \omega = 2\sqrt{7} \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{21} \approx 18.3 \text{ m/s} \quad (\perp PB)$$



比较上述两图可以看出，不能认为圆轮只滚不滑时，接触点就是瞬心，只有在接触面是固定面时，圆轮上接触点才是速度瞬心。

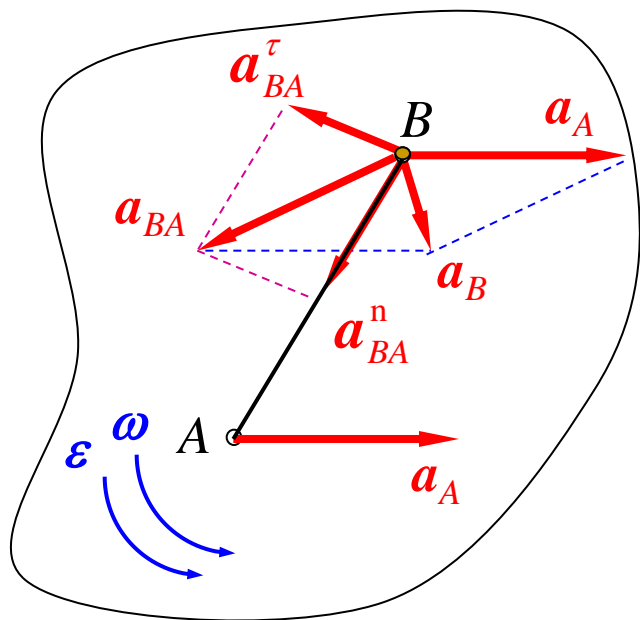
## § 8-3 平面图形内点的加速度分析

### 一、基点法（合成法）

已知：图形 $S$ 内一点 $A$ 的加速度 $\bar{a}_A$ 和图形的 $\omega, \varepsilon$ （某一瞬时）。

求：该瞬时图形上任一点 $B$ 的加速度。

取 $A$ 为基点，将**平移坐标系**固结于 $A$ 点取 $B$ 动点，则 $B$ 点的运动分解为**相对运动**为圆周运动和牵连运动为平移。



$$\bar{a}_a = \bar{a}_B ; \quad \bar{a}_e = \bar{a}_A ; \quad \bar{a}_r = \bar{a}_{BA} = \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^n$$

于是,由牵连平移时加速度合成定理  $\bar{a}_a = \bar{a}_e + \bar{a}_r$  可得如下公式。

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^n$$

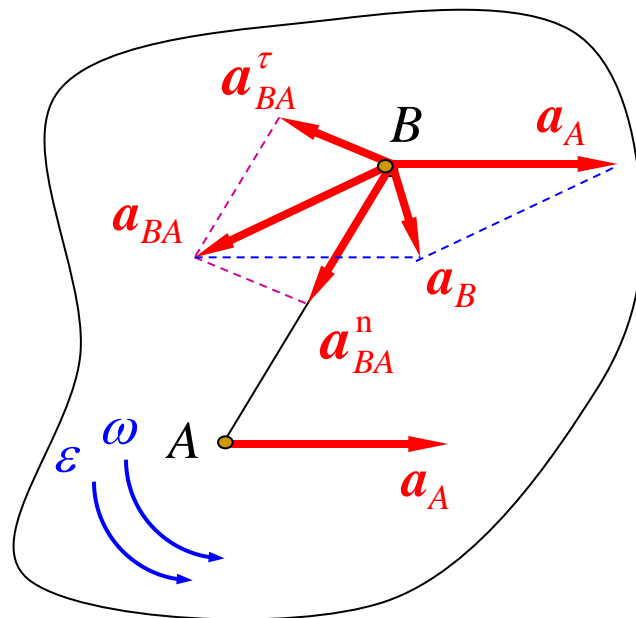
$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^n$$

$$a_{BA}^{\tau} = BA \cdot \varepsilon$$

方向 $\perp AB$ ,  
指向与 $\varepsilon$ 一致。

$$a_{BA}^n = BA \cdot \omega^2$$

方向沿 $AB$ ,  
指向 $A$ 点。



即平面图形内任一点的加速度等于基点的加速度与该点随图形绕基点转动的切向加速度和法向加速度的矢量和。这种求解加速度的方法称为**基点法**，也称为**合成法**。是求解平面图形内一点加速度的基本方法。



$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n$$

上述公式是一平面矢量方程。需知其中六个要素，方能求出其余两个。由于  $\bar{a}_{BA}^\tau, \bar{a}_{BA}^n$  方位总是已知，所以在使用该公式中，只要再知道四个要素，即可解出问题的待求量。

**[注]** 一般情况下，对于加速度没有类似于速度投影定理的关系式。即一般情况下，图形上任意两点  $A, B$  的加速度

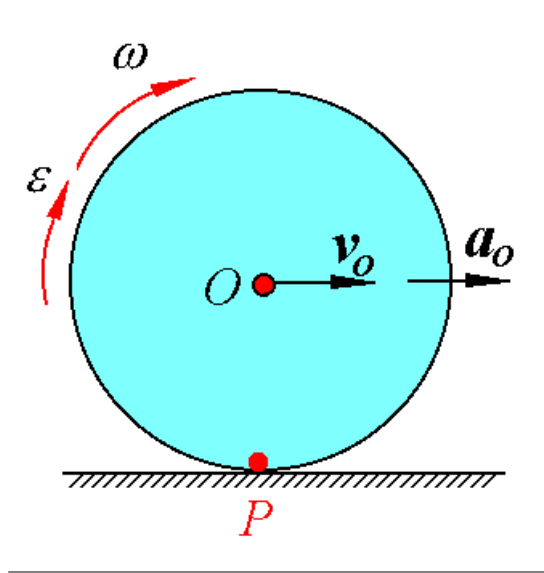
$$[\bar{a}_A]_{AB} \neq [\bar{a}_B]_{AB}$$

若某瞬时图形  $\omega = 0$ ，即瞬时平移，则有  $[\bar{a}_A]_{AB} = [\bar{a}_B]_{AB}$

即若平面图形在运动过程中某瞬时的角速度等于零，则该瞬时图形上任意两点的加速度在这两点连线上的投影相等。

由于加速度瞬心的位置不象速度瞬心那样容易确定，且一般情况下又不存在类似于速度投影定理的关系式，故常采用基点法求图形上各点的加速度或图形的角加速度。

[例8] 半径为 $R$ 的车轮沿直线作纯滚动，已知轮心 $O$ 点的速度 $\bar{v}_O$ 及加速度 $\bar{a}_O$ ，求车轮与轨道接触点 $P$ 的加速度。



分析：  $\bar{a}_P = \bar{a}_O + \bar{a}_{PO}^{\tau} + \bar{a}_{PO}^n$   
 大小 ?  $\sqrt{R\varepsilon^2 + R\omega^2}$   
 方向 ?  $\sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad}$   
 故应先求出 $\omega, \varepsilon$ 。

解：轮 $O$ 作平面运动， $P$ 为速度瞬心，

$$\therefore \omega(t) = \frac{v_O(t)}{R} \quad (\curvearrowright)$$

由于 $\omega = v_O / R$ 在任何瞬时都成立，且 $O$ 点作直线运动，故而

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dv_O}{dt} = \frac{a_O}{R} \quad (\curvearrowright)$$

以 $O$ 为基点，有  $\bar{a}_P = \bar{a}_O + \bar{a}_{PO}^\tau + \bar{a}_{PO}^n$  其中：

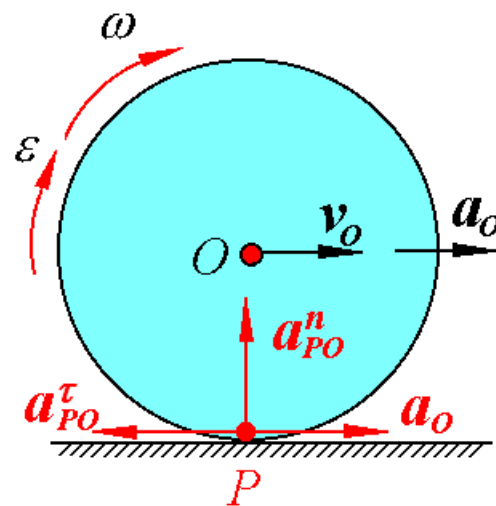
$$a_{PO}^\tau = R \cdot \varepsilon = a_O, \quad a_{PO}^n = R\omega^2 = R \cdot \left(\frac{v_O}{R}\right)^2 = \frac{v_O^2}{R}$$

做出加速度矢量图，由图中看出：

$$\bar{a}_P = \bar{a}_{PO}^n \quad (\bar{a}_O \text{ 与 } \bar{a}_{PO}^\tau \text{ 等值反向})$$

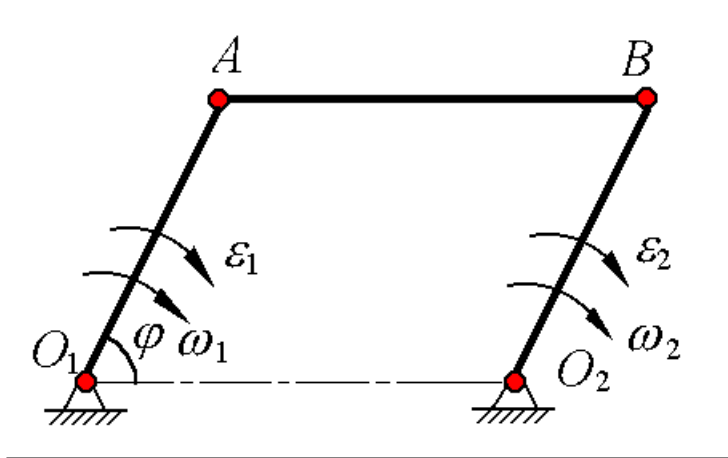
$$\text{即} \quad a_P = \frac{v_O^2}{R} (\uparrow)$$

由此看出，速度瞬心 $P$ 的加速度并不等于零，即它不是加速度瞬心。当车轮沿固定的直线轨道作纯滚动时，其速度瞬心 $P$ 的加速度指向轮心。

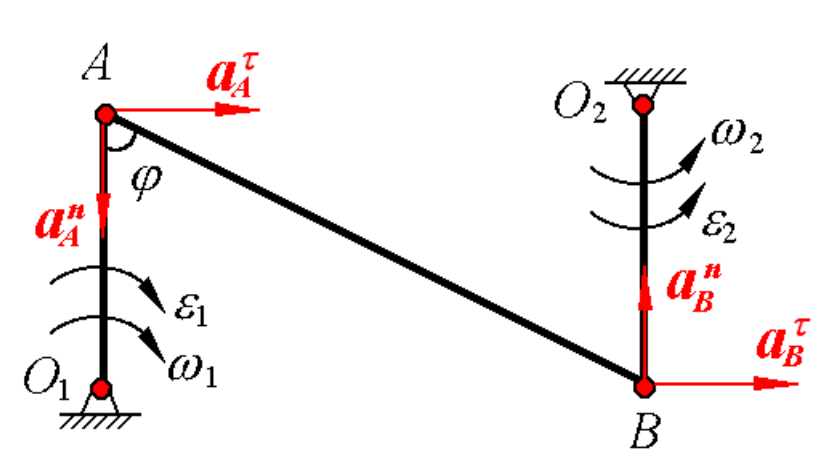


[例9] 已知 $O_1A=O_2B$ , 图示瞬时  $O_1A \parallel O_2B$

试问(a),(b)两种情况下 $\omega_1$ 和 $\omega_2$ ,  $\varepsilon_1$ 和 $\varepsilon_2$ 是否相等?



(a)



(b)

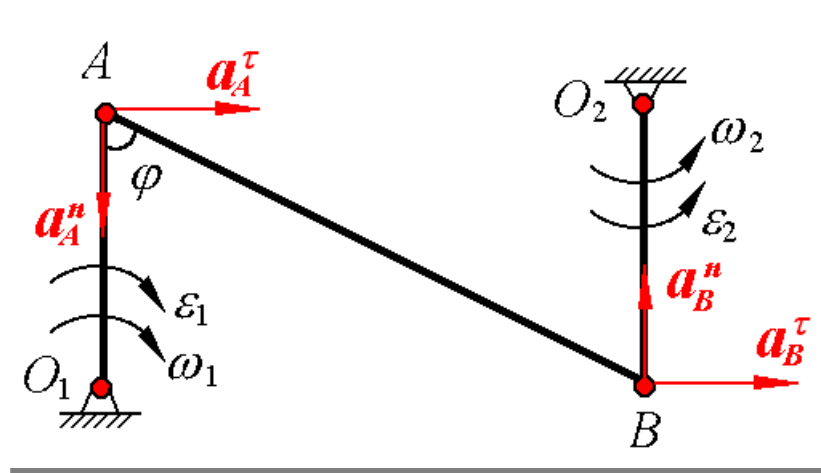
解: (a)  $AB$ 作平移,  $\therefore \bar{v}_A = \bar{v}_B$ ,  $\bar{a}_A = \bar{a}_B$  ( $\bar{a}_A^\tau = \bar{a}_B^\tau$ ,  $\bar{a}_A^n = \bar{a}_B^n$ )

又  $\because \omega_1 = v_A / O_1A$ ,  $\omega_2 = v_B / O_2B$ ;  $\therefore \omega_1 = \omega_2; \varepsilon_1 = \varepsilon_2.$

$\varepsilon_1 = a_A^\tau / O_1A$ ,  $\varepsilon_2 = a_B^\tau / O_2B$ ;

而  $O_1A = O_2B$

$O_1A$ 与 $O_2B$ 运动完全一致。



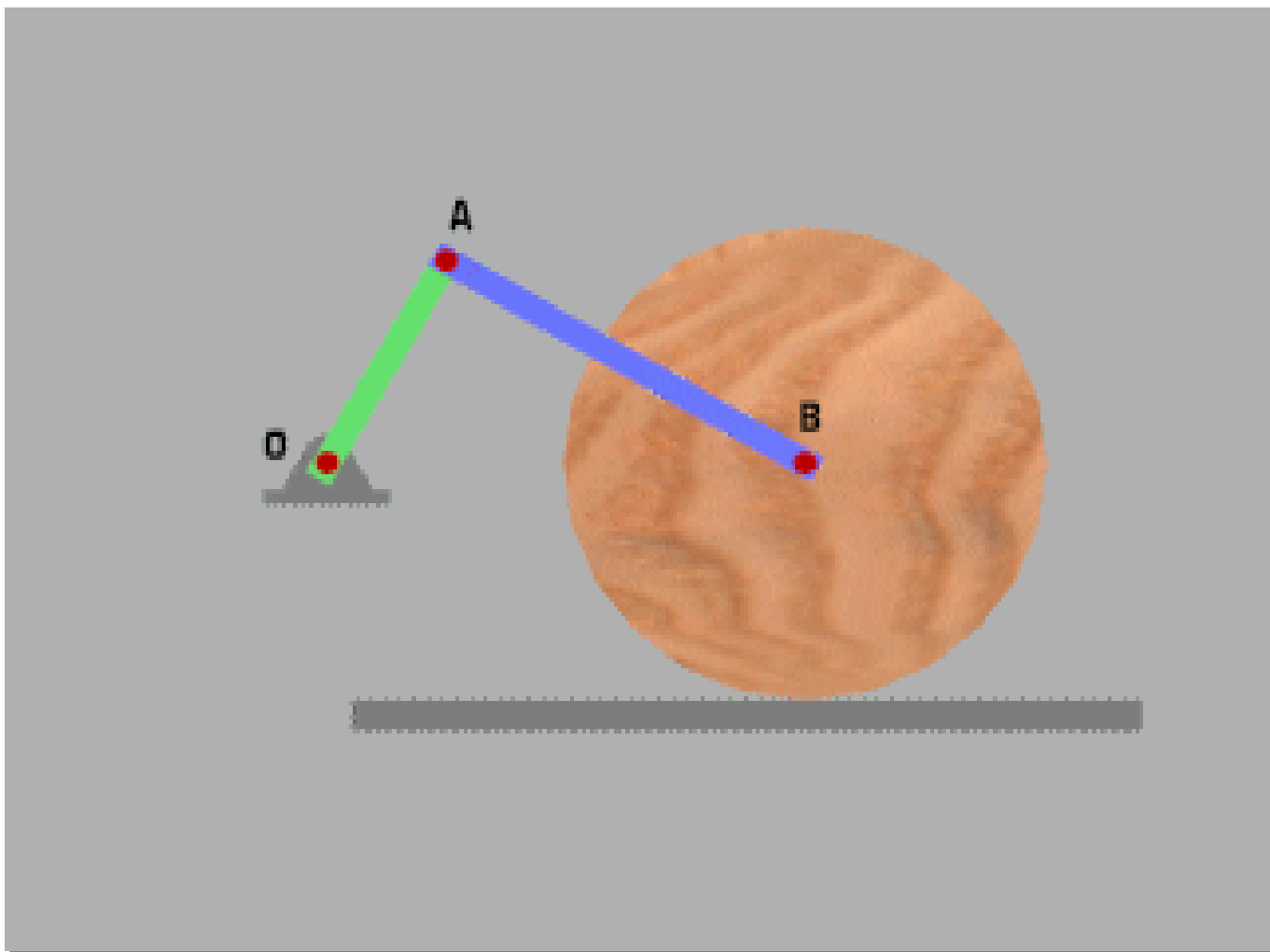
(b)  $AB$ 作平面运动, 图示瞬时作瞬时平移, 此时  $\omega_{AB} = 0, \bar{v}_A = \bar{v}_B$

$$\because O_1A = O_2B, \omega_1 = v_A / O_1A, \omega_2 = v_B / O_2B, \therefore \omega_1 = \omega_2$$

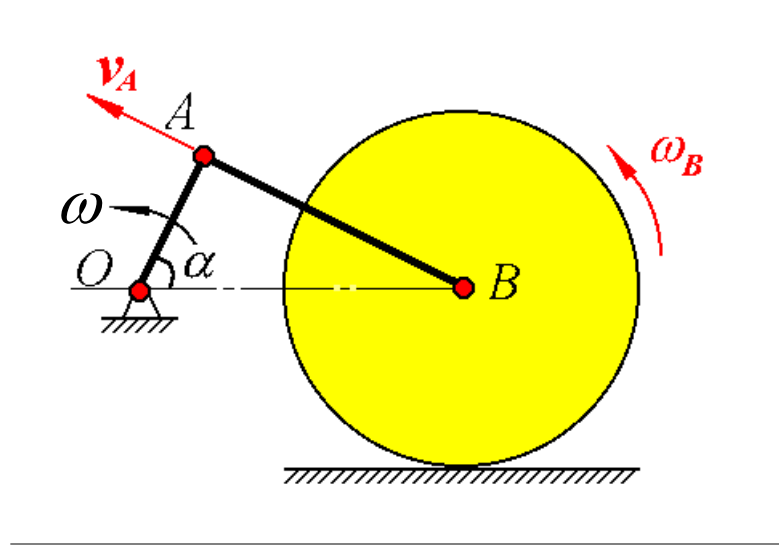
$$[\bar{a}_A]_{AB} = [\bar{a}_B]_{AB}, \quad \text{即} \quad [\bar{a}_A^\tau]_{AB} + [\bar{a}_A^n]_{AB} = [\bar{a}_B^\tau]_{AB} + [\bar{a}_B^n]_{AB}$$

$$O_1A \cdot \epsilon_1 \sin \varphi + O_1A \cdot \omega_1^2 \cos \varphi = O_2B \cdot \epsilon_2 \sin \varphi - O_2B \cdot \omega_2^2 \cos \varphi$$

$$\therefore \epsilon_2 = \epsilon_1 + 2\omega_1^2 \operatorname{ctg} \varphi \quad \text{即} \quad \epsilon_1 \neq \epsilon_2 \quad \text{并由此看出, } AB \text{ 作瞬时平动时 } \overline{a_A} \neq \overline{a_B}$$



[例10] 曲柄滚轮机构。滚子半径 $R=15\text{cm}$ ,  $n=60\text{ rpm}$   
求：当 $\alpha=60^\circ$ 时 ( $OA \perp AB$ ), 滚轮的 $\omega_B$ ,  $\varepsilon_B$ 。



分析: 要想求出滚轮的 $\omega_B$ ,  $\varepsilon_B$  先要求出 $v_B$ ,  $a_B$

解:  $OA$ 定轴转动,  $AB$ 杆和轮 $B$ 作平面运动  
研究 $AB$ :

$$\omega = n\pi / 30 = 60\pi / 30 = 2\pi \text{ rad/s}$$

$$v_A = OA \cdot \omega = 15 \times 2\pi = 30\pi \text{ cm/s}$$

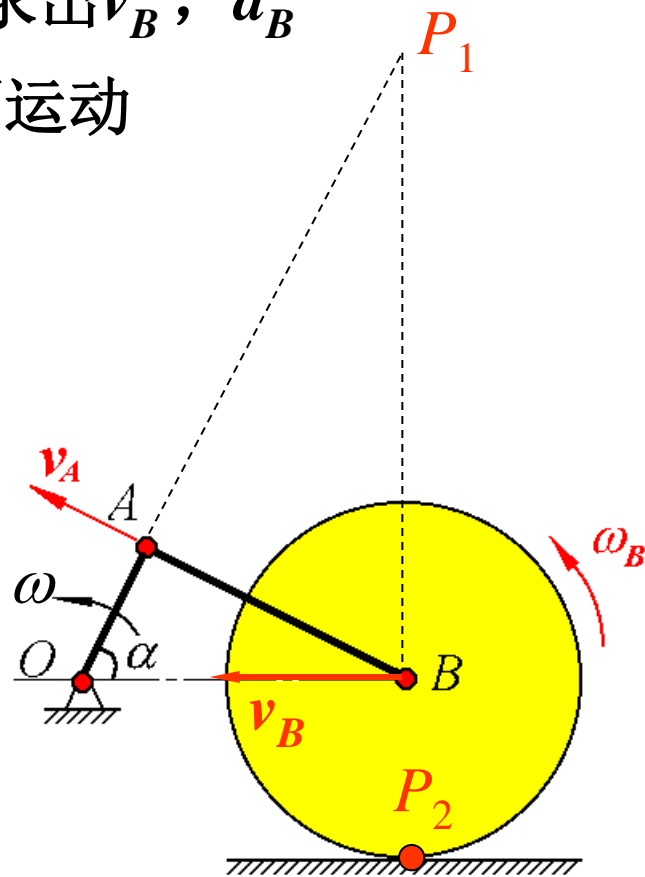
$P_1$  为 $AB$ 杆的速度瞬心,

$P_2$  为滚轮的速度瞬心。

$$\therefore \omega_{AB} = v_A / AP_1 = 30\pi / 3 \times 15 = \frac{2}{3} \pi \text{ rad/s}$$

( $\curvearrowright$ )

$$v_B = BP_1 \cdot \omega_{AB} = 2\sqrt{3} \times 15 \times \frac{2\pi}{3} = 20\sqrt{3}\pi \text{ cm/s} (\leftarrow)$$





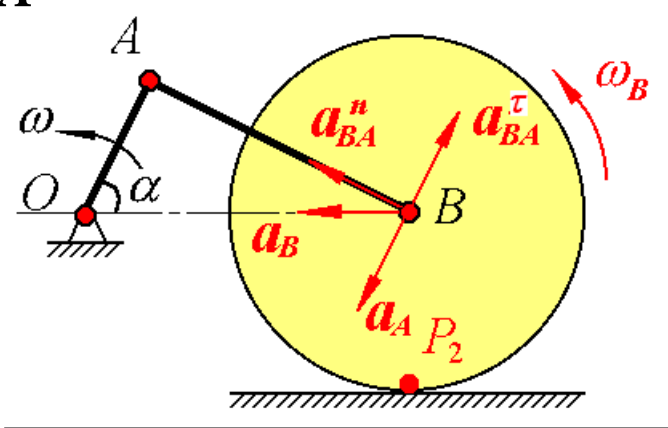
取A为基点,  $a_A = OA \cdot \omega^2 = 15 \times (2\pi)^2 = 60\pi^2 \text{cm/s}^2$  指向O点

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n \quad (a_{BA}^n = AB\omega_{BA}^2 = \sqrt{3} \times 15 \times (\frac{2\pi}{3})^2 = \frac{20\sqrt{3}}{3} \pi^2)$$

大小 ?     $\checkmark$     ?     $\checkmark$   
 方向  $\checkmark$      $\checkmark$      $\checkmark$      $\checkmark$

由B指向A

作加速度矢量图, 将上式向BA线上投影



$$a_B \cos 30^\circ = 0 + 0 + a_{BA}^n$$

$$a_B = \frac{a_{BA}^n}{\cos 30^\circ} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \pi^2 / \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{40}}{3} \pi^2 = 131.5 \text{cm/s}^2 (\leftarrow)$$

研究轮B:  $P_2$ 为其速度瞬心

$$\omega_B = v_B / BP_2 = 20\sqrt{3}\pi / 15 = 7.25 \text{rad/s} \quad (\curvearrowright)$$

$$\varepsilon_B = a_B / BP_2 = 131.5 / 15 = 8.77 \text{rad/s}^2 \quad (\curvearrowright)$$

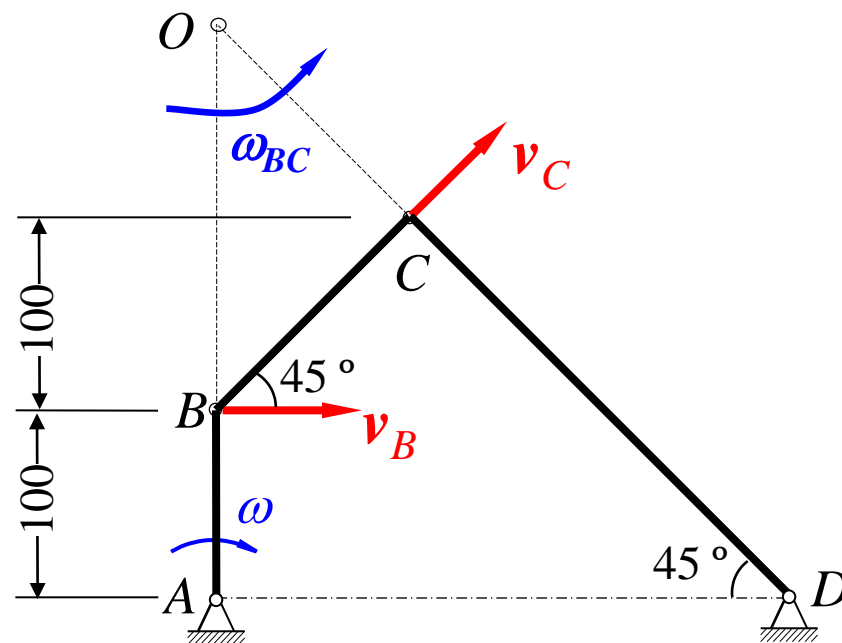
[例11] 平面四连杆机构的尺寸和位置如图所示，如果杆AB以等角速度 $\omega = 1 \text{ rad/s}$ 绕A轴转动，求C点的加速度。

解：AB和CD作定轴转动，BC作平面运动，其B、C两点的运动轨迹已知为圆周，由此可知 $v_B$ 和 $v_C$ 的方向，分别作 $v_B$ 和 $v_C$ 两个速度矢量的垂线得交点O即为该瞬时BC的速度瞬心。由几何关系知

$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{OB} = \frac{AB \cdot \omega}{OB} = 0.5 \text{ rad/s}$$

$$OB = 200 \text{ mm} , BC = OC = 100\sqrt{2} \text{ mm} , CD = 200\sqrt{2} \text{ mm}$$

$$v_C = OC \cdot \omega_{BC} = 50\sqrt{2} \text{ mm/s}$$



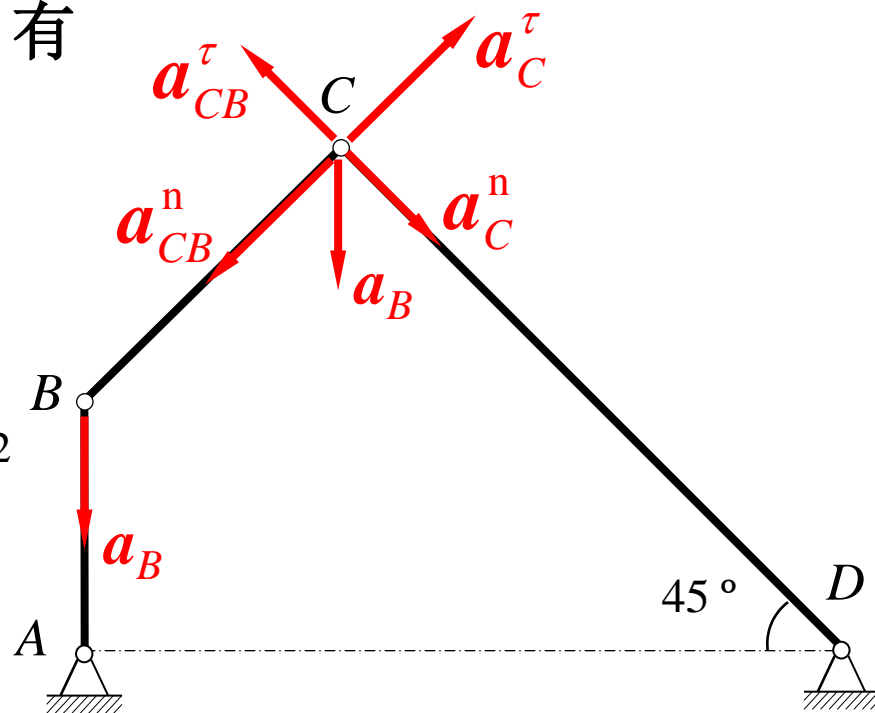
取 $B$ 为基点分析 $C$ 点的加速度，有

$$\mathbf{a}_C^\tau + \mathbf{a}_C^n = \mathbf{a}_B^n + \mathbf{a}_{CB}^\tau + \mathbf{a}_{CB}^n$$

$$a_B^n = AB \cdot \omega^2 = 100 \text{ mm/s}^2$$

$$a_{CB}^n = BC \cdot \omega_{BC}^2 = 25\sqrt{2} \text{ mm/s}^2$$

$$a_C^n = \frac{v_C^2}{CD} \approx 17.68 \text{ mm/s}^2$$



将 $C$ 点的加速度向 $BC$ 方向投影得：

$$a_C^\tau = -a_{CB}^n - a_B^n \cos 45^\circ = -106.07 \text{ mm/s}^2$$

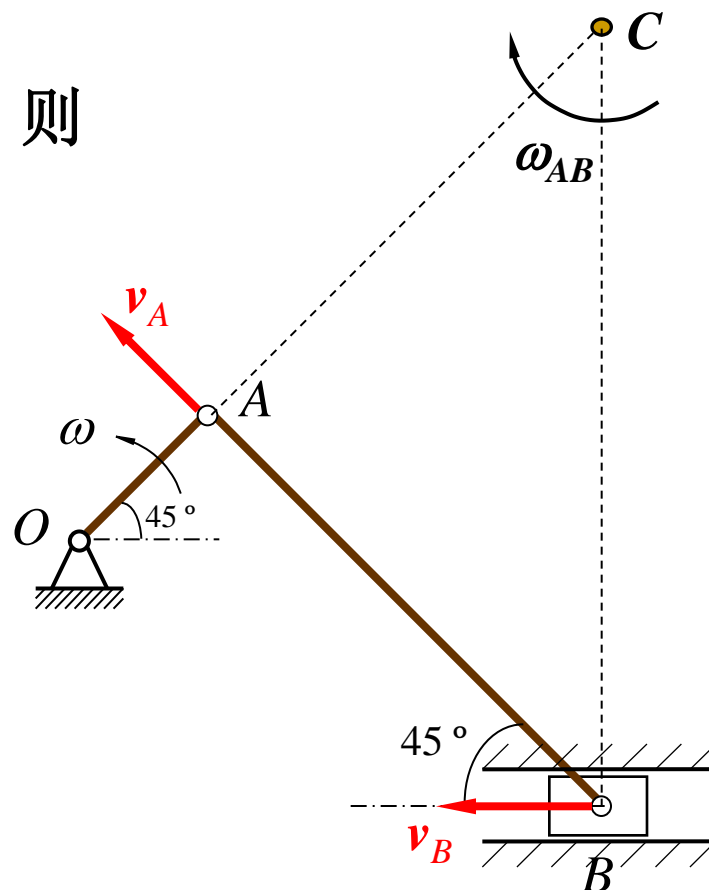
负值表明实际方向与假设方向相反。

[例12] 图示曲柄连杆机构中，已知曲柄 $OA$ 长0.2 m，连杆 $AB$ 长1m， $OA$ 以匀角速度 $\omega = 10 \text{ rad/s}$ 绕 $O$ 轴转动。求图示位置滑块 $B$ 的加速度和 $AB$ 杆的角加速度。

解：  $AB$ 作平面运动，瞬心在 $C$ 点， 则

$$v_A = OA \cdot \omega = 2 \text{ m/s}$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AC} = 2 \text{ rad/s}$$

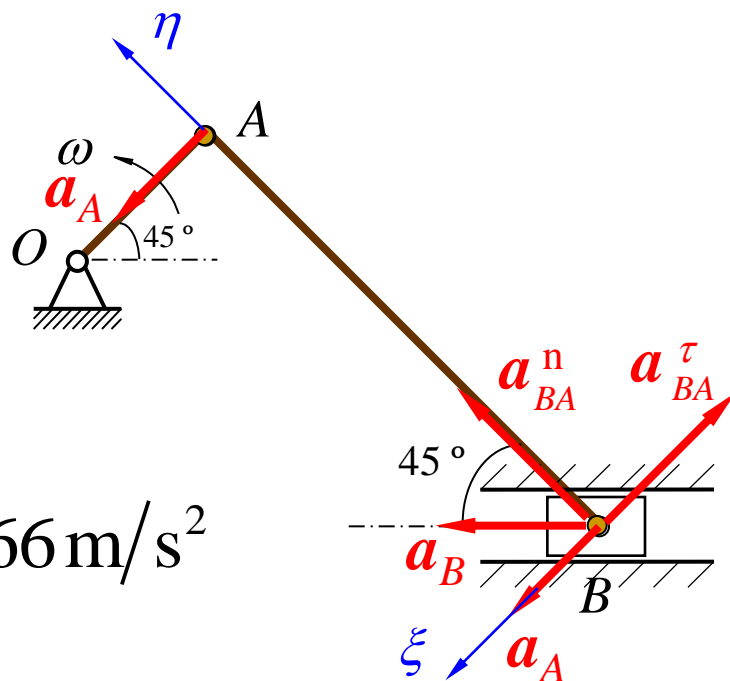


**$AB$ 作平面运动，以 $A$ 点为基点，则 $B$ 点的加速度为**

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^n$$

其中  $a_A = a_A^n = OA \cdot \omega^2 = 20 \text{ m/s}^2$

$$a_{BA}^n = AB \cdot \omega_{AB}^2 = 4 \text{ m/s}^2$$



将 $B$ 点加速度投影到 $\eta$ 轴上得

$$a_B \cos 45^\circ = a_{BA}^n \quad a_B = 5.66 \text{ m/s}^2$$

将 $B$ 点加速度投影到 $\xi$ 轴上得

$$a_B \sin 45^\circ = a_A - a_{BA}^{\tau}$$

$$a_{BA}^{\tau} = 16 \text{ m/s}^2 \quad \alpha_{AB} = \frac{a_{BA}^{\tau}}{AB} = 16 \text{ rad/s}^2$$

[例13] 图示正方形薄板边长20 mm，在其平面内运动。某瞬时顶点A和B的加速度分别为  $a_A = 40\sqrt{2} \text{ mm/s}^2$  和  $a_B = 80 \text{ mm/s}^2$  方向如图。求薄板的角速度和角加速度。

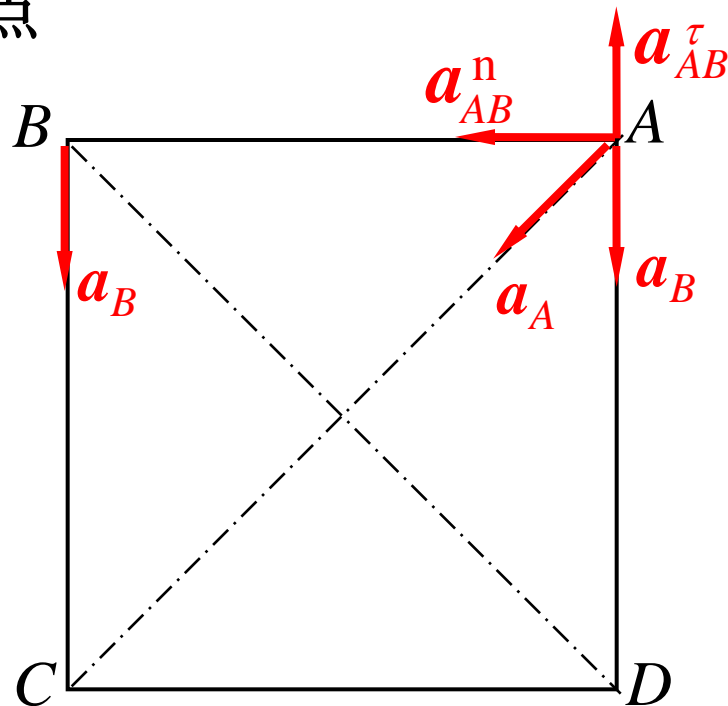
解：薄板作平面运动，取B为基点  
分析A点的加速度如图所示：

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{BA}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^n$$

其中： $a_A = 40\sqrt{2} \text{ mm/s}^2$

$$a_B = 80 \text{ mm/s}^2$$

$$a_{AB}^n = \omega^2 \cdot AB$$



$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{BA}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^n$$

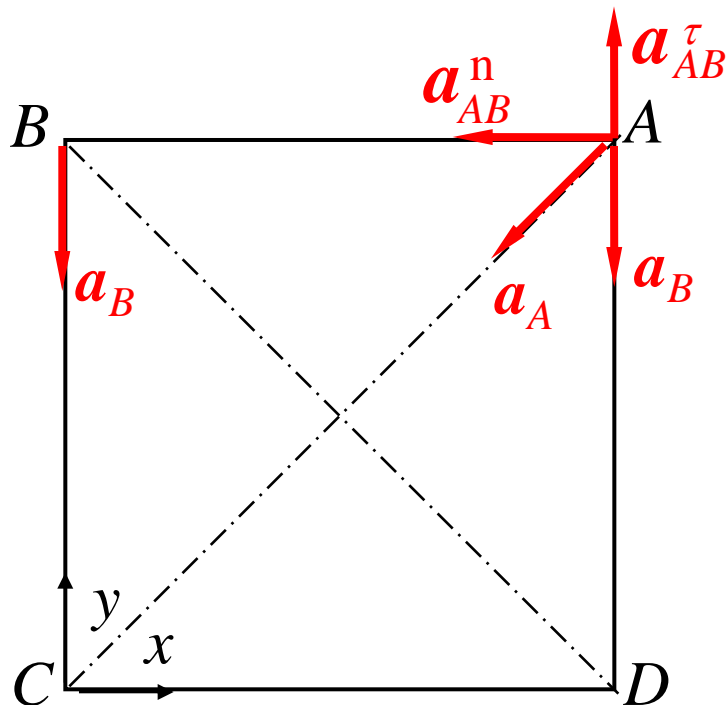
将等式两边分别向x和y方向投影得：

$$-a_A \cos 45^\circ = -a_{AB}^n$$

$$-a_A \cos 45^\circ = -a_B + a_{AB}^{\tau}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{a_{AB}^n}{AB}} = \sqrt{\frac{40\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{20}} = \sqrt{2} \text{ rad/s}$$

$$\alpha = \frac{a_{AB}^{\tau}}{AB} = \frac{80 - 40\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{20} = 2 \text{ rad/s}^2$$



再取**B**为基点分析**C**点的加速度如图所示

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CA}^{\tau} + \vec{a}_{CA}^n$$

其中

$$a_{CB}^n = \omega^2 \cdot BC = 40 \text{ mm/s}^2$$

$$a_{CB}^{\tau} = \alpha \cdot BC = 40 \text{ mm/s}^2$$

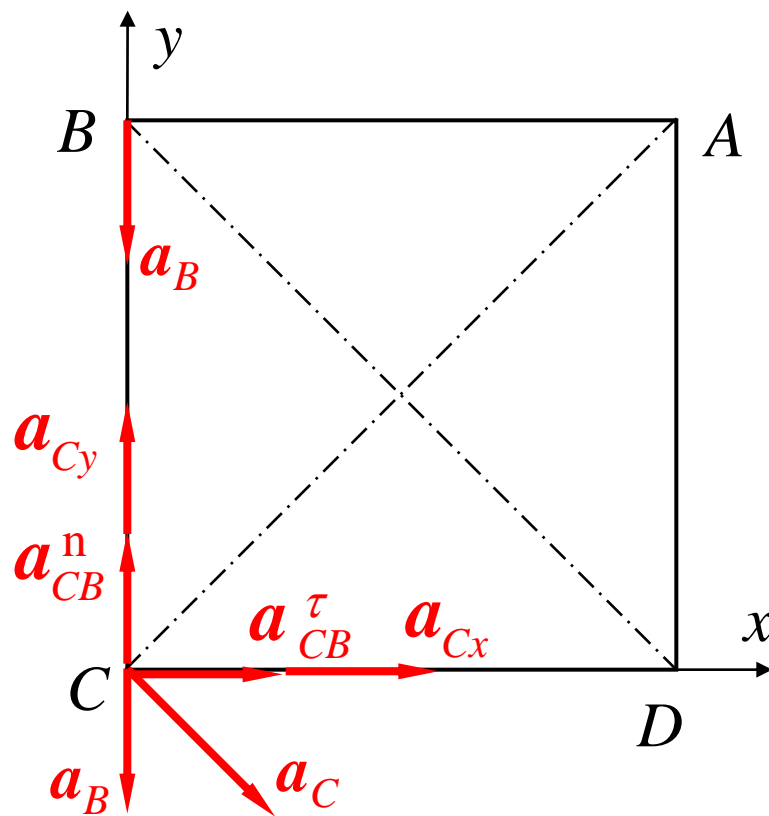
将加速度分别向x和y方向投影得：

$$a_{Cx} = a_{CB}^{\tau} = 40 \text{ mm/s}^2$$

$$a_{Cy} = a_{CB}^n - a_B = -40 \text{ mm/s}^2$$

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = 40\sqrt{2} \text{ mm/s}^2$$

方向与**CD**成**45°**夹角指向右下方。





[例14] 配气机构中,  $OA=r$ , 以等角速  $\omega_o$  转动, 在某瞬时  $\varphi=60^\circ$ ,  $AB\perp BC$ ,  $AB=6r$ ,  $BC=3\sqrt{3}r$ 。求该瞬时滑块  $C$  的速度和加速度。

解:  $OA$  定轴转动;  $AB$ ,  $BC$  均作平面运动

运动, 滑块  $B$  和  $C$  均作平移。

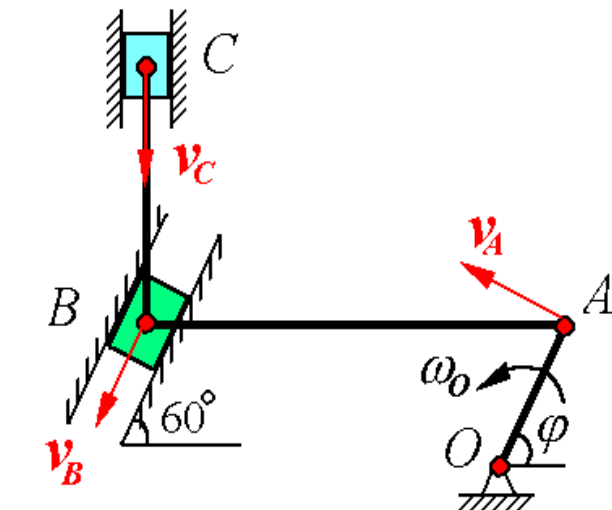
①求  $\bar{v}_C$

对  $AB$  杆应用速度投影定理:

$$v_B \cos 60^\circ = v_A \cos 30^\circ \therefore v_B = \sqrt{3}v_A = \sqrt{3}r\omega_o$$

对  $BC$  杆应用速度投影定理:  $v_C = v_B \sin 60^\circ$

$$v_C = \sqrt{3}r\omega_o \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}r\omega_o (\downarrow)$$



## ②求 $\bar{a}_C$

以A为基点求B点加速度:  $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n$  (1)

$a_A = r\omega_o^2$  ,  $a_{BA}^n = AB\omega_{AB}^2$  ,  $P_1$ 为AB杆速度瞬心, 而  $AP_1 = 3r$

$$\therefore \omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_1} = \frac{r\omega_o}{3r} = \frac{\omega_o}{3},$$

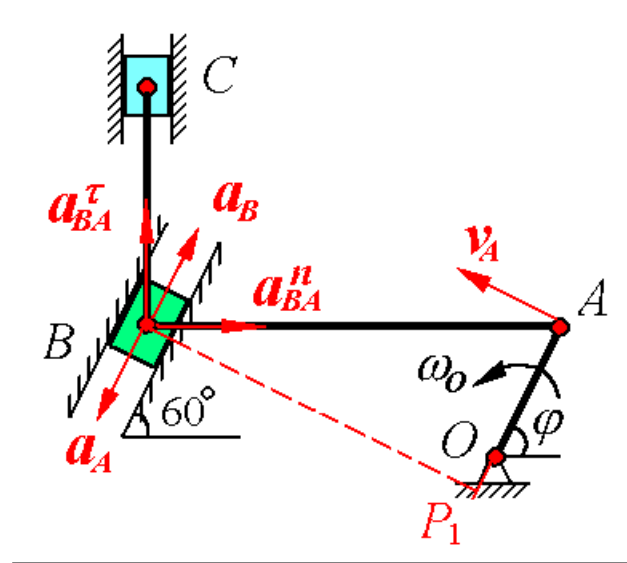
$$a_{BA}^n = 6r \cdot \left(\frac{\omega_o}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}r\omega_o^2$$

作加速度矢量图,

并沿BA方向投影

$$a_B \cos 60^\circ = -a_A \cdot \cos 60^\circ + a_{BA}^n$$

$$\therefore a_B = -r\omega_o^2 + \frac{4}{3}r\omega_o^2 = \frac{r}{3}\omega_o^2$$



再以 $B$ 为基点, 求 $\bar{a}_C$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^{\tau} + \bar{a}_{CB}^n \quad (2)$$

作加速度矢量图,  $P_2$  为  $BC$  的瞬心, 而  $P_2C = 9r$

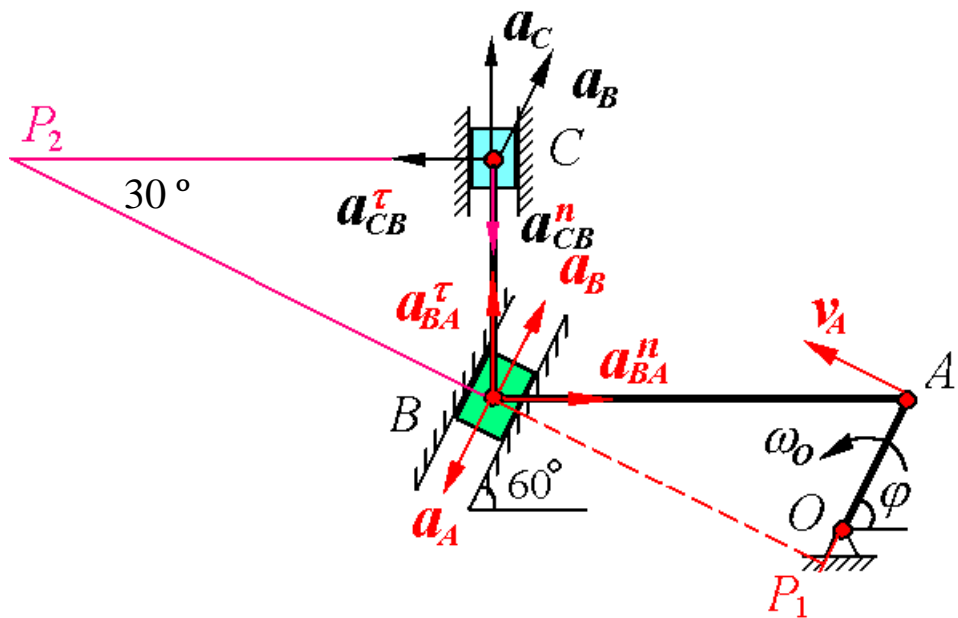
$$\therefore \omega_{BC} = \frac{v_C}{P_2C} = \frac{3}{2} r \omega_o \cdot \frac{1}{9r} = \frac{\omega_o}{6}$$

$$a_{CB}^n = BC \cdot \omega_{BC}^2 = 3\sqrt{3}r \cdot \left(\frac{\omega_o}{6}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{12} r \omega_o^2$$

将 (b) 式在  $BC$  方向线上投影

$$a_C = a_B \cos 30^\circ - a_{CB}^n = \frac{r}{3} \omega_o^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{12} r \omega_o^2 = \frac{\sqrt{3}}{12} r \omega_o^2$$

[注]  $\bar{a}_B, \bar{a}_C$  指向可假设, 结果为正说明假设与实际指向相同, 反之, 结果为负, 说明假设与实际指向相反。



## 第八章 刚体平面运动习题课

### 一、概念与内容

#### 1. 刚体平面运动的定义

刚体运动时，其上任一点到某固定平面的距离保持不变。

#### 2. 刚体平面运动的简化

可以用刚体上一个与固定平面平行的平面图形 $S$ 在自身平面内的运动代替刚体的整体运动。

#### 3. 刚体平面运动的分解

分解为随基点的平移（平移规律与基点的选择有关）

与绕基点的转动（转动规律与基点的选择无关）。

#### 4. 基点

可选择平面图形内任意一点，通常是运动状态已知的点。

## 5. 速度瞬心(瞬心)

任一瞬时，平面图形或扩大部分都唯一存在一个速度为零的点，瞬心位置随时间改变，即瞬心有加速度。

每一瞬时平面图形的运动可视为绕该瞬时瞬心的转动。这种瞬时绕瞬心的转动与定轴转动不同。

瞬心位于无穷远处， $\omega = 0$ 。各点速度相同，刚体作瞬时平移，瞬时平移与平移不同。

6. 刚体定轴转动和平面平移是刚体平面运动的特例。

7. 求平面图形上任一点速度的方法

基点法：  $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$ ，  $A$ 为基点

速度投影法：  $[\bar{v}_B]_{AB} = [\bar{v}_A]_{AB}$

速度瞬心法：  $v_B = BP \cdot \omega$ ，  $\bar{v}_B \perp BP$ ，与 $\omega$ 一致。 $P$ 为瞬心

其中，基点法是最基本的公式，瞬心法是基点法的特例。

## 8. 求平面图形上一点加速度的方法

基点法:  $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n$ ,  $A$ 为基点, 是最常用的方法

此外, 当 $\omega=0$ , 瞬时平移时才可采用方法  $[\bar{a}_B]_{AB} = [\bar{a}_A]_{AB}$

它是基点法在 $\omega=0$ 时的特例。

## 9. 平面运动方法与合成运动方法的应用条件

平面运动方法用于研究一个平面运动刚体上任意两点的速度、加速度之间的关系及任意一点的速度、加速度与图形角速度、角加速度之间的关系。

合成运动方法常用来确定两个相接触的物体在接触点处有相对滑动时的运动关系的传递。

## 二、解题步骤和要点

1. 根据题意和刚体各种运动的定义，判断机构中各刚体的运动形式。注意每一次的研究对象只是一个刚体。

2. 对作平面运动的刚体，根据已知条件和待求量，选择求解速度(图形角速度)问题的方法,用基点法求加速度(图形角加速度)。

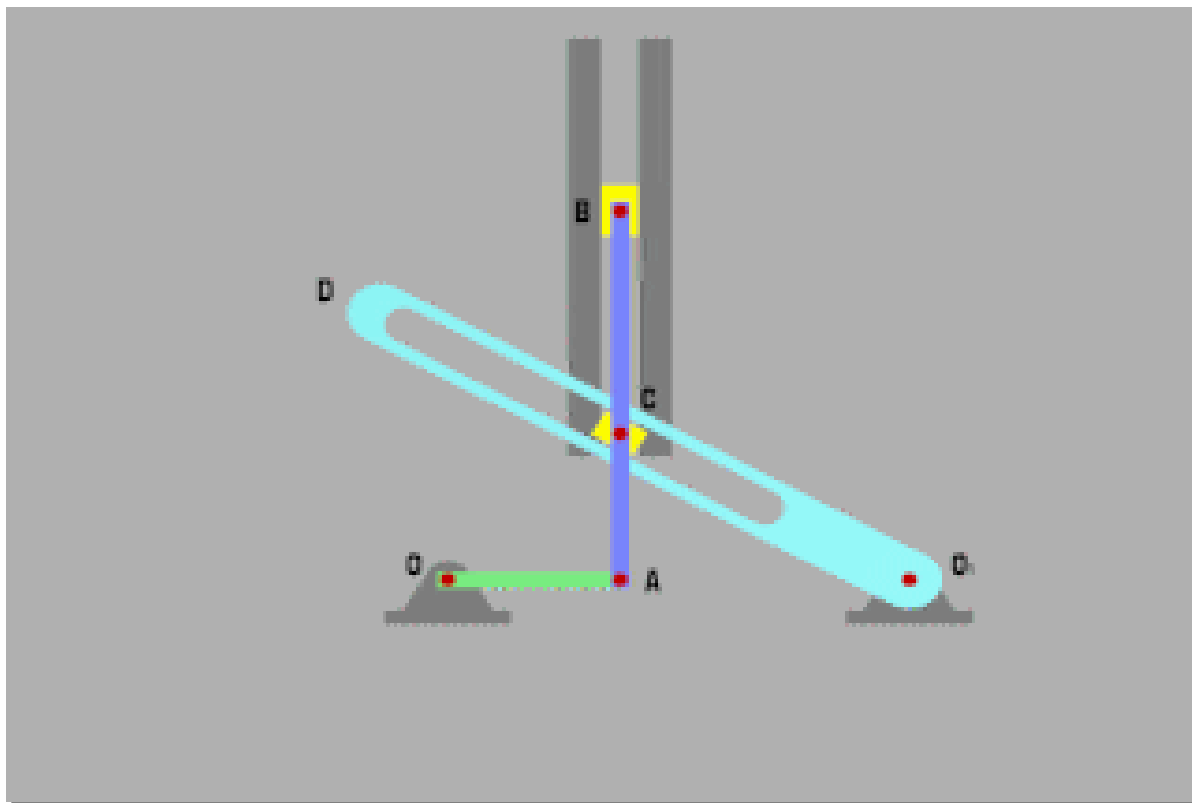
3. 作速度分析和加速度分析，求出待求量。

(基点法: 恰当选取基点，作速度平行四边形，加速度矢量图；

速度投影法: 只能求速度的大小，不能求出图形的 $\omega$ ；

速度瞬心法: 确定瞬心的位置是关键。

## [例1] 导槽滑块机构





### [例1] 导槽滑块机构

已知 曲柄 $OA=r$ ，匀角速度 $\omega$ 转动，连杆 $AB$ 的中点 $C$ 处连接一滑块 $C$ 可沿导槽 $O_1D$ 滑动， $AB=l$ ，图示瞬时 $O, A, O_1$ 三点在同一水平线上， $OA \perp AB$ ， $\angle AO_1C = \theta = 30^\circ$ 。

求：该瞬时 $O_1D$ 的角速度。

解：  $OA, O_1D$ 均作定轴转动，  
 $AB$ 作平面运动

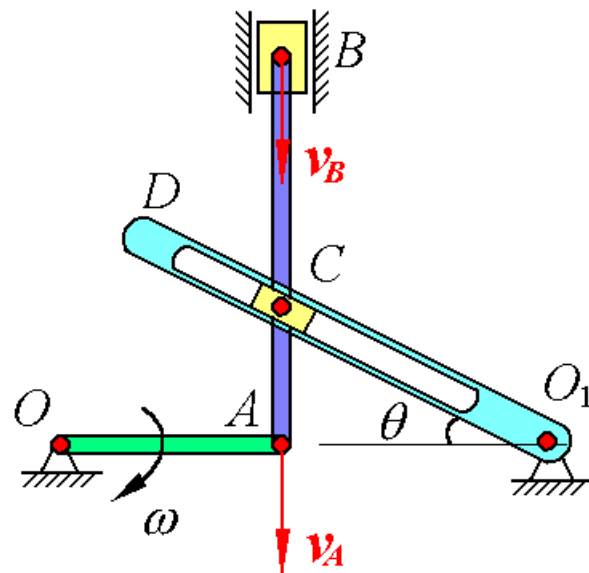
研究 $AB$ ：  $v_A = r\omega$ ， 图示位置，  
作**瞬时平移**，所以

$$v_B = r\omega; v_C = v_A = r\omega$$

用合成运动方法

求 $O_1D$ 杆上与滑块 $C$  接触的点的速度

**动点**：  $AB$ 杆上 $C$  (或滑块 $C$ )， **动系**：  $O_1D$ 杆， **静系**： 机架



绝对运动：曲线运动， $v_a = v_c = r\omega$ ，方向↓

相对运动：直线运动， $v_r = ?$ ，方向//  $O_1D$

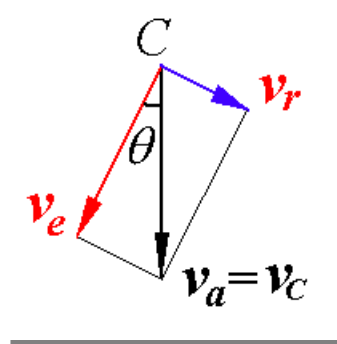
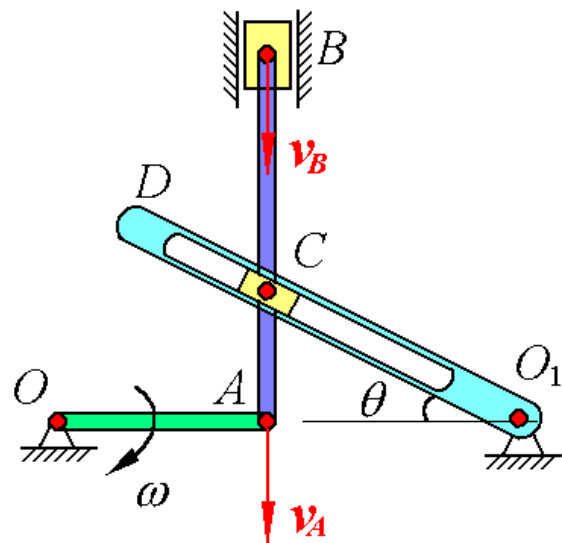
牵连运动：定轴转动， $v_e = ?$ ，方向 $\perp O_1D$

根据  $\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r$ ，作速度平行四边形

$$\therefore v_e = v_c \cdot \cos\theta = r\omega \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} r\omega$$

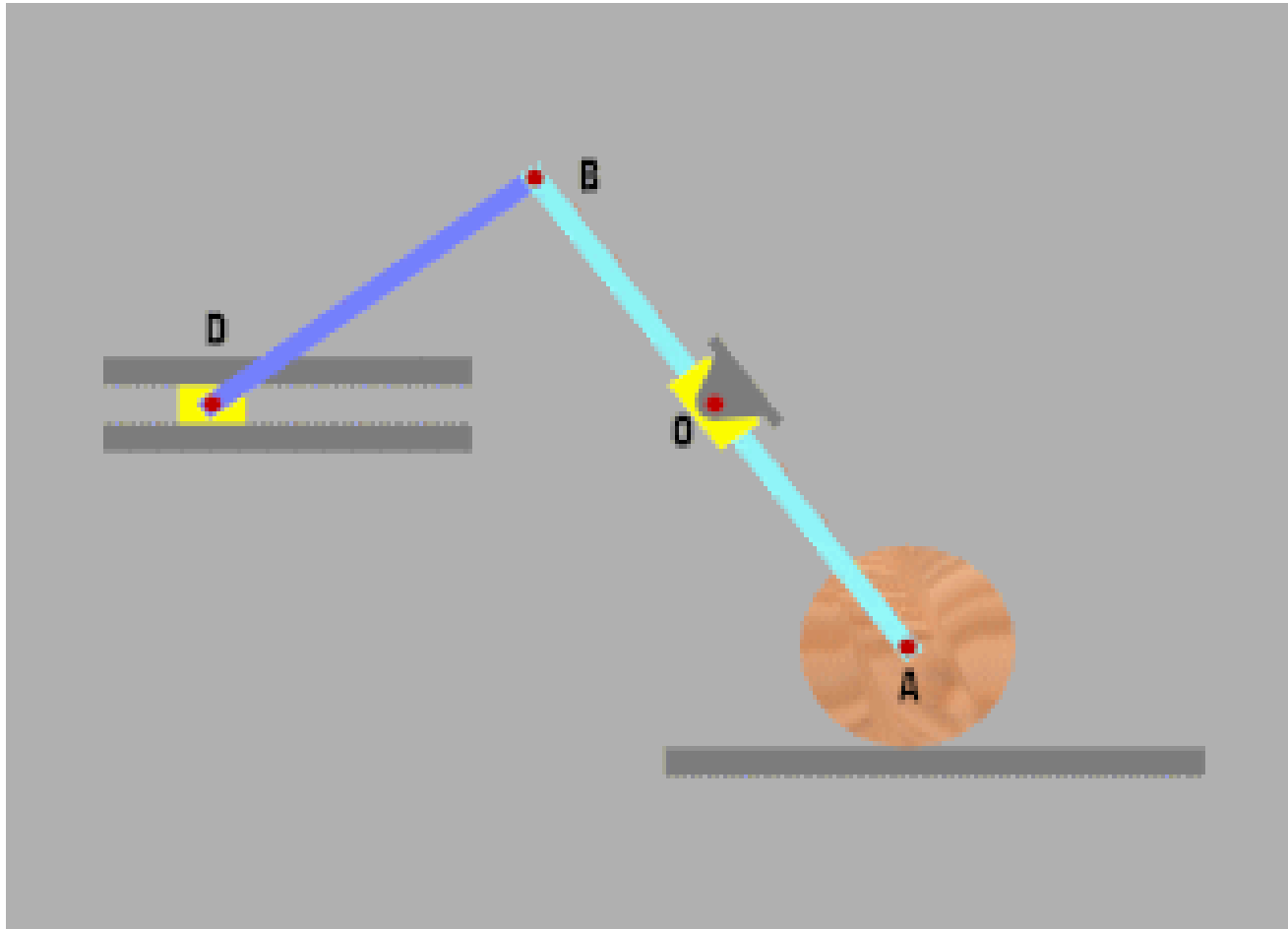
$$\text{又} \therefore v_e = O_1C \cdot \omega_{O_1D}$$

$$\therefore \omega_{O_1D} = \frac{v_e}{O_1C} = \frac{\sqrt{3}/2 r\omega}{\frac{l}{2}/\sin\theta} = \frac{\sqrt{3}r}{2l} \omega \quad (\curvearrowright)$$

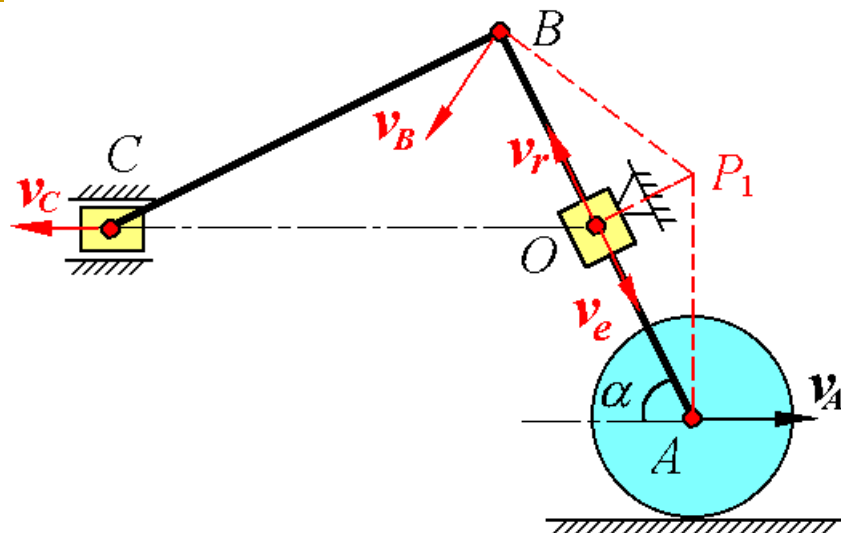


这是一个需要联合应用点的合成运动和刚体平面运动理论求解的综合性问题。

## [例2] 平面机构



[例2] 平面机构图示瞬时  
 $O$ 点在 $AB$ 中点,  $\alpha = 60^\circ$ ;  $BC \perp AB$ ,  
 已知 $O, C$ 在同一水平线上,  
 $AB = 20\text{cm}$ ,  $v_A = 16\text{cm/s}$ ,  
 试求该瞬时 $AB$ 杆,  $BC$ 杆的角速  
 度及滑块 $C$ 的速度。



解: 轮 $A$ , 杆 $AB$ , 杆 $BC$ 均作平面运动, 套筒 $O$ 作定轴转动, 滑块 $C$ 平移。

取套筒上 $O$ 点为动点, 动系固结于 $AB$ 杆; 静系固结于机架,

$\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r$ , 由于  $\bar{v}_a = 0$ ,  $\bar{v}_r$  沿 $AB$ ,  
 所以  $\bar{v}_e$  方向沿 $AB$ 并且与  $\bar{v}_r$  反向。从而确定了 $AB$ 杆上与 $O$ 点接  
 触点的速度方向。

研究 $AB$ , 由 $v_A$ 及 $v_e$ 的方向可确定 $P_1$ 为速度瞬心。

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{P_1A} = \frac{16}{OA/\sin\alpha} = \frac{16}{10/\sin 60^\circ} = \frac{4}{5}\sqrt{3} \text{ rad/s} \quad (\curvearrowright)$$

$$v_B = \omega_{AB} \cdot P_1B = \omega_{AB} \cdot P_1A = v_A = 16 \text{ cm/s}$$

研究 $BC$ , 以 $B$ 为基点,

根据  $\bar{v}_C = \bar{v}_B + \bar{v}_{CB}$

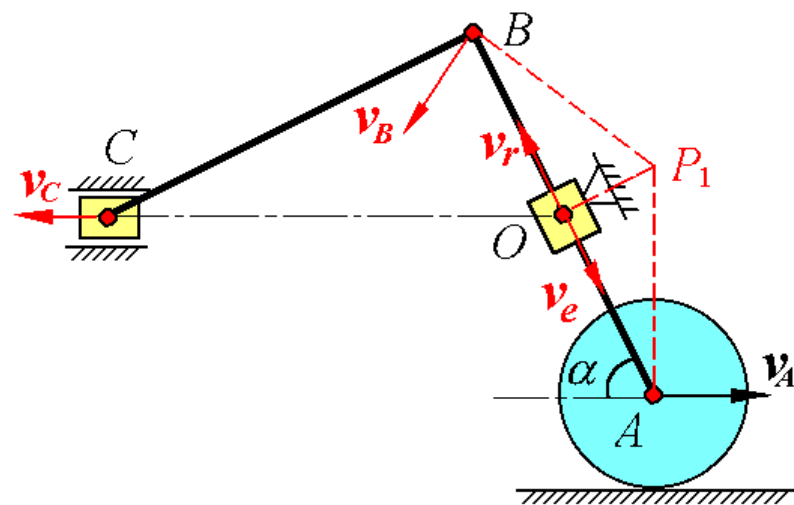
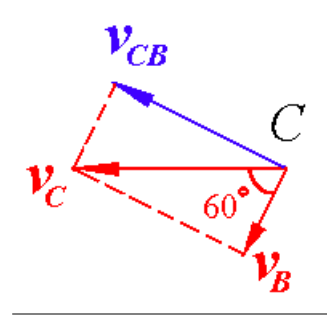
作速度平行四边形

$$v_C = \frac{v_B}{\cos 60^\circ} = 2v_B = 2 \times 16 = 32 \text{ cm/s}$$

$$v_{CB} = v_B \cdot \tan 60^\circ = 16 \times \sqrt{3} = 16\sqrt{3} \text{ cm/s}$$

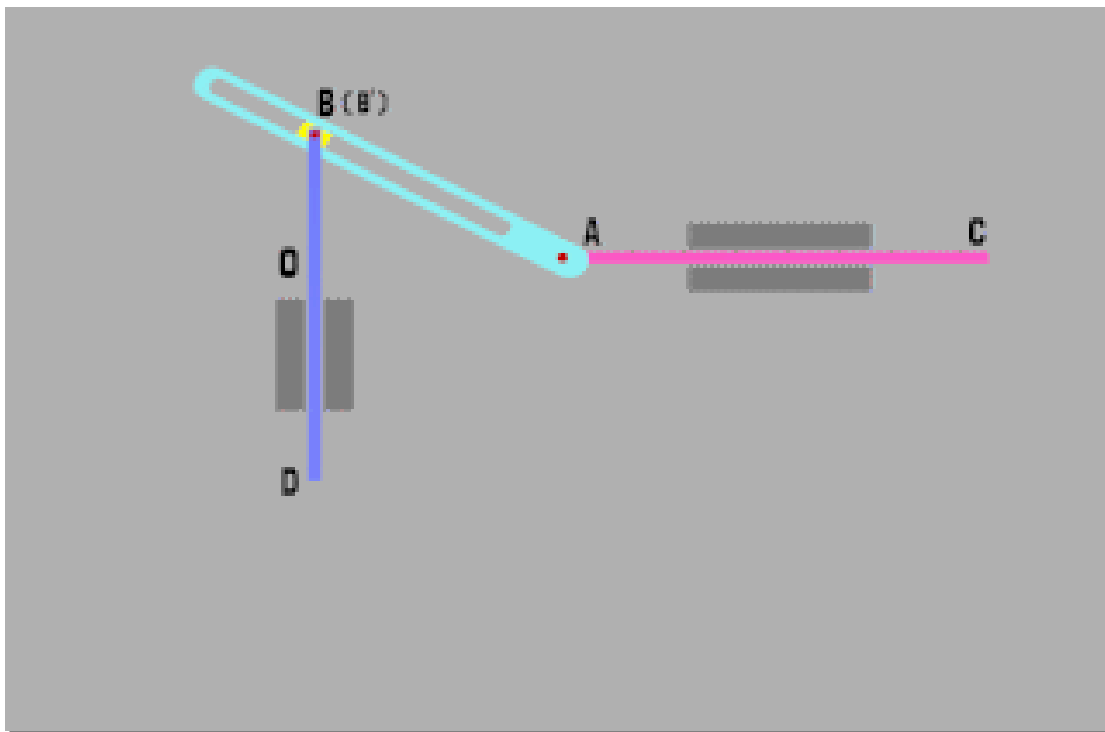
$$\therefore v_{CB} = BC \cdot \omega_{BC} \quad BC = \sqrt{3} \cdot OB = 10\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\therefore \omega_{BC} = \frac{v_{CB}}{BC} = \frac{16\sqrt{3}}{10\sqrt{3}} = 1.6 \text{ rad/s} \quad (\curvearrowright)$$



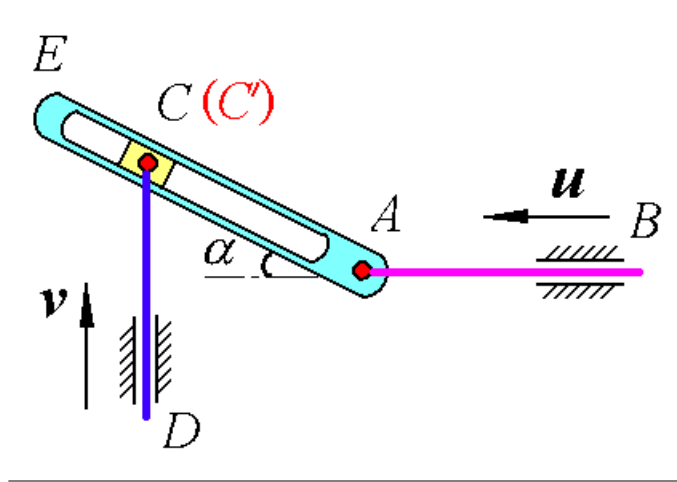
同样也可以用  
瞬心法求 $\omega_{BC}$ 和 $v_C$ 。

### [例3] 导槽滑块机构



### [例3] 导槽滑块机构

图示瞬时, 杆 $AB$ 速度 $\bar{u}$ , 杆 $CD$ 速度 $\bar{v}$ 及 $\alpha$ 角已知, 且 $AC=l$ , 求导槽 $AE$ 的角速度。



解：应用点的合成运动方法确定

$CD$ 杆上 $C$ 点与 $AE$ 杆上接触点 $C'$ 之间的速度关系。

取 $CD$ 杆上 $C$ 为动点，动系固结于 $AE$ ，静系固结于机架；则

$$\bar{v}_C = \bar{v}_{C'} + \bar{v}_r \quad (a)$$

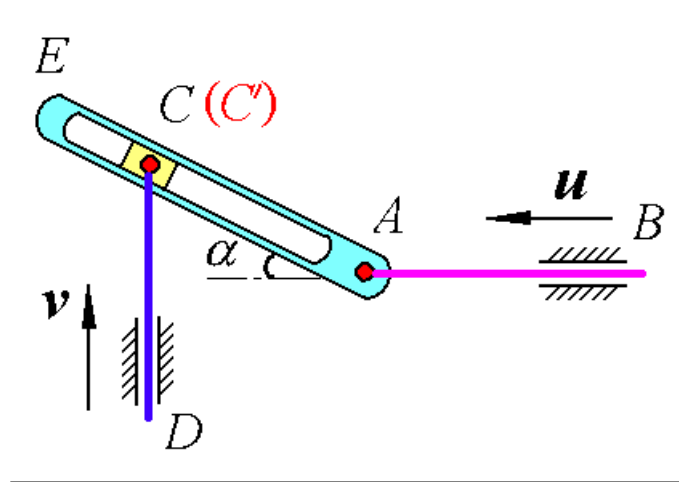
应用平面运动方法确定 $AE$ 上 $A$ 、 $C'$ 点之间速度关系

$$\bar{v}_{C'} = \bar{v}_A + \bar{v}_{C'A} \quad (b)$$

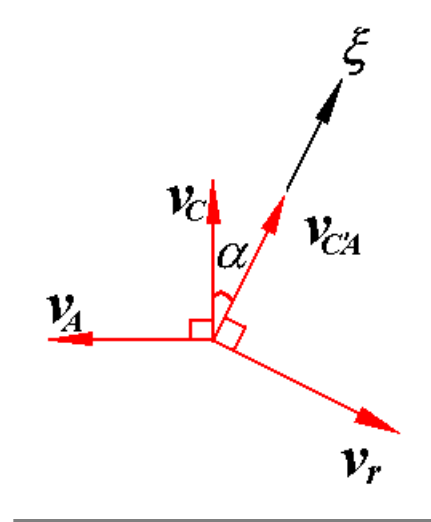
将 (b) 代入 (a) 得  $\bar{v}_C = \bar{v}_A + \bar{v}_{C'A} + \bar{v}_r$ , 作速度矢量图投至  $\xi$  轴, 且  $v_c = v$ ,  $v = u$ , 有

$$v_C \cos \alpha = -v_A \sin \alpha + v_{C'A}$$

即 
$$v_{C'A} = v \cos \alpha + u \sin \alpha$$

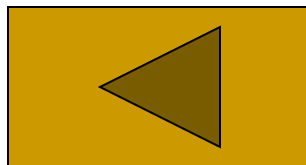


$$\omega_{AE} = \frac{v_{C'A}}{AC} = \frac{v \cos \alpha + u \sin \alpha}{l} \quad (\curvearrowright)$$





# 第八章结束





# 理论力学

---

## 第三篇 《动力学》

## 引言

一. 研究对象：研究物体的机械运动与作用力之间的关系

二. 力学模型：

1. 质点：具有一定质量而不考虑其形状大小的物体。

例如：研究卫星的轨道时，卫星  $\longrightarrow$  质点；

刚体作平动时，刚体  $\longrightarrow$  质点。

2. 质点系：由有限或无限个有着一定联系的质点组成的系统。

刚体是一个特殊的质点系，由无数个相互间保持距离不变的质点组成。又称为不变质点系。

自由质点系：质点系中各质点的运动不受约束的限制。

非自由质点系：质点系中的质点的运动受到约束的限制。

质点系是力学中最普遍的抽象化模型；包括刚体, 弹性体, 流体。

三. 动力学分类：{ 质点动力学                      质点动力学是质点  
                                    质点系动力学              系动力学的基础。

四. 动力学的基本问题：大体上可分为两类：

第一类：已知物体的运动情况，求作用力；

第二类：已知物体的受力情况，求物体的运动。

综合性问题：已知部分力，部分运动求另一部分力、部分运动。

已知主动力，求运动，再由运动求约束反力。



# 理论力学

---

## 第六章 质点动力学

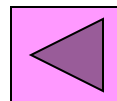
# 第六章 质点动力学



§ 6-1 惯性参考系中的质点动力学



§ 6-2 非惯性参考系中的质点动力学



## § 6-1 惯性参考系中的质点动力学

### 一. 惯性参考系

1. 一般工程问题：固定于地面或相对于地面作匀速直线平动；
2. 人造卫星、洲际导弹问题：地心为原点，三轴指向三个恒星；
3. 天体运动问题：太阳为中心、三轴指向三个恒星。

### 二. 牛顿定律

1. 第一定律（惯性定律）：
2. 第二定律（力与加速度之间的关系定律）： $(m\bar{a} = \bar{F})$
3. 第三定律（作用与反作用定律）：

## 三. 质点的运动微分方程

将动力学基本方程 ( $m\bar{a} = \bar{F}$ ) 表示为微分形式的方程, 称为质点的运动微分方程。

### 1. 矢量形式

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \bar{F} \quad (\text{式中 } \bar{r} = \bar{r}(t) \text{ 为质点矢径形式的运动方程})$$

### 2. 直角坐标形式

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = X \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z \end{cases} \quad (\text{式中 } \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \text{ 为质点直角坐标形式的运动方程})$$



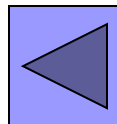
## 3.自然形式

$$\begin{cases} m\frac{d^2s}{dt^2}=F_\tau \\ m\frac{v^2}{\rho}=F_n \\ 0=F_b \end{cases}$$

(式中 $s=s(t)$ 为质点的弧坐标形式的运动方程。 $F_\tau, F_n, F_b$ 分别为力 $\bar{F}$ 在自然轴系 $\tau$ 轴,  $n$ 轴和 $b$ 轴上的投影)

质点运动微分方程除以上三种基本形式外,还可有极坐标形式,柱坐标形式等等。

应用质点运动微分方程, 可以求解质点动力学的两类问题。





## 四. 质点动力学的两类基本问题

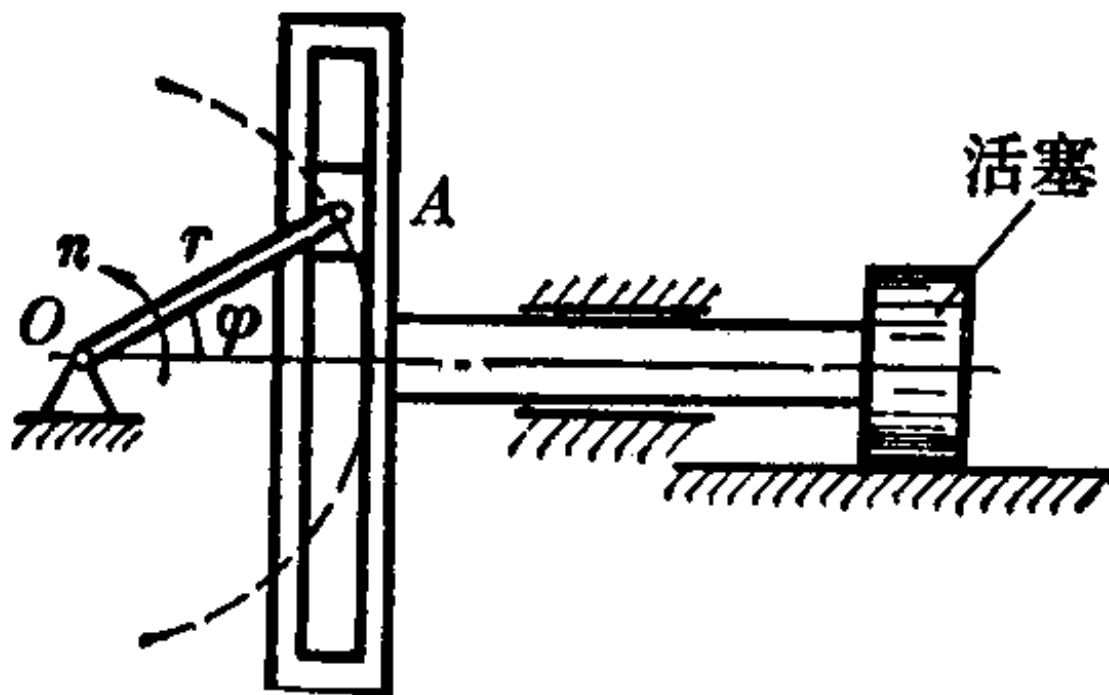
1. 已知质点的运动规律，求作用于质点上的力；

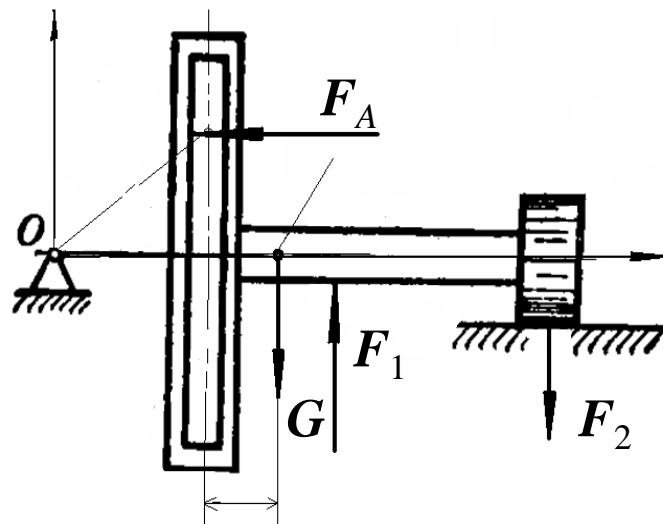
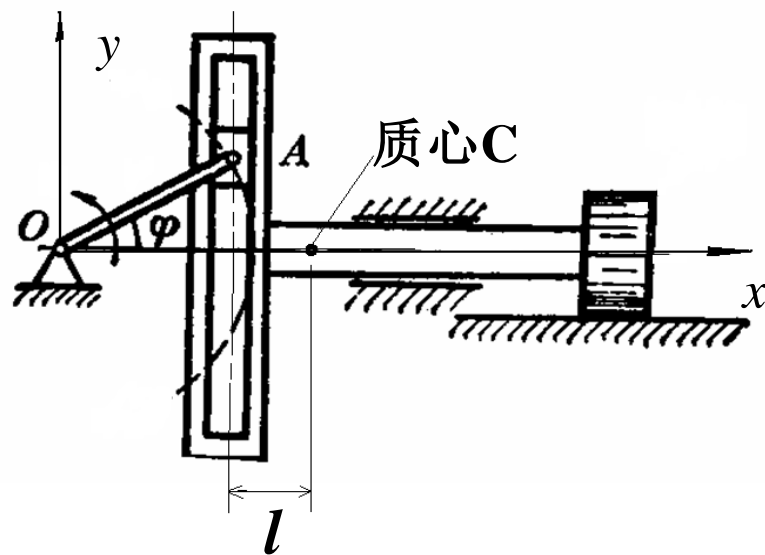
——求微分问题。

2. 已知质点上所受的力，求质点的运动规律。

——按质点运动的初始条件和力的函数关系对运动微分方程进行求解，从数学角度看，是解微分方程或求积分，并确定相应的积分常数的问题。

**例1** 在曲柄滑槽机构中，活塞和滑槽的质量共为50kg。曲柄 $OA$ 长 $r=0.3\text{m}$ ，绕轴 $O$ 作匀速转动，转速 $n=120\text{r/min}$ 。求滑块作用在滑槽上的水平力（各处摩擦不计）。





- 解： (1) 取活塞为研究对象；  
 (2) 受力分析，画受力图；  
 (3) 运动分析，写出运动方程；

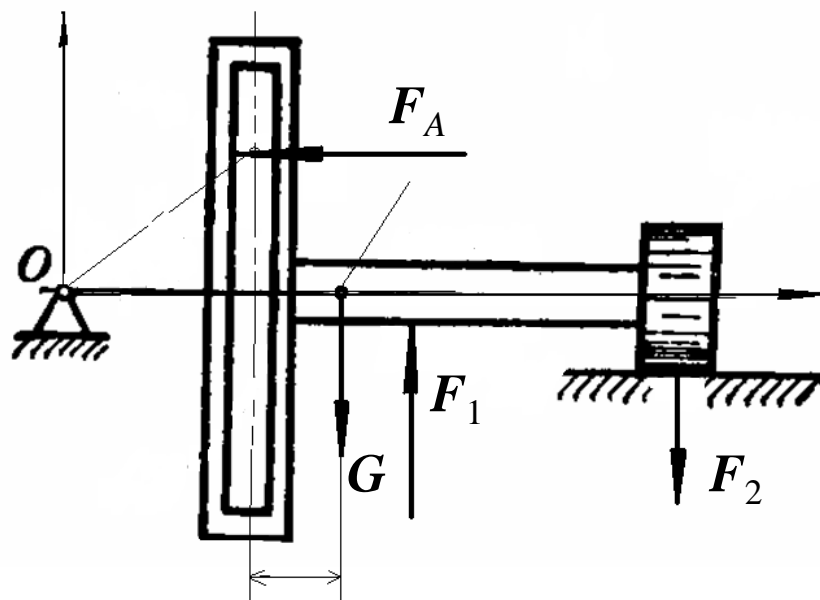
$$x = \overline{OA} \cdot \cos \omega t + l$$

求加速度

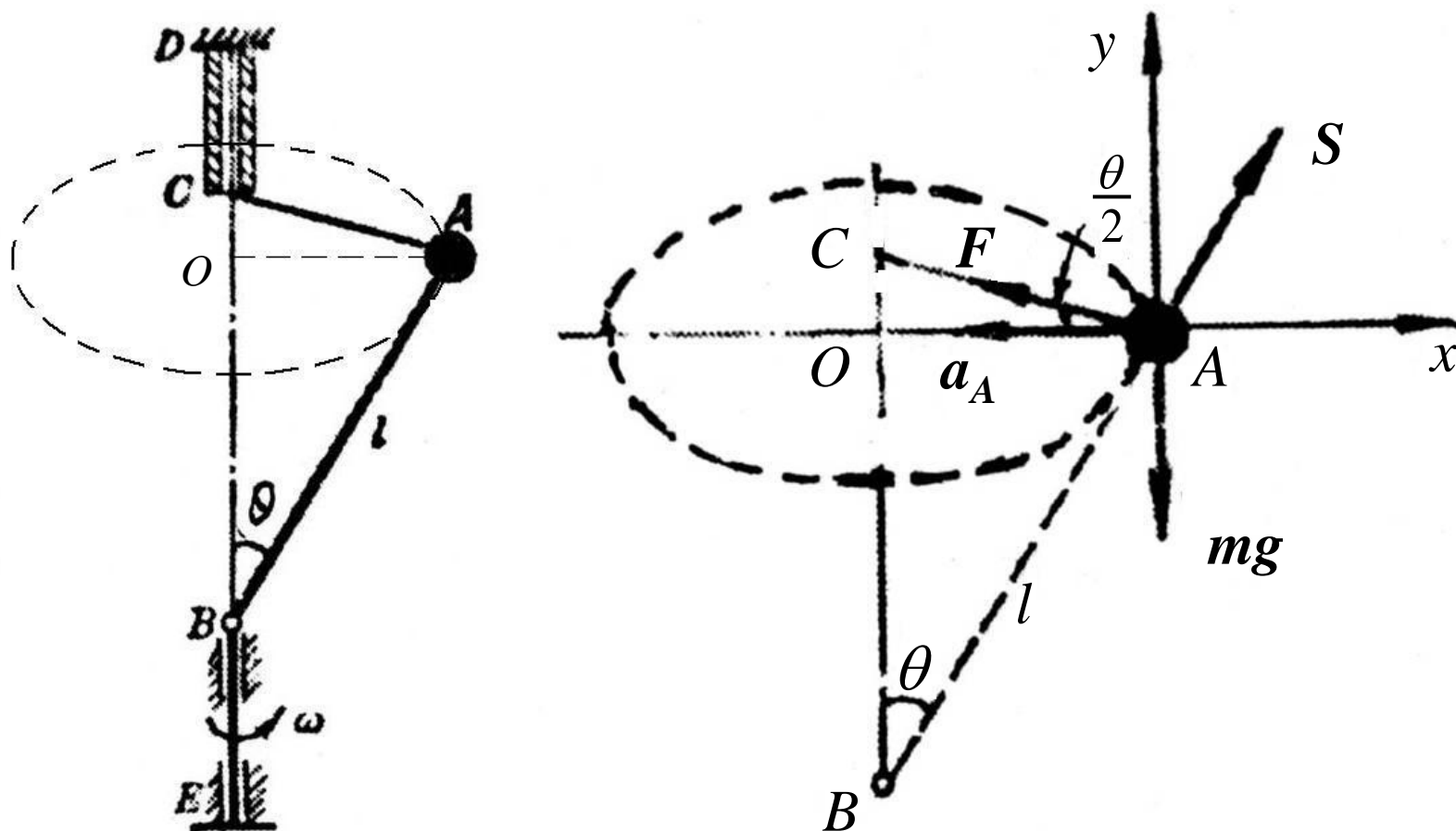
$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\overline{OA}\omega^2 \cos \omega t$$

由  $m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum F_x$  得

$$\begin{aligned} F_A &= m \cdot \overline{OA}\omega^2 \cos \omega t = 50 \times 0.3 \times \left( \frac{\pi \times 120}{30} \right)^2 \cos \omega t \\ &= 240 \cos \omega t \end{aligned}$$



**例2：** 离心式转速计工作原理如图所示。弹性细绳 $ACD$ 系住的小球质量为 $m$ 。弹性细绳的原长(未受力时的长度)为 $CD$ ，弹簧常数为 $k$ 。设 $AB=CB=l$ ，试求转速计稳定转动时，其转动轴的角速度 $\omega$ 与偏角 $\theta$ 的关系以及杆 $AB$ 所受的力。



解：取小球A为研究对象，分析受力。

求小球的加速度。

$$a_A = a_A^n = AB \sin \theta \cdot \omega^2 = l \sin \theta \cdot \omega^2$$

细绳的弹性力 $F$ 沿AC线，大小为

$$F = k \cdot CA = k \cdot 2l \sin \frac{\theta}{2}$$

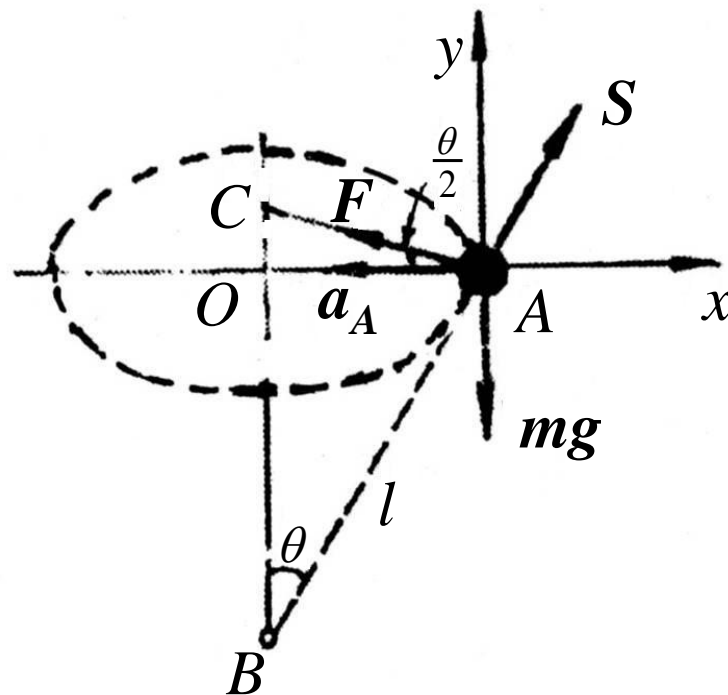
列出小球A的运动微分方程

$$ma_x = \sum F_x$$

$$S \sin \theta - F \cos \frac{\theta}{2} = -ma_A$$

$$ma_y = \sum F_y$$

$$S \cos \theta + F \sin \frac{\theta}{2} - mg = 0$$



即

$$S \sin \theta - 2kl \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} = -ml\omega^2 \sin \theta$$

$$S \cos \theta + 2kl \sin^2 \frac{\theta}{2} - mg = 0$$

如果 $\sin \theta \neq 0$ ，则由第一式可解得

$$S = l(k - m\omega^2)$$

故杆 $AB$ 所受的力的大小为，方向与 $S$ 相反。

再将 $S$ 的值代入第二式，注意到三角关系，可解得

$$\omega = \sqrt{\frac{kl - mg}{ml \cos \theta}}$$

系统稳定转动时的最小角速度为  $\omega_{\min} = \sqrt{\frac{kl - mg}{ml}}$



## 第一类问题解题步骤和要点:

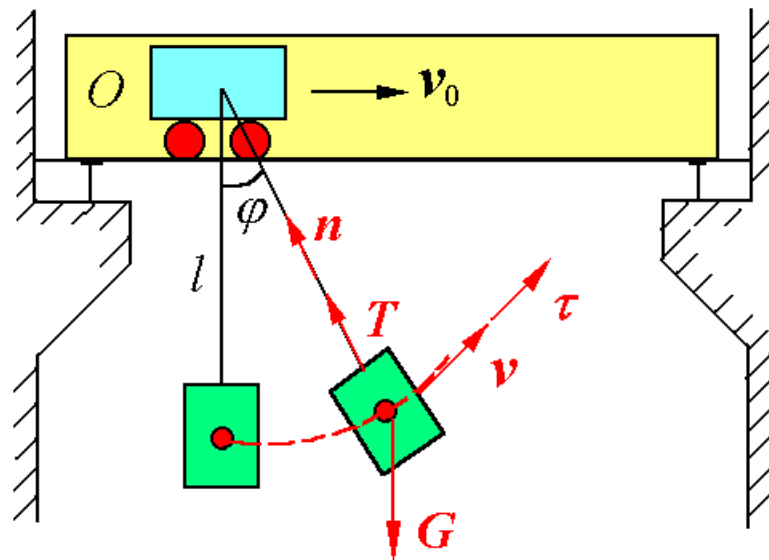
- ①正确选择研究对象（一般选择联系已知量和待求量的质点）。
- ②正确进行受力分析,画出受力图(应在一般位置上进行分析)。
- ③正确进行运动分析（分析质点运动的特征量）。
- ④选择并列适当形式的质点运动微分方程（建立坐标系）。
- ⑤求解未知量。

**课堂练习.** 桥式起重机跑车吊挂一重为 $G$ 的重物，沿水平横梁作匀速运动，速度为 $\bar{v}_0$ ，重物中心至悬挂点距离为 $L$ 。突然刹车，重物因惯性绕悬挂点 $O$ 向前摆动，求钢丝绳的最大拉力。

解：①选重物(抽象为质点)为研究对象

②受力分析如图所示

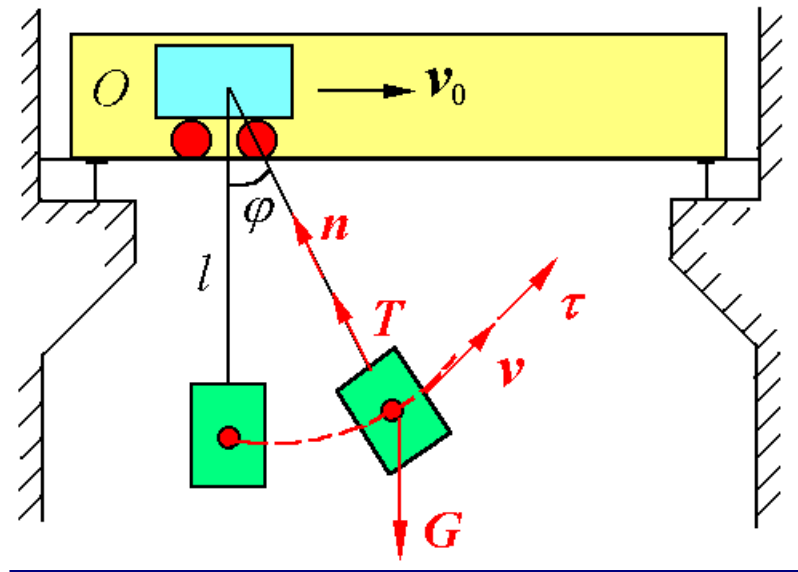
③运动分析，沿以 $O$ 为圆心， $L$ 为半径的圆弧摆动。



④列出自然形式的质点运动微方程

$$ma_{\tau} = \sum F_{\tau}, \quad \frac{G}{g} \frac{dv}{dt} = -G \sin \varphi \quad <1>$$

$$ma_n = \sum F_n, \quad \frac{G}{g} \frac{v^2}{l} = T - G \cos \varphi \quad <2>$$



⑤求解未知量

由<2>式得  $T = G(\cos \varphi + \frac{v^2}{gl})$ ,

其中  $\varphi, v$  为变量. 由<1>式知 重物作减速运动, 因此  $\varphi=0$  时,  $T=T_{\max}$

$$T_{\max} = G(1 + \frac{v_0^2}{gl})$$

**[注]**①减小绳子拉力途径: 减小跑车速度或者增加绳子长度。

②拉力  $T_{\max}$  由两部分组成, 一部分等于物体重量, 称为静拉力  
一部分由加速度引起, 称为附加动拉力。全部拉力称为动拉力。



## 2. 第二类：已知作用在质点上的力，求质点的运动（积分问题）

已知的作用力可能是常力，也可能是变力。变力可能是时间、位置、速度或者同时是上述几种变量的函数。

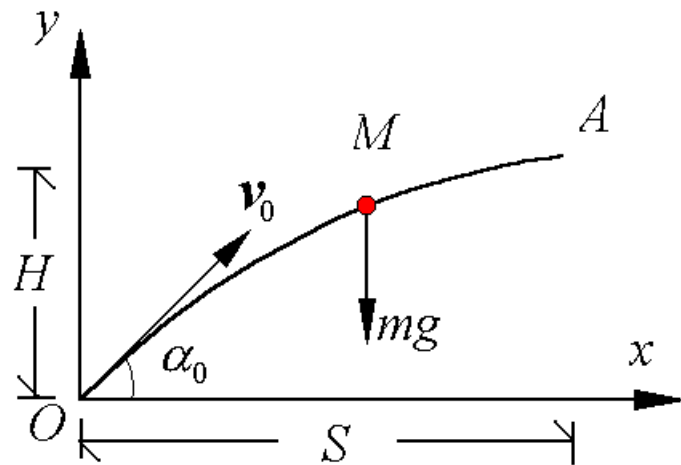
如力是常量或是时间及速度函数时，

可直接分离变量  $\frac{dv}{dt}$  积分

如力是位置的函数，需进行变量置换

$\frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{ds}$ ，再分离变量积分。

**例3** 煤矿用填充机进行填充, 为保证充填材料抛到距离为 $S=5$ 米, $H=1.5$ 米的顶板A处。求 (1) 充填材料需有多大的初速度 $v_0$ ? (2) 初速 $\bar{v}_0$  与水平的夹角 $\alpha_0$ ?



**解:** 属于已知力为常量的第二类问题。

选择填充材料 $M$ 为研究对象, 受力如图所示,  $M$ 作斜抛运动。

列直角坐标形式的质点运动微分方程并对其积分运算

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ m \frac{dv_y}{dt} = -mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = c_1 \\ \frac{dy}{dt} = -gt + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = c_1 t + c_3 \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + c_2 t + c_4 \end{cases}$$

微分方程

积分一次

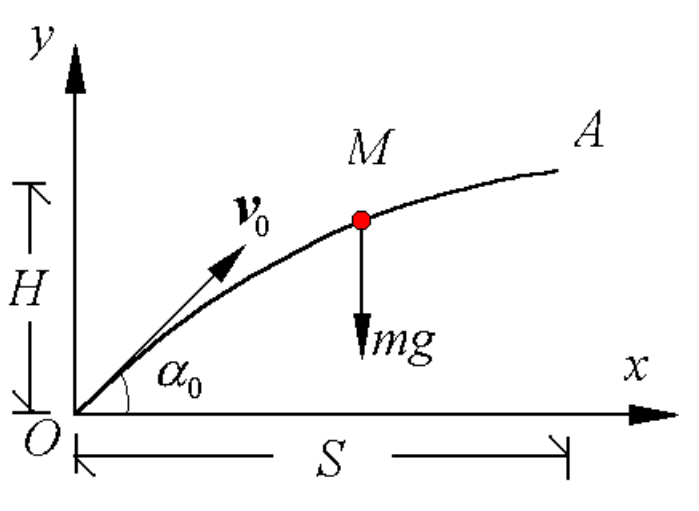
再积分一次

初始条件:

$t=0, x_0=0, y_0=0; v_{0x}=v_0 \cos \alpha_0, v_{0y}=v_0 \sin \alpha_0, v_0, \alpha_0$  待求

代入初始条件得:  $c_1=v_0 \cos \alpha_0, c_2=v_0 \sin \alpha_0, c_3=c_4=0$

则运动方程为:  $x=v_0 t \cos \alpha_0, y=v_0 t \sin \alpha_0 - \frac{1}{2} g t^2$



则轨迹方程为:

$$y = x \tan \alpha_0 - \frac{1}{2} g \frac{x_0^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha_0}$$

**约束条件:**  $t$  瞬时,  $M \rightarrow A$ ,  $x=S$ ,  $y=H$ ,  $v_x$ ,  $v_y$

代入最高点A处值, 得:  $\frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha_0 - gt = 0$ , 即  $t = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g}$

将到达A点时的时间  $t$ ,  $x=S$ ,  $y=H$  代入运动方程, 得

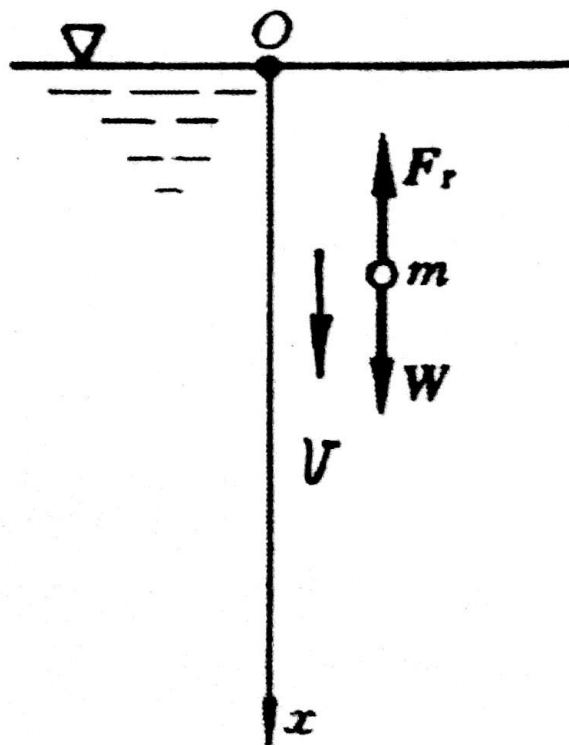
$$v_0 \cos \alpha_0 = \frac{sg}{\sqrt{2gH}} \quad v_0 \sin \alpha_0 = \sqrt{2gH}$$

发射初速度大小与初发射角  $\alpha_0$  为

$$v_0 = \sqrt{(v_0 \cos \alpha_0)^2 + (v_0 \sin \alpha_0)^2} = \sqrt{\frac{g^2 s^2}{2gH} + 2gH} = 10.5 \text{ m/s}$$

$$\alpha_0 = \text{tg}^{-1} \frac{v_0 \sin \alpha_0}{v_0 \cos \alpha_0} = \text{tg}^{-1} \frac{2H}{s} = 31^\circ$$

**例4：** 求质量为 $m$ 的质点 $M$ 在粘性介质中自由下落的运动方程。设质点受到的阻尼力 $F_r = -cv$ ， $c$ 称为粘度系数，简称粘度。初始时质点在介质表面上被无初速度释放。





解：取质点 $M$ 为研究对象，作用其上的力有重力和介质阻力，均为已知，求质点的运动，属于动力学第二类问题。

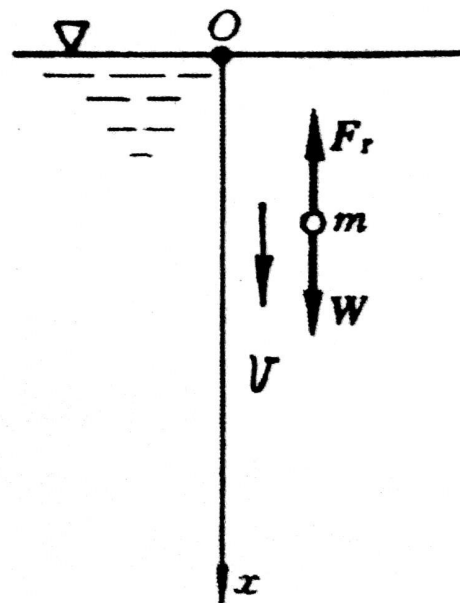
在任意位置上，有

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - c \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{v'}{g} \frac{d^2 x}{dt^2} = v' - \frac{dx}{dt} \quad \text{或} \quad \frac{v'}{g} \frac{dv}{dt} = v' - v$$

$$v' = \frac{mg}{c}$$

本题中力是速度的函数，采用变量分离法，考虑运动初始条件： $t=0$ ， $x_0=0$ ， $v_0=0$ ，对上式积分一次



有

$$\int_0^v \frac{1}{v' - v} dv = \int_0^t \frac{g}{v'} dt$$

$$\ln \frac{v' - v}{v'} = -\frac{g}{v'} t \quad \text{即} \quad e^{-\frac{g}{v'} t} = \frac{v' - v}{v'}$$

于是

$$\frac{dx}{dt} = v = v'(1 - e^{-\frac{g}{v'} t})$$

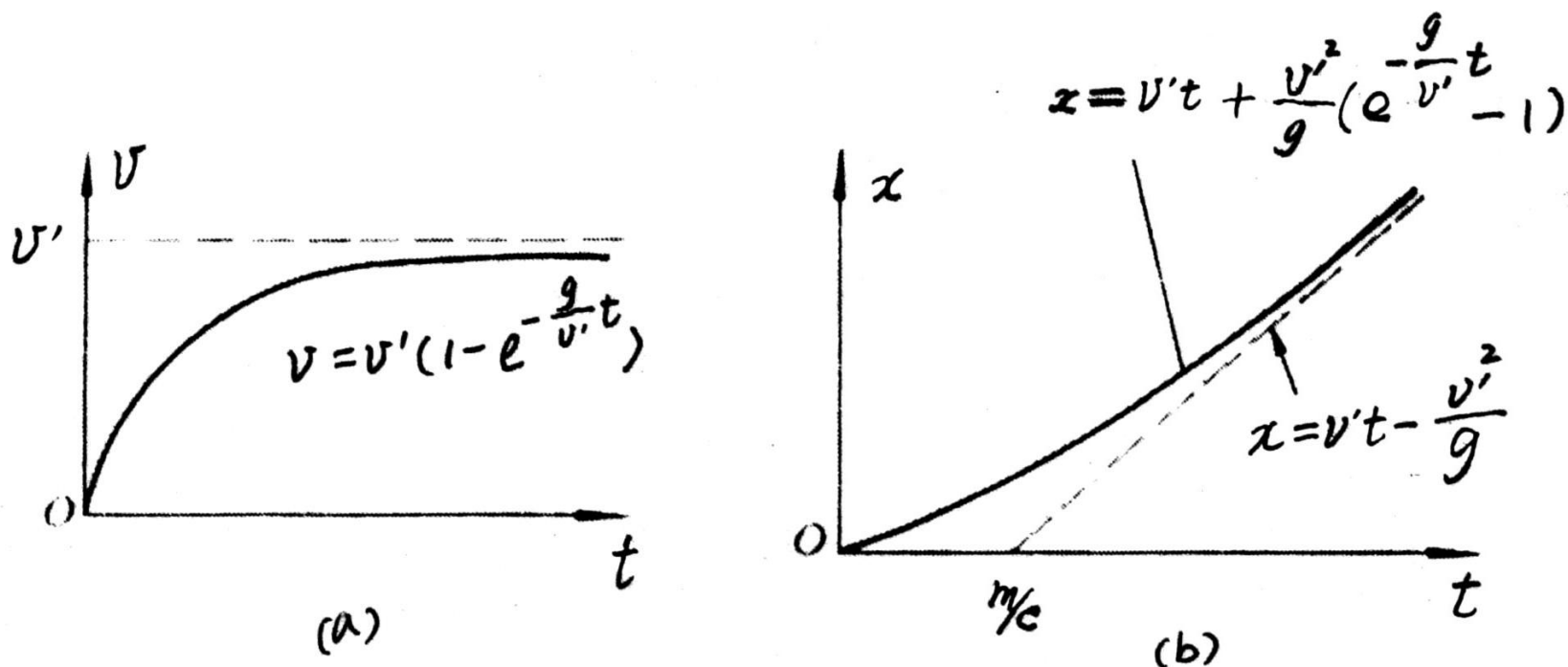
分离变量，  
再积分一次

$$\int_0^x dx = \int_0^t v'(1 - e^{-\frac{g}{v'} t}) dt$$

质点的运  
动方程

$$x = v't + \frac{v'^2}{g} (e^{-\frac{g}{v'} t} - 1)$$

质点开始做加速运动，速度增大，随着时间的增加，质点其与速度方向相同的加速度逐渐减小。当  $t \rightarrow \infty$  时，速度图形趋于一渐近线，即质点的速度趋于常数。



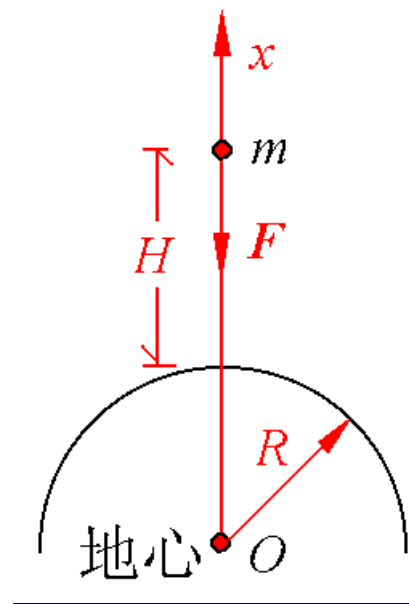
此速度为质点在阻尼介质中运动的**极限速度**。跳伞运动员着地时的速度即可由该式求出。

**例5** 发射火箭，求脱离地球引力的最小速度。

**解：** 属于已知力是位置的函数的第二类问题。

取火箭(质点)为研究对象, 建立坐标如图示。

火箭在任意位置 $x$ 处受地球引力 $\mathbf{F}$ 的作用。



$$F = f \cdot \frac{mM}{x^2} \quad \because mg = f \frac{mM}{R^2} \quad \therefore F = \frac{mgR^2}{x^2}$$

建立质点运动微分方程

$$m \frac{dx^2}{dt^2} = -\frac{mgR^2}{x^2}$$

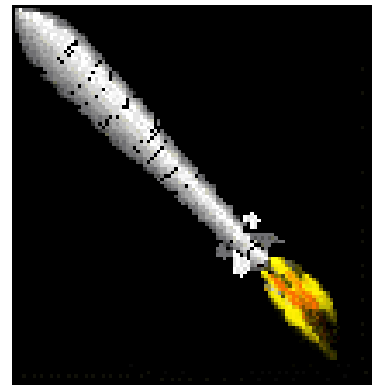
即：

$$mv_x \frac{dv_x}{dx} = -\frac{mgR^2}{x^2} \quad \left( \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{v_x dv_x}{dx} \right)$$

$$\therefore \int_{v_0}^v mv_x dv_x = \int_R^x -\frac{mgR^2}{x^2} dx \quad (t=0 \text{ 时 } x=R, v_x=v_0)$$

则在任意位置时的速度

$$v = \sqrt{(v_0^2 - 2gR) + \frac{2gR^2}{x}}$$



$$v = \sqrt{(v_0^2 - 2gR) + \frac{2gR^2}{x}}$$

可见， $v$  随着  $x$  的增加而减小。若  $v_0^2 < 2gR$  则在某一位置  $x = R + H$  时速度将减小到零，火箭回落。若  $v_0^2 > 2gR$  时，无论  $x$  多大（甚至为  $\infty$ ），火箭也不会回落。因此脱离地球引力而去不返时（ $x \rightarrow \infty$ ）的最小初速度

$$v_0 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 10^{-3} \times 6370} = 11.2 \text{ (km/s)} \quad (\text{第二宇宙速度})$$

第二类问题解题步骤如下：

①正确选择研究对象。

②正确进行受力分析，画出受力图。

判断力是什么性质的力（应放在一般位置上进行分析，对变力建立力的表达式）。

③正确进行运动分析。

除应分析质点的运动特征外，还要确定出其运动初始条件。



④选择并列出适当的质点运动微分方程。

⑤求解未知量。应根据力的函数形式决定如何积分，并利用运动的初始条件，求出质点的运动。

如力是常量或是时间及速度函数时，

可直接分离变量  $\frac{dv}{dt}$  积分

如力是位置的函数，需进行变量置换

$\frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{ds}$ ，再分离变量积分。

## § 6-2 非惯性参考系中的质点动力学

### 一. 基本方程

对于动参考系  $O'x'y'z'$

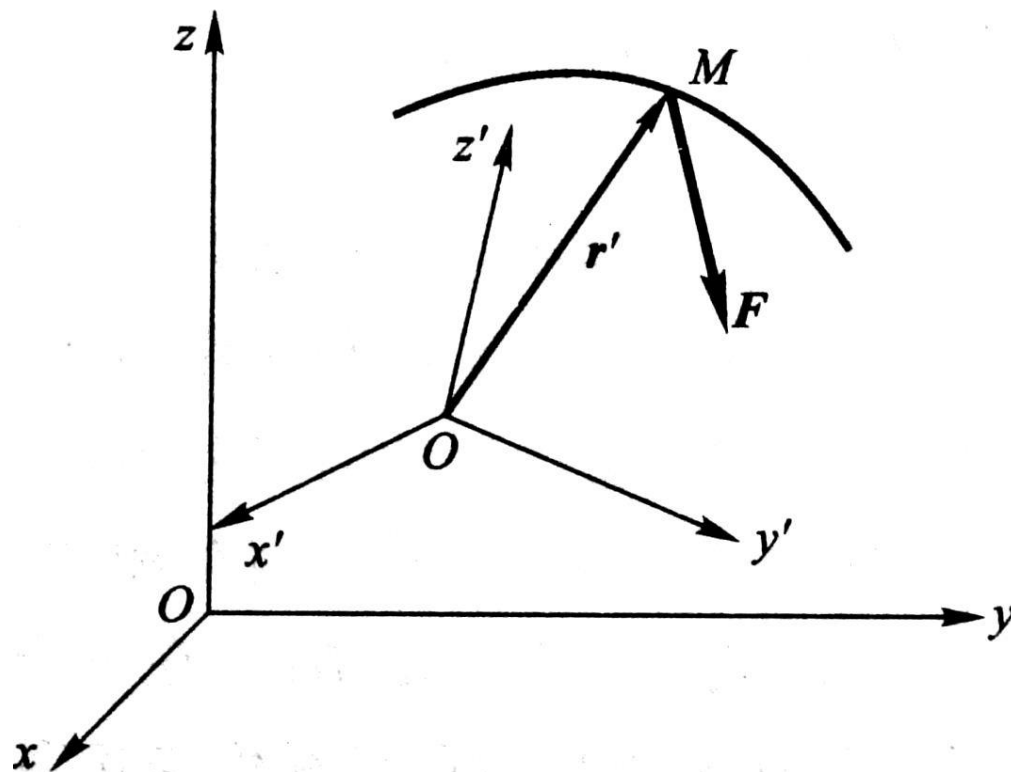
$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_C$$

将上式代入牛顿第二定律

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m(\mathbf{a}_r + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_C)$$

或表示为

$$m\mathbf{a}_r = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_e - m\mathbf{a}_C$$





令：  $F_{Ie} = -ma_e$ ，  $F_{IC} = -ma_c$ ， 分别称为牵连惯性力和科氏惯性力。

质点相对运动的动力学方程。

$$ma_r = F + F_{Ie} + F_{IC}$$

质点相对运动微分方程

$$m \frac{d^2 r'}{dt^2} = F + F_{Ie} + F_{IC}$$

当非惯性参考系作平动时，

$$m\mathbf{a}_r = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{Ie}$$

当非惯性参考系作匀速直线平动时，

$$m\mathbf{a}_r = \mathbf{F}$$

即质点的相对运动动力学方程与绝对运动动力学方程完全相同。

**古典力学的相对性原理：** 在一个系统内部所做的任何力学试验，都不能确定这一系统是静止的还是在作匀速直线平动。

也称为伽利略、牛顿相对性原理。

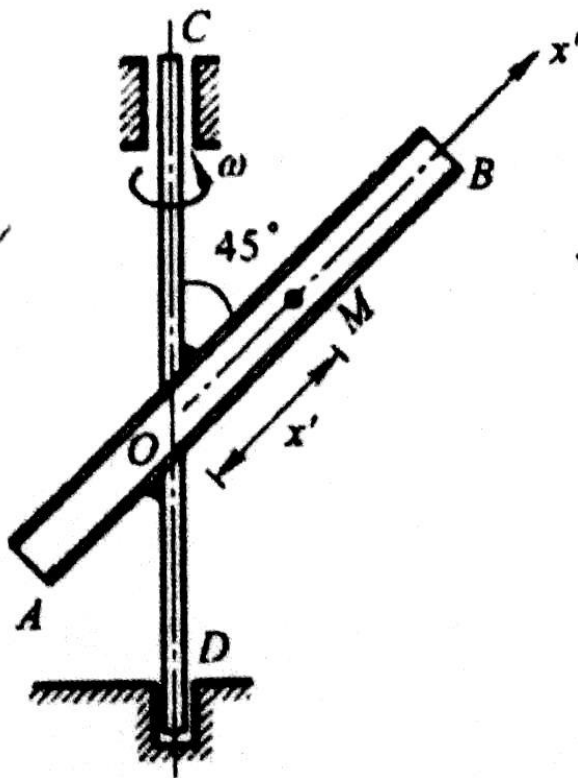
当质点相对于动参考系作匀速直线运动时，

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{Ie}} + \mathbf{F}_{\text{IC}} = 0$$

当质点相对于动参考系静止不动时，

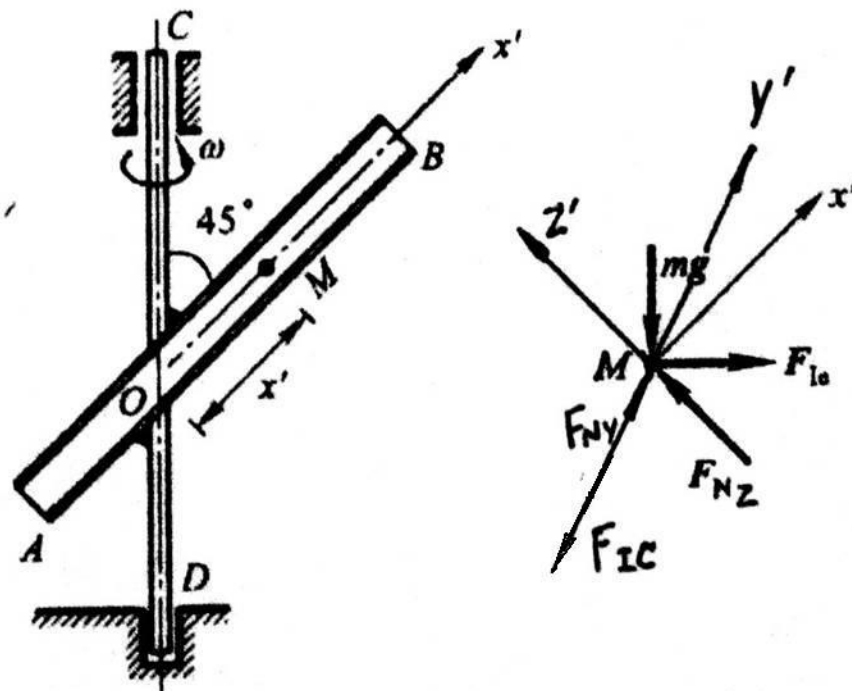
$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{Ie}} = 0$$

**例6** 固定在铅垂杆 $CD$ 上的直管 $AB$ 绕轴线以匀角速度 $\omega$ 转动，直管轴线与转动轴成 $45^\circ$ 角，管内有一小球由相对静止状态开始运动。设小球的起始位置到 $O$ 点的距离为 $a$ 。忽略摩擦，求小球沿直管的运动方程。



解：取小球为研究对象

质点的相对运动动力学方程在 $x'$ 方向的投影式为



$$m\ddot{x}' = -mg \frac{\sqrt{2}}{2} + F_{le} \frac{\sqrt{2}}{2} = -mg \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} x' m \omega^2$$

$$\ddot{x}' - \frac{\omega^2}{2} x' = -\frac{g}{\sqrt{2}}$$

该微分方程的解可表示为  $x' = x'_1 + x'_2$

其中  $x'_1$  为 (a) 式的齐次方程  $\ddot{x}' - \frac{\omega^2}{2} x' = 0$  的解

$$x'_1 = c_1 e^{-\frac{\omega t}{\sqrt{2}}} + c_2 e^{\frac{\omega t}{\sqrt{2}}}$$

$x'_2$  为 (a) 式的非齐次方程的特解

$$x'_2 = \frac{g}{\sqrt{2}} \frac{2}{\omega^2} = \frac{\sqrt{2}g}{\omega^2}$$

于是

$$x' = x'_1 + x'_2 = c_1 e^{-\frac{\omega t}{\sqrt{2}}} + c_2 e^{\frac{\omega t}{\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{2}g}{\omega^2}$$

根据初始条件 $t=0$ ,  $x_0' = a, \dot{x}_0' = 0$  得

$$x_0' = a = c_1 + c_2 + \frac{\sqrt{2}g}{\omega^2} \quad \dot{x}_0' = 0 = -\frac{\omega}{\sqrt{2}}c_1 + \frac{\omega}{\sqrt{2}}c_2$$

解得

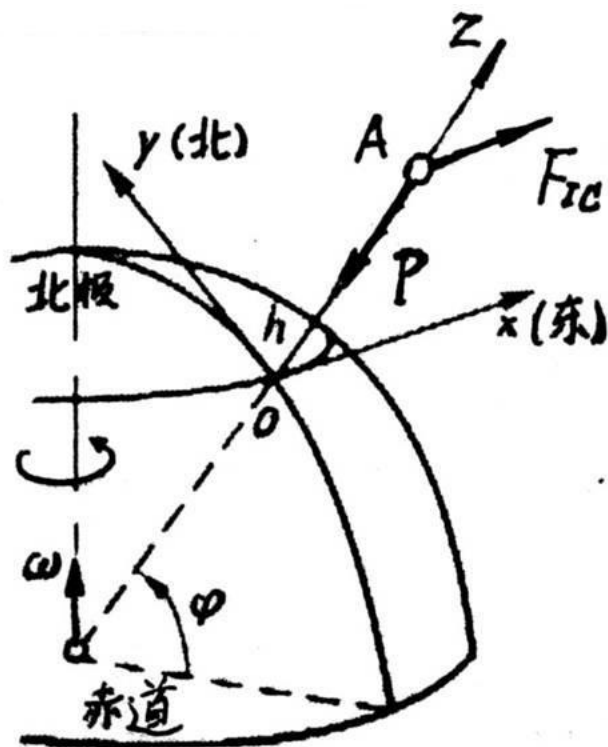
$$c_1 = c_2 = \frac{1}{2}\left(a - \frac{\sqrt{2}g}{\omega^2}\right)$$

故

$$x' = \frac{1}{2}\left(a - \frac{\sqrt{2}g}{\omega^2}\right)(e^{-\frac{\omega}{\sqrt{2}}t} + e^{\frac{\omega}{\sqrt{2}}t}) + \frac{\sqrt{2}g}{\omega^2}$$

## 二. 质点相对地球的运动

**例7** 北京位于地球表面北纬 $\varphi=40^\circ$ 处，在北京的上空 $h=100\text{m}$ 处有一质量为 $m$ 的质点自由下落，求由于地球自转的影响，落体到达地面时对于铅垂线的偏离量。（落体偏东现象）





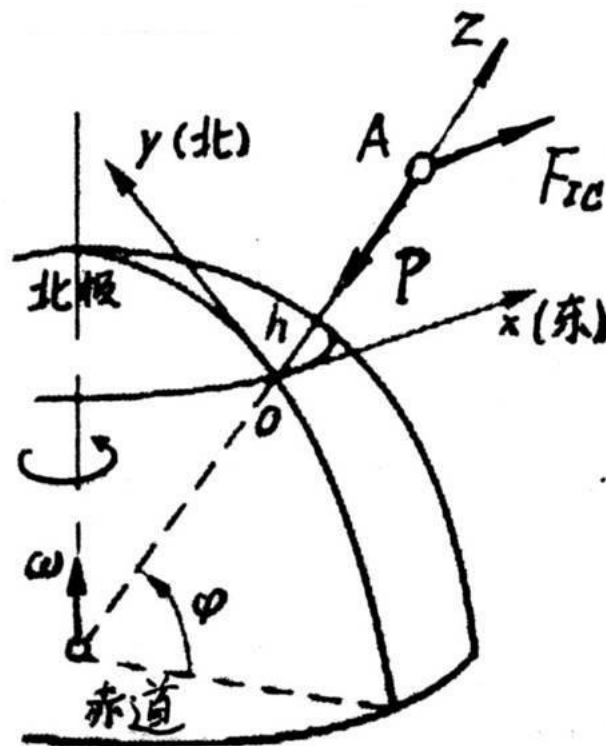
解：选取固结于地球的非惯性参考系为 $Oxyz$ ，其中 $z$ 轴近似通过地球中心，铅直向上， $x$ 轴水平向东， $y$ 轴水平向北。

质点的受力有：地球引力 $F$ ；

分析质点相对地球的运动时，应再加上牵连惯性力 $F_{Ie}$ 和科氏惯性力 $F_{IC}$ 。

其中地球引力 $F$ 和牵连惯性力 $F_{Ie}$ 之和，就是物体在地球表面表现出的重力 $P$ ，即

$$P = F + F_{Ie} = mg$$



科氏惯性力  $\mathbf{F}_{\text{IC}} = -m\mathbf{a}_C = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$

$$= -2m \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \omega \cos \varphi & \omega \sin \varphi \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$$

$$= 2m\omega [(\dot{y} \sin \varphi - \dot{z} \cos \varphi)\mathbf{i} - \dot{x} \sin \varphi \mathbf{j} + \dot{x} \cos \varphi \mathbf{k}]$$

质点的相对运动微分方程

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{P} + \mathbf{F}_{\text{IC}}$$

投影形式为

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= 2m\omega(\dot{y} \sin \varphi - \dot{z} \cos \varphi) \\ m\ddot{y} &= -2m\omega\dot{x} \sin \varphi \\ m\ddot{z} &= -mg + 2m\omega\dot{x} \cos \varphi \end{aligned} \right\}$$

采用逐次近似法解上述微分方程。

由于地球自转的角速度很小，在最初的计算中，可取

$$\omega = 0$$

则式(1)的零次近似方程为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= 0 \\ \ddot{y} &= 0 \\ \ddot{z} &= -g \end{aligned} \right\}$$

初始条件为， $t = 0$  时

$$\dot{x} = 0, \dot{y} = 0, \dot{z} = 0$$

$$x = 0, y = 0, z = h$$

积分一次得零次近似的速度

$$\dot{x} = 0$$

$$\dot{y} = 0$$

$$\dot{z} = -gt$$

代入式(1)，得一次近似的  
微分方程

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega g t \cos \varphi \\ \ddot{y} &= 0 \\ \ddot{z} &= -g \end{aligned} \right\}$$

上式积分一次，得一次近似速度

$$\dot{x} = \omega g t^2 \cos \varphi$$

$$\dot{y} = 0$$

$$\dot{z} = -gt$$

再积分一次，得一次近似的运动方程为

$$x = \frac{1}{3} \omega g t^3 \cos \varphi$$

$$y = 0$$

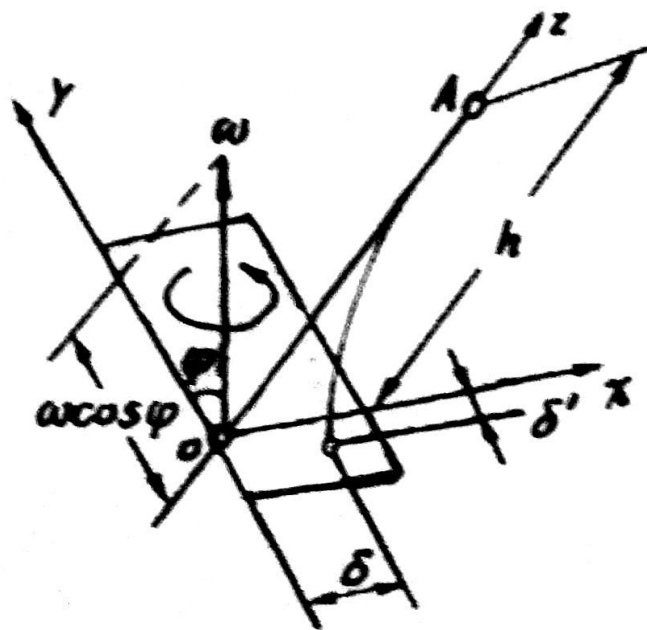
$$z = h - \frac{1}{2} g t^2$$

即：落体已不再沿 $z$ 轴下落，而在 $x$ 方向有偏离，偏距与时间 $t$ 的三次方成正比。因此，下落距离愈大，偏距也就愈大。

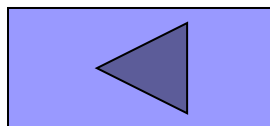
如果  $\mu = 40^\circ$   $h = 100$  m

$$\delta = \frac{1}{3} \omega g t^3 \cos \mu = \frac{1}{3} \omega g \left( \frac{2h}{g} \right)^{\frac{3}{2}} \cos \mu$$

$$= \frac{1}{3} \omega \sqrt{\frac{8h^3}{g}} \cos \mu = 1.68 \text{ cm}$$



# 第六章结束



# 理论力学

## 第十章 动量定理

# 动力学普遍定理概述

对**质点**动力学问题：建立质点运动微分方程求解。

对**质点系**动力学问题：理论上讲， $n$ 个质点列出 $3n$ 个微分方程，联立求解它们即可。

实际上的问题是：1. 联立求解微分方程(尤其是积分问题)非常困难。

2. 大量的问题中，不需要了解每一个质点的运动,仅需要研究质点系整体的运动情况。

从本章起,将要讲述解答动力学问题的其它方法,而首先要讨论的是**动力学普遍定理**(包括动量定理、动量矩定理、动能定理及由此推导出来的其它一些定理)。



它们以简明的数学形式，表明两种量——一种是同运动特征相关的量(动量、动量矩、动能等)，一种是同力相关的量(冲量、力矩、功等)——之间的关系，从不同侧面对物体的机械运动进行深入的研究。在一定条件下，用这些定理来解答动力学问题非常方便简捷。

本章中研究质点和质点系的动量定理，建立了动量的改变与力的冲量之间的关系，并研究质点系动量定理的另一重要形式——质心运动定理。

## § 10-1 质点系的质心·内力与外力

### 一、质点系的质心

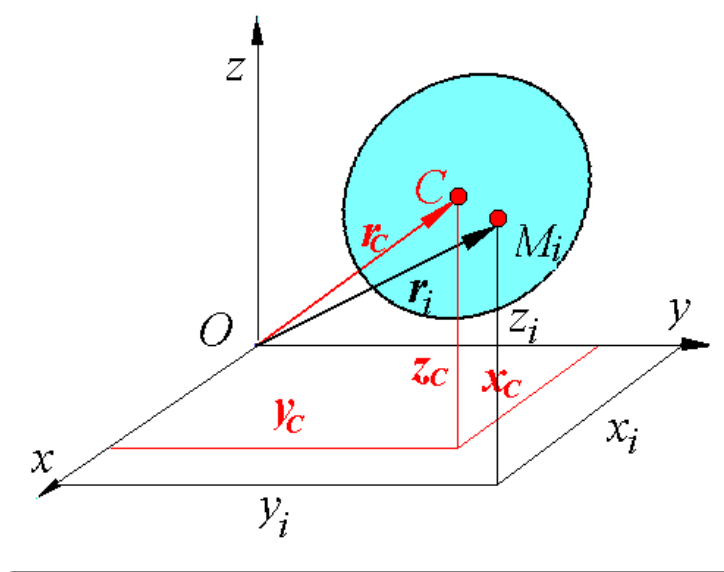
质点系的质量中心称为质心。是表征质点系质量分布情况的一个重要概念。

质心  $C$  点的位置:  $(m = \sum m_i)$

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}$$

设  $\vec{r}_C = x_C \vec{i} + y_C \vec{j} + z_C \vec{k}$ , 则

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{m}, \quad y_C = \frac{\sum m_i y_i}{m}, \quad z_C = \frac{\sum m_i z_i}{m}$$



在均匀重力场中，质点系的质心与重心的位置重合。可采用确定重心的各种方法来确定质心的位置。但是，质心与重心是两个不同的概念，质心比重心具有更加广泛的力学意义。

## 二、质点系的内力与外力

外力：质点系以外的物体作用于该质点系中各质点的力。

内力：质点系内各质点之间相互作用的力。

对整个质点系来讲，内力系的主矢恒等于零，

内力系对任一点（或轴）的主矩恒等于零。即：

$$\sum \bar{F}_i^{(i)} = 0; \quad \sum \bar{M}_O(\bar{F}_i^{(i)}) = 0 \quad \text{或} \quad \sum M_x(\bar{F}_i^{(i)}) = 0$$

## § 10-2 动量与冲量

### 一、动量

1. 质点的动量：质点的质量与速度的乘积  $mv$  称为质点的动量。动量是瞬时矢量(状态量)，方向与  $v$  相同。单位是  $\text{kg}\cdot\text{m/s}$ 。

动量是度量物体机械运动强弱程度的一个物理量。

例：枪弹：速度大，质量小； 船：速度小，质量大。

2. 质点系的动量：质点系中所有各质点动量的矢量和。

$$\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i = m \vec{v}_C \quad (\sum m_i \vec{r}_i = m \vec{r}_C \text{ 求导})$$

质点系动  
量的主矢

质点系的动量等于质点系的质量与其质心速度的乘积。则：

$$P_x = mv_{Cx} = m\dot{x}_C, \quad P_y = mv_{Cy} = m\dot{y}_C, \quad P_z = mv_{Cz} = m\dot{z}_C$$

3. 刚体系统的动量：设第*i*个刚体为  $m_i, \vec{v}_{Ci}$ ，则整个系统：

刚体系统动  
量的主矢

$$\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_{Ci}$$



$$P_x = \sum m_i v_{Cix} = \sum m_i \dot{x}_{Ci}$$

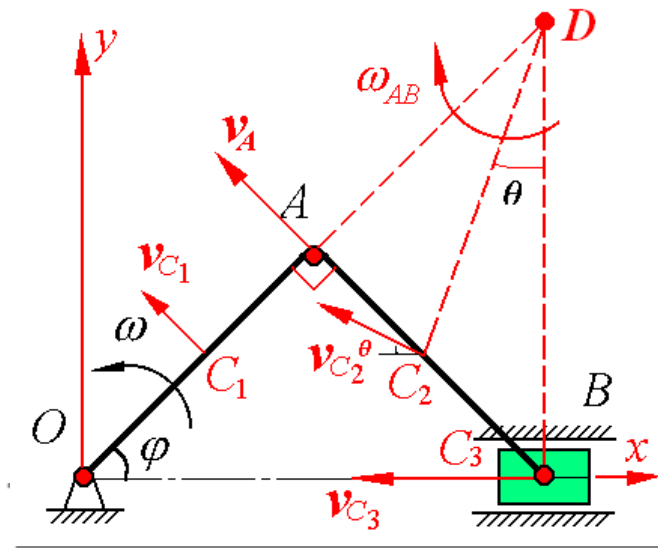
$$P_y = \sum m_i v_{Ciy} = \sum m_i \dot{y}_{Ci}$$

$$P_z = \sum m_i v_{Ciz} = \sum m_i \dot{z}_{Ci}$$

**特别  
注意**

无论是质点系还是刚体系统，动量的主矢不能理解为作用在系统的质心上。

[例 1] 曲柄连杆机构的曲柄 $OA$ 以匀 $\omega$ 转动, 设 $OA=AB=l$ , 曲柄 $OA$ 及连杆 $AB$ 都是匀质杆, 质量各为 $m$ , 滑块 $B$ 的质量也为 $m$ 。求当 $\varphi=45^\circ$ 时系统的动量。



解: 曲柄 $OA$ :  $m$ ,  $v_{C_1} = \frac{1}{2}l\omega$

滑块 $B$ :  $m$ ,  $v_{C_3} = \sqrt{2}l\omega$

连杆 $AB$ :  $m$ ,  $v_{C_2} = \frac{\sqrt{5}}{2}l\omega_{AB} = \frac{\sqrt{5}}{2}l\omega$  ( $D$ 为速度瞬心,  $\omega_{AB} = \omega$ ;  $DC_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}l$ )

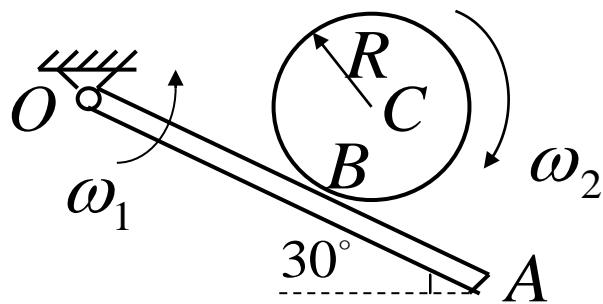
$$\vec{P} = m\vec{v}_{C_1} + m\vec{v}_{C_2} + m\vec{v}_{C_3} = \sqrt{2}ml\omega[-2\bar{i} + \frac{1}{2}\bar{j}]$$

$$= m[(-v_{C_1} \sin \varphi - v_{C_2} \cos \theta - v_{C_3})\bar{i} + (v_{C_1} \cos \varphi + v_{C_2} \sin \theta)\bar{j}]$$

$$= m[(-\frac{1}{2}l\omega \sin 45^\circ - \frac{\sqrt{5}}{2}l\omega \cos \theta - \sqrt{2}l\omega)\bar{i} + (\frac{1}{2}l\omega \cos 45^\circ + \frac{\sqrt{5}}{2}l\omega \sin \theta)\bar{j}]$$

$$= ml\omega[(-\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{3}{\sqrt{10}} - \sqrt{2})\bar{i} + (\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{10}})\bar{j}]$$

[例2]  $OA$ 杆绕 $O$ 轴逆时针转动，均质圆盘沿 $OA$ 杆纯滚动。已知圆盘的质量 $m$ 为20kg，半径 $R=100\text{mm}$ 。在图示位置时， $OA$ 杆的倾角为 $30^\circ$ ，其角速度 $\omega_1=1\text{rad/s}$ ，圆盘相对 $OA$ 杆转动的角速度 $\omega_2=4\text{rad/s}$ ， $OB=100\sqrt{3}\text{mm}$ ，求圆盘的动量。



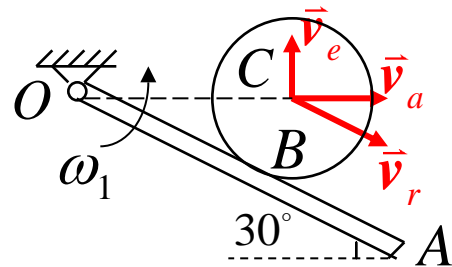
解：取 $C$ 为动点，动系与 $OA$ 固连

$$v_e = OC \cdot \omega_1 = 0.2 \times 1 = 0.2 \text{ m/s}$$

$$v_r = R\omega_2 = 0.1 \times 4 = 0.4 \text{ m/s}$$

于是 
$$v_C = v_a = v_r \sin 60^\circ = 0.4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.3464 \text{ m/s}$$

所以 
$$P = mv_C = 20 \times 0.3464 = 6.93 \text{ N} \cdot \text{s} \quad \text{方向水平向右。}$$



[例3]两均质杆 $OA$ 和 $AB$ 质量为 $m$ ，长为 $l$ ，铰接于 $A$ 。图示位置时， $OA$ 杆的角速度为 $\omega$ ， $AB$ 杆相对 $OA$ 杆的角速度亦为 $\omega$ 。求此瞬时系统的动量。

解：由刚体系统的动量公式

$$\vec{P} = m_1 \vec{v}_{C_1} + m_2 \vec{v}_{C_2}$$

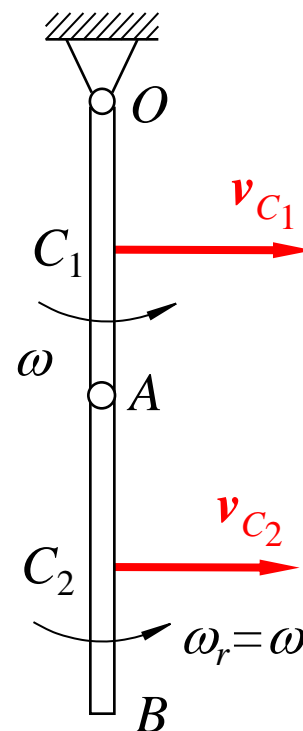
其中：

$$v_{C_1} = \frac{l}{2} \omega$$

$$AB \text{ 作平面运动 } \vec{v}_{C_2} = \vec{v}_A + \vec{v}_{C_2A}$$

$$v_{C_2} = l\omega + \frac{l}{2} 2\omega = 2l\omega$$

$$P = m \frac{l}{2} \omega + m 2l\omega = \frac{5}{2} ml\omega \quad \text{方向水平向右。}$$





## 二、冲量

力与其作用时间的乘积称为力的冲量，冲量表示力在其作用时间内对物体作用的累积效应的度量(过程量)。例如，推动车子时，较大的力作用较短的时间，与较小的力作用较长的时间，可得到同样的总效应。

1. 力  $\vec{F}$  是常矢量:  $\vec{I} = \vec{F}(t_2 - t_1)$

2. 力  $\vec{F}$  是变矢量: (包括大小和方向的变化)

元冲量  $d\vec{I} = \vec{F} dt$

冲量  $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x \, dt, I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y \, dt, I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z \, dt,$$

3. 合力的冲量：等于各分力冲量的矢量和。

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_R \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F} \, dt = \sum \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \, dt = \sum \vec{I}_i$$

冲量的单位：N·s = kg·m/s<sup>2</sup>·s = kg·m/s 与动量单位相同。

## § 10-3 动量定理

### 一、质点的动量定理

$$m\bar{a} = m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} \quad \boxed{\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \bar{F}}$$

质点的动量对时间的导数等于作用于质点的力——质点的动量定理

微分形式：  $d(m\bar{v}) = \bar{F} dt = d\bar{I}$  （动量的微分等于力的元冲量）

积分形式：  $m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F} dt = \bar{I}$

（在某一时间间隔内，动量的增量等于力在该时间内的冲量）

投影形式: 
$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(mv_x) = F_x \\ \frac{d}{dt}(mv_y) = F_y \\ \frac{d}{dt}(mv_z) = F_z \end{cases} \begin{cases} mv_{2x} - mv_{1x} = I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt \\ mv_{2y} - mv_{1y} = I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt \\ mv_{2z} - mv_{1z} = I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z dt \end{cases}$$

质点的动量守恒

若  $\bar{F} = 0$ ，则  $m\bar{v} = \text{常矢量}$ ，质点作惯性运动

若  $F_x = 0$ ，则  $mv_x = \text{常量}$ ，质点沿  $x$  轴的运动是惯性运动

## 二、质点系的动量定理

对质点系内任一质点  $i$ ，
$$\frac{d}{dt}(m_i \bar{v}_i) = \bar{F}_i^{(i)} + \bar{F}_i^{(e)}$$

对整个质点系: 
$$\sum \frac{d}{dt}(m_i \bar{v}_i) = \sum \bar{F}_i^{(i)} + \sum \bar{F}_i^{(e)} \quad (\text{而} \sum \bar{F}_i^{(i)} = 0)$$

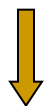
改变求和与求  
导次序，则得

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = \sum \bar{F}_i^{(e)}$$

质点系的动量定理

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = \sum \bar{F}_i^{(e)}$$

质点系动量对时间的导数等于作用在质点系上所有外力的矢量和。



质点系动量定理的两种形式

微分形式

$$d\bar{P} = \sum \bar{F}_i^{(e)} dt = \sum d\bar{I}_i^{(e)}$$

质点系动量的微分等于作用在质点系上所有外力元冲量的矢量和。

积分形式

$$\bar{P}_2 - \bar{P}_1 = \sum \bar{I}_i^{(e)}$$

在某一时间间隔内，质点系动量的改变量等于作用在质点系上的所有外力在同一时间间隔内冲量的矢量和。

## 投影形式:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP_x}{dt} = \sum F_{ix}^{(e)} \\ \frac{dP_y}{dt} = \sum F_{iy}^{(e)} \\ \frac{dP_z}{dt} = \sum F_{iz}^{(e)} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} P_{2x} - P_{1x} = \sum I_{ix}^{(e)} = \sum \int_{t_1}^{t_2} F_{ix}^{(e)} dt \\ P_{2y} - P_{1y} = \sum I_{iy}^{(e)} = \sum \int_{t_1}^{t_2} F_{iy}^{(e)} dt \\ P_{2z} - P_{1z} = \sum I_{iz}^{(e)} = \sum \int_{t_1}^{t_2} F_{iz}^{(e)} dt \end{array} \right.$$

### 三、质点系的动量守恒

若  $\sum \bar{F}_i^{(e)} = 0$ , 则  $\bar{P} = \sum m_i \bar{v}_i =$  常矢量。

若  $\sum F_{ix}^{(e)} = 0$ , 则  $P_x = \sum m_i v_{ix} =$  常量。

**只有外力才能改变质点系的动量，内力不能改变整个质点系的动量，但可以引起系统内各质点动量的传递。**

**[例4]** 锤的质量  $m=3000\text{ kg}$ ，从高度  $h=1.5\text{ m}$  处自由下落到受锻压的工件上，工件发生变形历时  $\tau=0.01\text{ s}$ ；求锤对工件的平均压力。

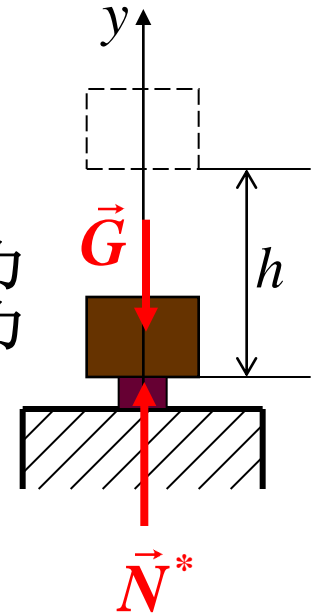
解：以锤为研究对象，和工件接触后受力如图。工件压力是变力，在短暂时间迅速变化，用平均压力  $N^*$  表示。

$$\text{锤自由下落时间} \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$mv_{2y} - mv_{1y} = I_y \quad 0 - 0 = -G(t + \tau) + N^* \tau$$

$$N^* = G\left(\frac{t}{\tau} + 1\right) = G\left(\frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{2h}{g}} + 1\right)$$

$$N^* = 3000 \times 9.8 \left( \frac{1}{0.01} \sqrt{\frac{2 \times 1.5}{9.8}} + 1 \right) = 1656 \text{ kN}$$



锤对工件的平均压力与反力  $N^*$  大小相等，方向相反，与锤的重量  $G=29.4\text{ kN}$  比较，是它的56倍，可见这个力是相当大的。

[例5] 滑块C的质量为 $m=19.6\text{ kg}$ ，在力 $F=866\text{ N}$ 的作用下沿倾角为 $30^\circ$ 的导杆AB运动。已知力 $F$ 与导杆AB之间的夹角为 $45^\circ$ ，滑块与导杆的动摩擦系数 $f=0.2$ ，初瞬时滑块静止，求滑块的速度增大到 $v=2\text{ m/s}$ 所需的时间。

解：以滑块C为研究对象，建立坐标系。

由动量定理得

$$-mv - 0 = (-F \cos 45^\circ + mg \sin 30^\circ + F_d)t \quad (1)$$

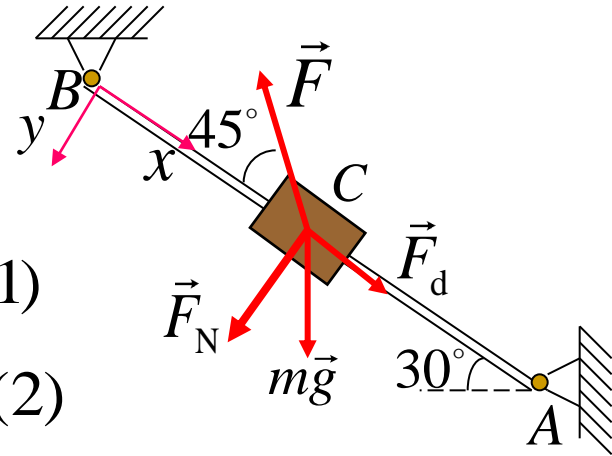
$$0 - 0 = (-F \sin 45^\circ + F_N + mg \cos 30^\circ)t \quad (2)$$

由(2)式得  $F_N = F \sin 45^\circ - mg \cos 30^\circ$

从而摩擦力为  $F_d = f F_N = f(F \sin 45^\circ - mg \cos 30^\circ)$

代入(1)式，求得所需时间为

$$t = \frac{mv}{F \cos 45^\circ - mg \sin 30^\circ - f(F \sin 45^\circ - mg \cos 30^\circ)} = 0.0941\text{ s}$$





[例6]如图所示，已知小车重为2 kN，沙箱重1 kN，二者以速度 $v_0=3.5$  m/s 运动。此时有一重为0.5 kN的铅球垂直落入沙中后，测得箱在车上滑动0.2 s，不计车与地面摩擦，求箱与车之间的摩擦力。

解：研究系统，建立坐标系。

$$\sum F_x^{(e)} = 0 \Rightarrow P_x = \text{const}$$

设沙箱滑动结束后车速为 $v$ ，则有

$$\frac{W_1 + W_2}{g} v_0 = \frac{W_1 + W_2 + W_3}{g} v$$

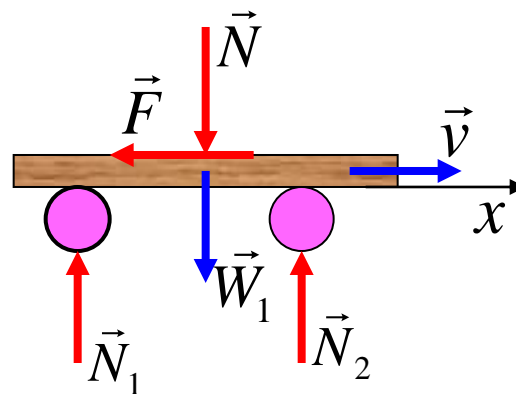
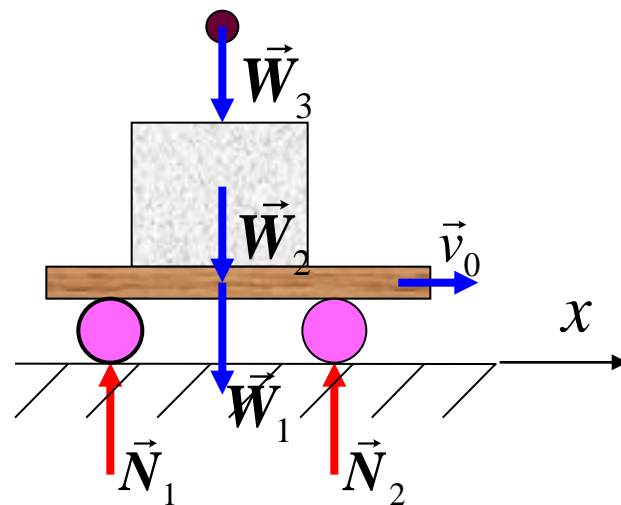
代入已知数据，解得  $v = 3$  m/s

再以小车为研究对象，由动量定理有

$$P_x - P_{0x} = -Ft$$

$$\frac{W_1}{g} v - \frac{W_1}{g} v_0 = -Ft$$

代入已知数据，解得  $F = 0.5$  kN



[例7]如图所示，质量为  $m_A$  的均质三棱柱A在重力作用下沿着质量为  $m_B$  的大均质三棱柱B的斜面下滑，大三棱柱倾角为  $\theta$ 。设各处摩擦不计，初始时系统静止。求：(1) B的加速度；(2) 地面的约束力。

解：先对系统进行运动分析，建立如图坐标，设B的速度为  $v_B$ ，A相对B的速度为  $v_r$ ，则

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_r \quad \text{于是} \quad \begin{aligned} v_{Ax} &= v_r \cos \theta - v_B \\ v_{Ay} &= -v_r \sin \theta \end{aligned}$$

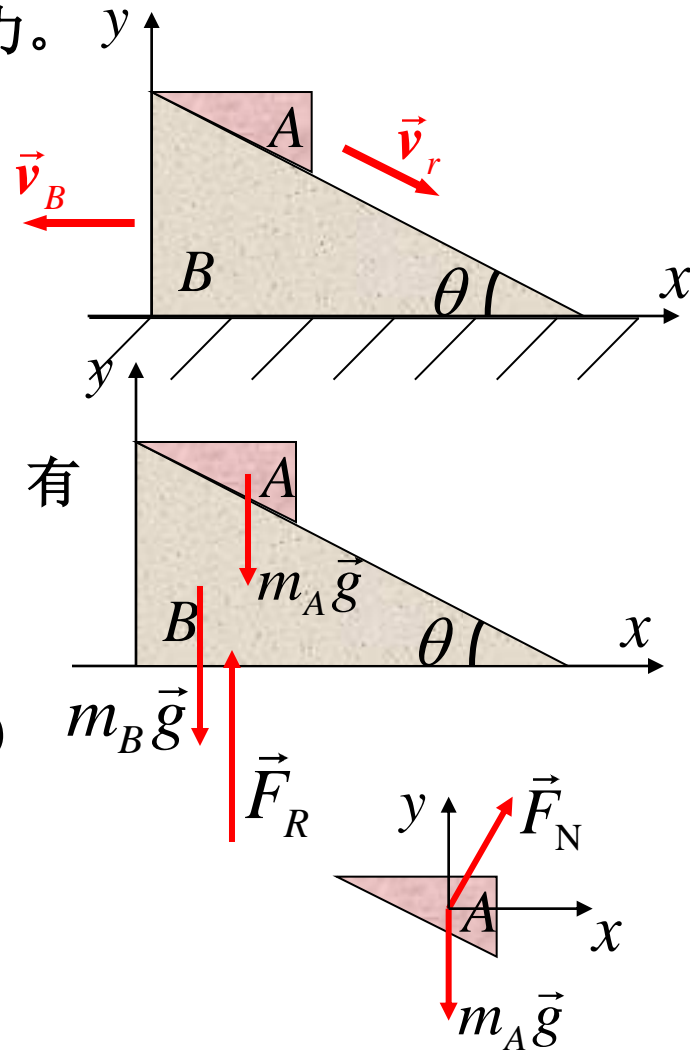
系统受力如图。因  $\Sigma F_x^{(e)} = 0$ ，且初始系统静止，有

$$m_B(-v_B) + m_A(v_r \cos \theta - v_B) = 0$$

$$\text{两边对 } t \text{ 求导 } m_A a_r \cos \theta = (m_A + m_B) a_B \quad (1)$$

再以A为研究对象，受力如图，由

$$\frac{dP_x}{dt} = \Sigma F_x^{(e)} \quad \frac{dP_y}{dt} = \Sigma F_y^{(e)}$$



有 
$$\frac{d m_A (v_r \cos \theta - v_B)}{d t} = F_N \sin \theta$$

$$\frac{d m_A (-v_r \sin \theta)}{d t} = F_N \cos \theta - m_A g$$

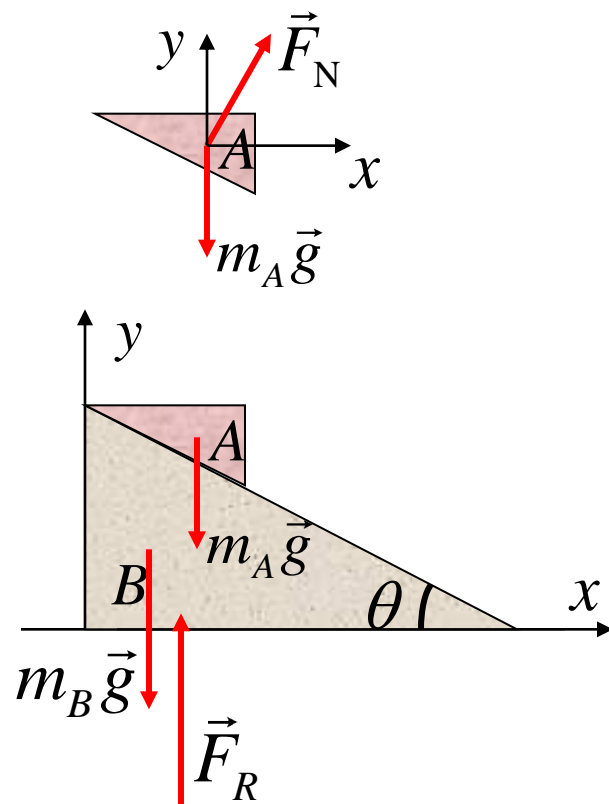
即 
$$m_A (a_r \cos \theta - a_B) = F_N \sin \theta \quad (2)$$

$$m_A (-a_r \sin \theta) = F_N \cos \theta - m_A g \quad (3)$$

注意 
$$m_A a_r \cos \theta = (m_A + m_B) a_B \quad (1)$$

联立求解(1)、(2)、(3)式得

$$a_B = \frac{m_A \sin 2\theta}{2(m_A \sin^2 \theta + m_B)} g$$



$$a_B = \frac{m_A \sin 2\theta}{2(m_A \sin^2 \theta + m_B)} g$$

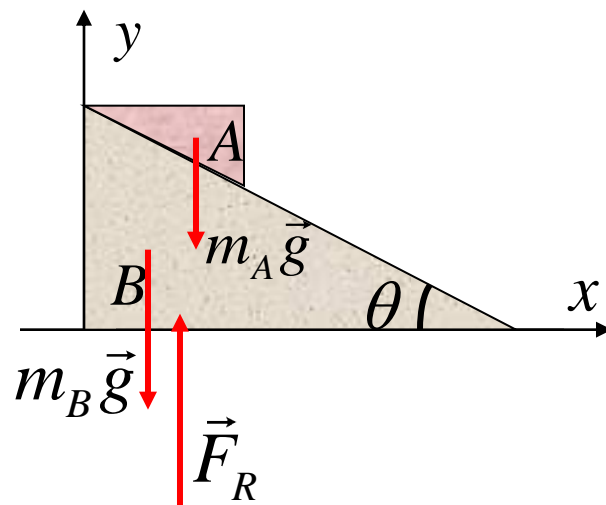
以整体为研究对象，由方程  $\frac{dP_y}{dt} = \sum F_y^{(e)}$  得

$$\frac{d(-m_A v_r \sin \theta)}{dt} = F_R - m_A g - m_B g$$

即  $-m_A a_r \sin \theta = F_R - m_A g - m_B g$

将 (1) 式  $m_A a_r \cos \theta = (m_A + m_B) a_B$  (1) 代入上式则得

$$F_R = (m_A + m_B) g - m_A a_r \sin \theta = (m_A + m_B) (g - a_B \tan \theta)$$



**[例8]** 流体流过弯管时，在截面A和B处的平均流速分别为  $v_1, v_2$  (m/s)。求流体对弯管产生的动压力(附加动压力)。设流体不可压缩，流量  $Q(\text{m}^3/\text{s})$  为常量，密度为  $\rho(\text{kg}/\text{m}^3)$ 。

解:取截面A与B之间的流体作为研究的质点系。受力如图示。

运动分析：设经过  $\Delta t$  时间后，流体AB运动到位置ab，

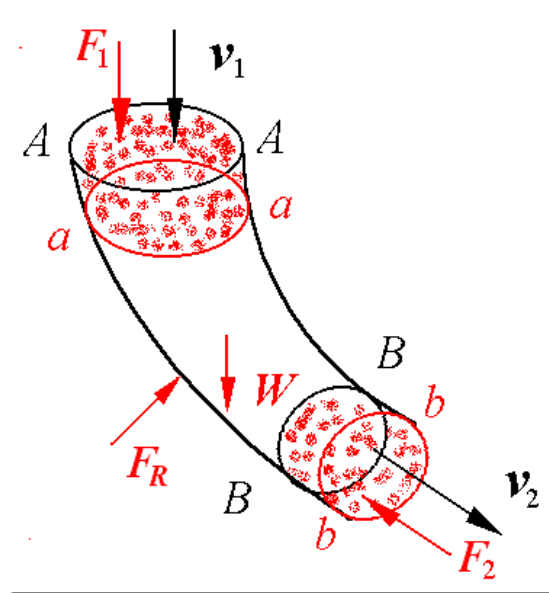
$$\Delta \bar{P} = \bar{P}_{ab} - \bar{P}_{AB} = [(\bar{P}_{aB})_2 + \bar{P}_{Bb}] - [\bar{P}_{Aa} + (\bar{P}_{aB})_1]$$

$$\because (\bar{P}_{aB})_2 = (\bar{P}_{aB})_1$$

$$\therefore \Delta \bar{P} = \bar{P}_{Bb} - \bar{P}_{Aa} = \rho Q \Delta t \cdot \bar{v}_2 - \rho Q \Delta t \cdot \bar{v}_1$$

由质点系动量定理；得

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{P}}{\Delta t} = \rho Q (\bar{v}_2 - \bar{v}_1) = \bar{W} + \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_R$$



$$\frac{d\bar{P}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{P}}{\Delta t} = \rho Q(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) = \bar{W} + \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_R$$

即

$$\bar{F}_R = -(\bar{W} + \bar{F}_1 + \bar{F}_2) + \rho Q(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)$$

静约束力  $\bar{F}'_R = -(\bar{W} + \bar{F}_1 + \bar{F}_2)$ ，动约束力  $\bar{F}''_R = \rho Q(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)$

计算  $\bar{F}''_R$  时，常采用投影形式

$$\left. \begin{aligned} F''_{Rx} &= \rho Q(v_{2x} - v_{1x}) \\ F''_{Ry} &= \rho Q(v_{2y} - v_{1y}) \end{aligned} \right\}$$

与  $\bar{F}''_R$  相反的力就是管壁上受到的流体作用的动压力。

**[例9]** 图示系统，重物A和B的质量分别为 $m_1$ 、 $m_2$ 。若A下降的加速度为 $a$ ，滑轮质量不计。求支座O的约束力。

解：以整个系统为研究对象，受力如图，

建立如图坐标。设A下降的速度为 $v_A$ ，

B上升的速度为 $v_B$ ，则由运动学关系得

$$v_B = \frac{1}{2} v_A$$

系统的动量在坐标轴上的投影为

$$P_x = 0, \quad P_y = m_1 v_A - m_2 v_B = (m_1 - \frac{1}{2} m_2) v_A$$

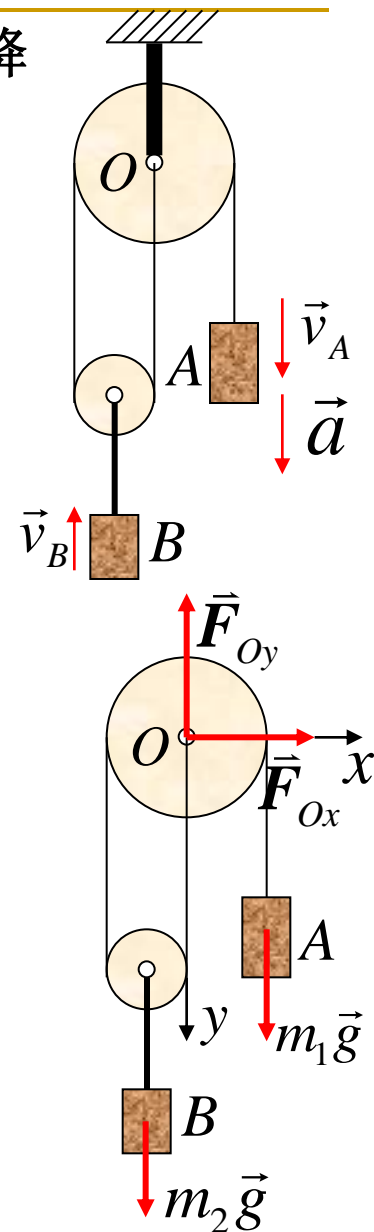
由质点系的动量定理

$$0 = F_{Ox}, \quad \frac{d}{dt} \left[ (m_1 - \frac{1}{2} m_2) v_A \right] = m_1 g + m_2 g - F_{Oy}$$

$$\text{可得 } F_{Ox} = 0$$

$$\text{注意到 } \frac{dv_A}{dt} = a$$

$$F_{Oy} = m_1 g + m_2 g - (m_1 - \frac{1}{2} m_2) a$$



## § 10-4 质心运动定理

将  $\bar{P} = m\bar{v}_C$  代入到质点系动量定理, 得  $\frac{d}{dt}(m\bar{v}_C) = \sum \bar{F}_i^{(e)}$

若质点系质量不变, 则

$$m\bar{a}_C = \sum \bar{F}_i^{(e)}$$

质心运动定理(质心运动微分方程)

质点系的质量与加速度的乘积,

等于作用于质点系上所有外力的矢量和 (外力系的主矢)。

$$m\ddot{\bar{r}}_C = \sum \bar{F}_i^{(e)}$$

### 1. 投影形式:

$$\textcircled{1} \quad ma_{Cx} = m\ddot{x}_C = \sum F_{ix}^{(e)}, ma_{Cy} = m\ddot{y}_C = \sum F_{iy}^{(e)}, ma_{Cz} = m\ddot{z}_C = \sum F_{iz}^{(e)}$$

$$\textcircled{2} \quad ma_{C\tau} = m \frac{dv}{dt} = \sum F_{i\tau}^{(e)}, ma_{Cn} = m \frac{v_C^2}{\rho} = \sum F_{in}^{(e)}, \sum F_{ib}^{(e)} = 0。$$



2. 刚体系统：设第 $i$ 个刚体 $m_i$ ,  $\bar{v}_{Ci}$ , 由 $m\bar{r}_C = \sum m_i \bar{r}_i$  则有

$$m\ddot{\bar{r}}_C = \sum m_i \ddot{\bar{r}}_i \quad \text{或} \quad m\bar{a}_C = \sum m_i \bar{a}_i \quad \text{所以}$$

$$\sum m_i \bar{a}_{Ci} = \sum \bar{F}_i^{(e)}$$

$$\sum m_i \ddot{\bar{r}}_{Ci} = \sum \bar{F}_i^{(e)}$$

刚体  
系统



$$\sum m_i a_{Cix} = \sum m_i \ddot{x}_{Ci} = \sum F_{ix}^{(e)}$$

$$\sum m_i a_{Ciy} = \sum m_i \ddot{y}_{Ci} = \sum F_{iy}^{(e)}$$

$$\sum m_i a_{Ciz} = \sum m_i \ddot{z}_{Ci} = \sum F_{iz}^{(e)}$$

上式在刚体系统中特别有用，用此式不需要确定刚体系统的质心。

3. 质心运动定理是动量定理的另一种表现形式，与质点运动微分方程形式相似。对于任意一个质点系，无论它作什么形式的运动，质点系质心的运动可以看成为一个质点的运动，并设想把整个质点系的质量都集中在质心这个点上，所有外力也集中作用在质心这个点上。

只有外力才能改变质点系质心的运动,内力不能改变质心的运动,但可以改变系统内各质点的运动。

#### 4. 质心运动守恒定律

若  $\sum \bar{F}_i^{(e)} = 0$ , 则  $\bar{a}_C = 0$ ,  $\bar{v}_C = \text{常矢量}$ , 质心作匀速直线运动;  
若开始时系统静止, 即  $\bar{v}_{C0} = 0$  则  $\bar{r}_C = \text{常矢量}$ , 质心位置守恒。

若  $\sum F_{ix}^{(e)} = 0$ , 则  $a_{Cx} = 0$ ,  $v_{Cx} = \text{常量}$ , 质心沿x方向速度不变;  
若存在  $v_{Cx0} = 0$  则  $x_C = \text{常量}$ , 质心在x轴的位置坐标保持不变。

质心在x轴的位置坐标保持不变必满足

$$\sum m_i \Delta x_i = 0$$

#### 5. 质心运动定理可求解两类动力学问题:

已知质点系质心的运动,求作用于质点系的外力(包括约束力)。

已知作用于质点系的外力,求质心的运动规律。

[例10] 质量为 $M$ 的大三角形柱体,放于光滑水平面上,斜面上另放一质量为 $m$ 的小三角形柱体,求小三角形柱体滑到底时,大三角形柱体的位移。

解: 选两物体组成的系统为研究对象。

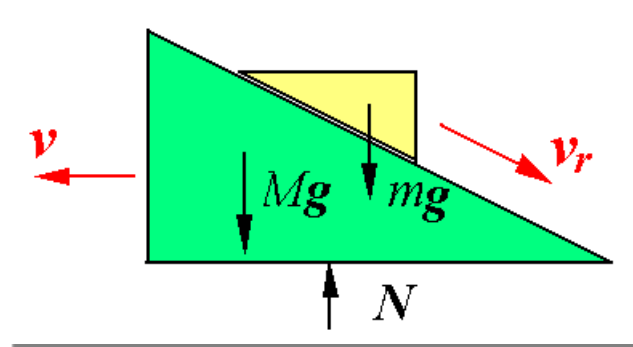
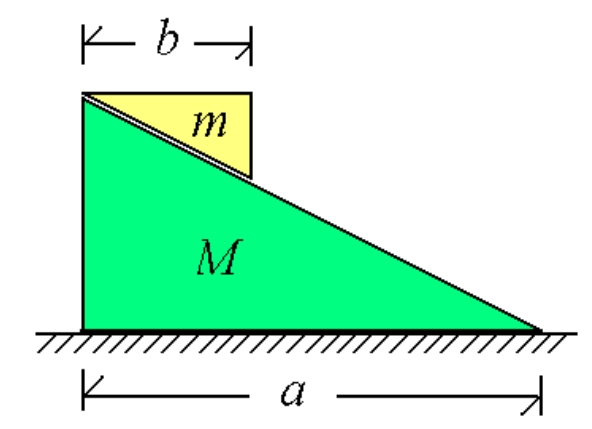
$$\therefore \sum F_x^{(e)} = 0$$

所以质心在水平方向运动守恒。并且初始静止, 必有  $\sum m_i \Delta x_i = 0$ 。

设大三角形向左的位移为 $S$ , 则

$$-MS + m(S_{rx} - S) = 0$$

$$\therefore S = \frac{m}{M+m} S_{rx} = \frac{m}{M+m} (a-b)$$



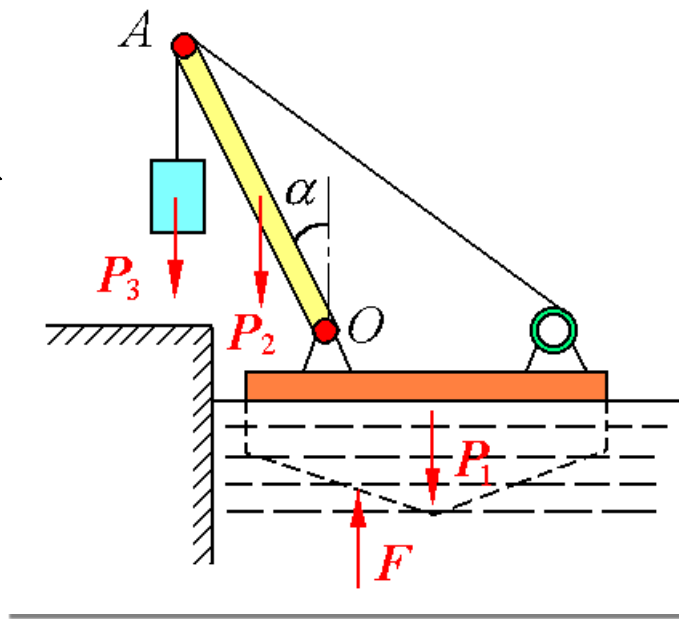
[例11] 浮动起重船, 船的重量为 $P_1=200\text{kN}$ , 起重杆的重量为 $P_2=10\text{kN}$ , 长 $l=8\text{m}$ , 起吊物体的重量为 $P_3=20\text{kN}$ 。设开始起吊时整个系统处于静止, 起重杆 $OA$ 与铅直位置的夹角为 $\alpha_1=60^\circ$ ; 水的阻力不计, 求起重杆 $OA$ 与铅直位置成角 $\alpha_2=30^\circ$ 时船的位移。

解: 取起重船, 起重杆和重物组成的质点系为研究对象。

受力分析如图示,  $\sum F_x^{(e)} = 0$ , 且初始时系统静止, 所以系统质心的位置坐标 $x_C$ 保持不变。

$$\therefore \sum m_i \cdot \Delta x_i = 0$$

$$\longrightarrow \sum P_i \cdot \Delta x_i = 0$$



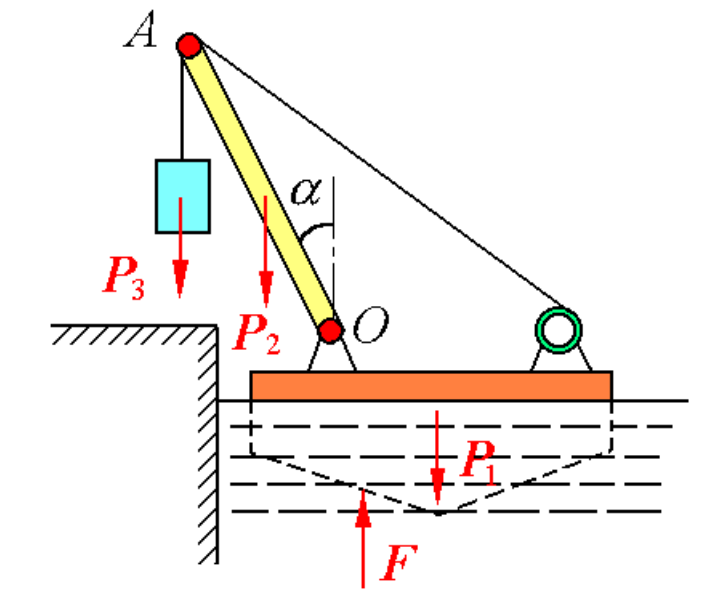
$$\therefore \sum m_i \cdot \Delta x_i = 0 \quad \longrightarrow \quad \sum P_i \cdot \Delta x_i = 0$$

船的位移设向右为 $\Delta x_1$ ，杆的位移

$$\Delta x_2 = \Delta x_1 + (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) l / 2,$$

重物的位移

$$\Delta x_3 = \Delta x_1 + (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) l$$



$$\therefore P_1 \cdot \Delta x_1 + P_2 [\Delta x_1 + (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) l / 2] + P_3 \cdot [\Delta x_1 + (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) l] = 0$$

$$\Delta x_1 = -\frac{P_2 + 2P_3}{2(P_1 + P_2 + P_3)} l (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2)$$

$$= -\frac{10 + 2 \times 20}{2(200 + 10 + 20)} \times 8 (\sin 60^\circ - \sin 30^\circ) = -0.318 \text{ m}$$

计算结果为负值，表明船的实际位移水平向左。

[例12]如图所示，电动机外壳固定在水平基础上，定子、转子的质量分别为 $m_1$ 、 $m_2$ 。设定子质心位于转轴中心 $O_1$ ，由于制造误差，转子质心 $O_2$ 到 $O_1$ 的距离为 $e$ ，已知转子以匀角速度 $\omega$ 转动。求：(1) 质心运动方程；(2) 基础对电机总的水平和铅垂反力；(3) 若电机没有螺栓固定，各处摩擦不计，初始时电机静止，求转子以匀角速度 $\omega$ 转动时电动机外壳的运动。

解：(1) 建立如图坐标，任一瞬时， $\theta = \omega t$ ，即有

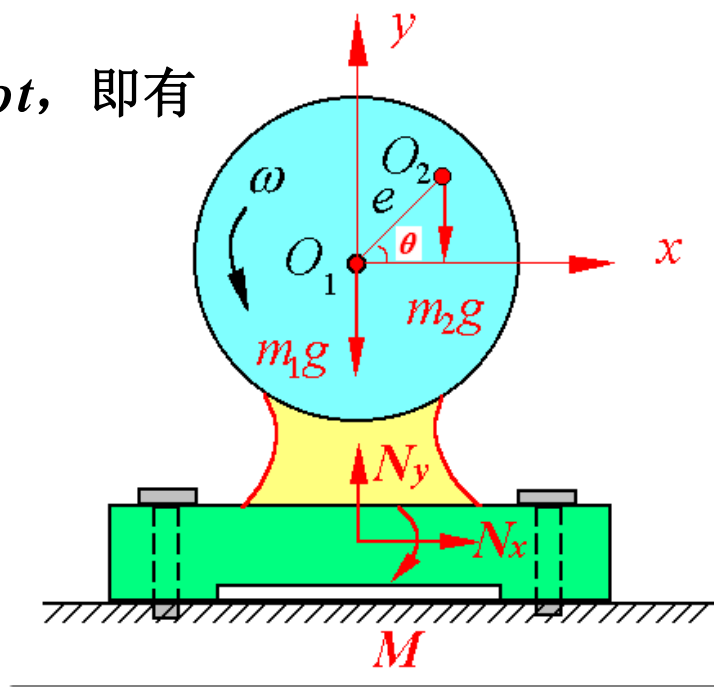
$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0$$

$$x_2 = e \cos \omega t, \quad y_2 = e \sin \omega t$$

故质心运动方程为

$$x_C = \frac{m_2 e \cos \omega t}{m_1 + m_2}$$

$$y_C = \frac{m_2 e \sin \omega t}{m_1 + m_2}$$



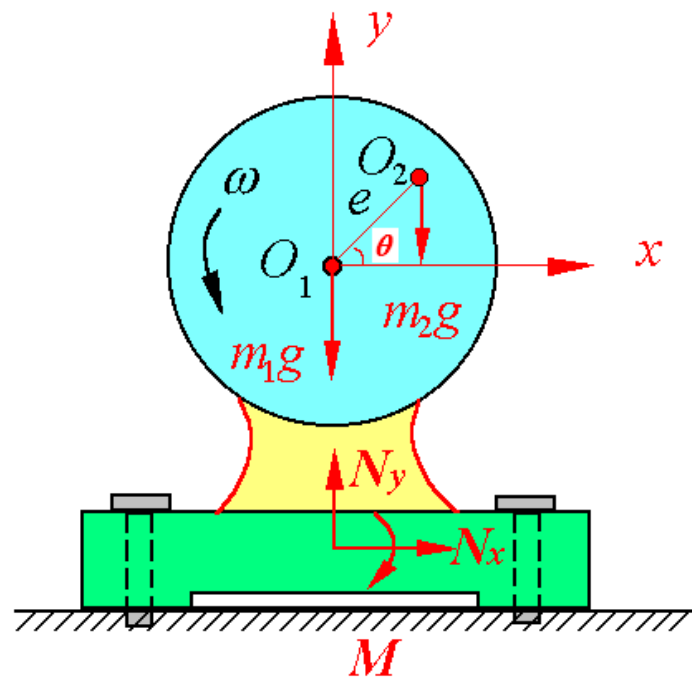
## (2) 以系统为研究对象

由质心运动定理  $ma_{Cx} = \sum F_x^{(e)}$ ,  $ma_{Cy} = \sum F_y^{(e)}$

得  $(m_1 + m_2)\ddot{x}_C = N_x$   
 $(m_1 + m_2)\ddot{y}_C = N_y - m_1g - m_2g$

因  $\ddot{x}_C = -\frac{m_2e\omega^2}{m_1 + m_2} \cos \omega t$   
 $\ddot{y}_C = -\frac{m_2e\omega^2}{m_1 + m_2} \sin \omega t$

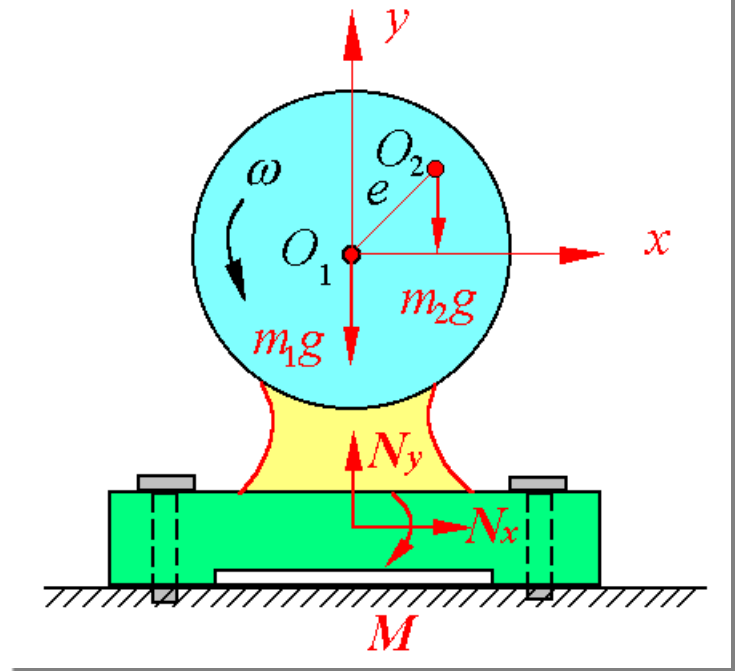
故  $N_x = -m_2\omega^2e \cos \omega t$   
 $N_y = -m_2\omega^2e \sin \omega t + (m_1 + m_2)g$



或  $a_1=0, a_2=e\omega^2$

$$a_{2x}=-e\omega^2\cos\omega t, a_{2y}=-e\omega^2\sin\omega t$$

根据质心运动定理，有



$$\sum m_i a_{Cix} = \sum F_{ix}^{(e)}, m_2 a_{2x} = -m_2 e \omega^2 \cos \omega t = N_x$$

$$\sum m_i a_{Ciy} = \sum F_{iy}^{(e)}, m_2 a_{2y} = -m_2 e \omega^2 \sin \omega t = N_y - m_1 g - m_2 g$$

$$\therefore N_x = -m_2 e \omega^2 \cos \omega t, N_y = m_1 g + m_2 g - m_2 e \omega^2 \sin \omega t$$

可见，由于偏心引起的动约束力是随时间变化的周期函数。



(3) 以系统为研究对象，受力如图。

由于  $\Sigma F_x^{(e)} = 0$ ，所以  $\therefore \Sigma m_i \cdot \Delta x_i = 0$

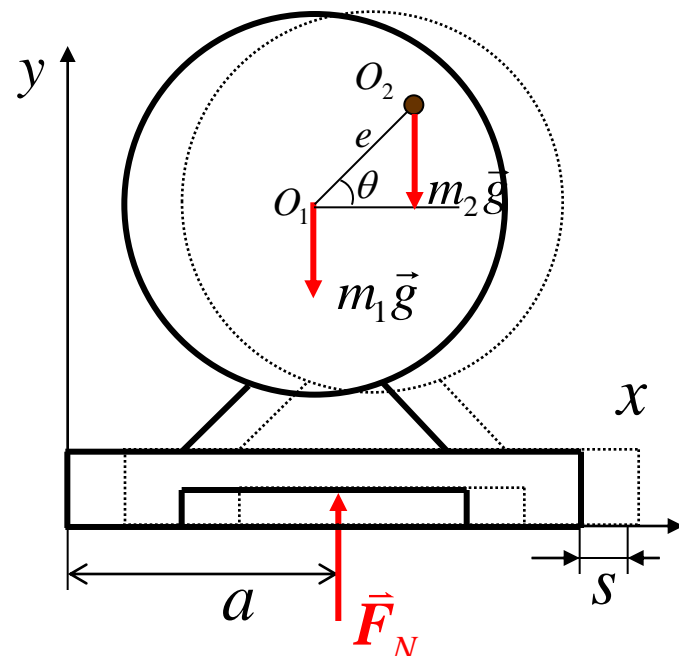
当转子转过  $\theta$ ，定子向右移动距离  $s$ ，则

$$\text{解得 } s = -\frac{m_2 e}{m_1 + m_2} \cos \theta = -\frac{m_2 e}{m_1 + m_2} \cos \omega t$$

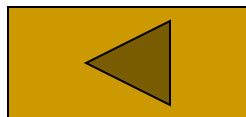
由此可见，电动机在水平面上作往复运动。此时

$$F_{N\min} = (m_1 + m_2)g - m_2 \omega^2 e$$

若  $\omega > \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)g}{m_2 e}}$ ，则  $F_{N\min} < 0$ 。因此如电动机无螺栓固定，它将会跳起来。



# 第十章结束



# 理论力学

## 第十一章 动量矩定理

动量定理： $\begin{matrix} \text{质点} \\ \text{质点系} \end{matrix}$  动量的改变  $\rightarrow$  外力（外力系主矢）

质心运动定理：质心的运动  $\rightarrow$  外力（外力系主矢）

若当质心为固定轴上一点时， $v_C=0$ ，则其动量恒等于零，质心无运动，可是质点系确受外力的作用。**动量矩定理建立了质点和质点系相对于某固定点（固定轴）的动量矩的改变与外力对同一点（轴）之矩两者之间的关系。**

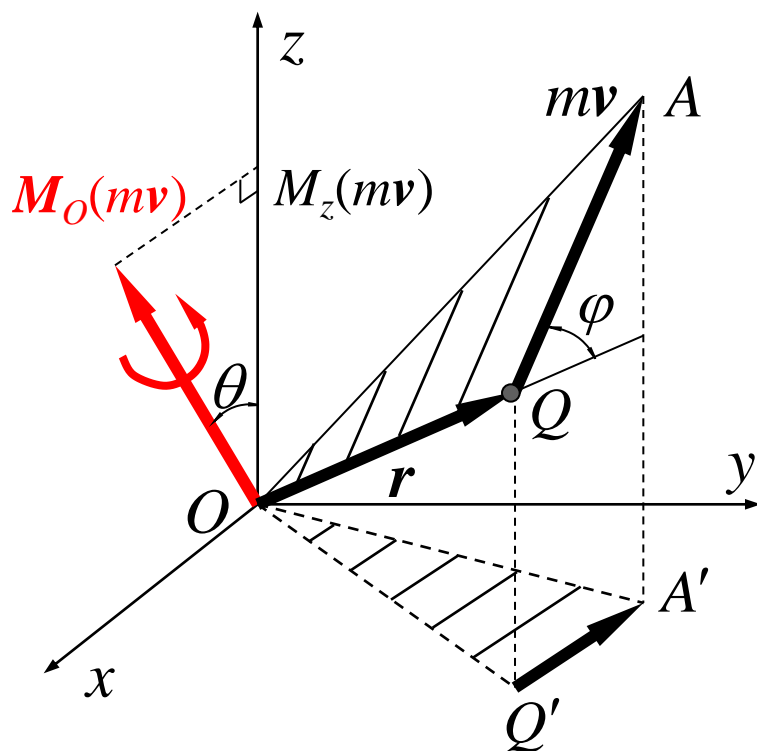
- 由静力学力系简化理论知：平面任意力系向任一简化中心简化可得一力和一力偶，此力等于平面力系的主矢，此力偶等于平面力系对简化中心的主矩。
- 由刚体平面运动理论知：刚体的平面运动可以分解为随同基点的平移和绕基点的转动。
- 若将简化中心和基点取在质心上，则动量定理(质心运动定理)描述了刚体随同质心的运动变化和外力系主矢的关系。它揭示了物体机械运动规律的一个侧面。刚体相对质心的转动的运动变化与外力系对质心的主矩的关系将有本章的动量矩定理给出。它揭示了物体机械运动规律的另一个侧面。

## § 11-1 质点和质点系的动量矩

### 一、质点的动量矩

质点对点 $O$ 的动量矩:  $\vec{M}_O(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v}$  矢量

质点对轴 $z$ 的动量矩:  $M_z(m\vec{v}) = M_O(m\vec{v}_{xy})$  代数量



$$|\vec{M}_O(m\vec{v})| = 2\Delta OQA$$

$$M_z(m\vec{v}) = \pm 2\Delta OQ'A'$$

正负号规定与力对轴之矩的规定相同。对着轴看：逆时针为正；

顺时针为负。

或右手螺旋法则确定正负。

质点对点 $O$ 的动量矩在通过 $O$ 的 $z$ 轴上的投影等于质点对 $z$ 轴的动量矩。即 
$$\left[ \vec{M}_O(m\vec{v}) \right]_z = M_z(m\vec{v})$$

动量矩度量物体在某瞬时绕固定点(轴)转动的强弱,  $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ 。

## 二、质点系的动量矩（动量的主矩）

质点系对点 $O$ 的动量矩等于各质点对同一点动量矩的矢量和。即 
$$\vec{L}_O = \sum \vec{M}_O(m_i \vec{v}_i) = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

质点系对 $z$ 轴的动量矩等于各质点对同一轴动量矩的代数和。即 
$$L_z = \sum M_z(m_i \vec{v}_i)$$

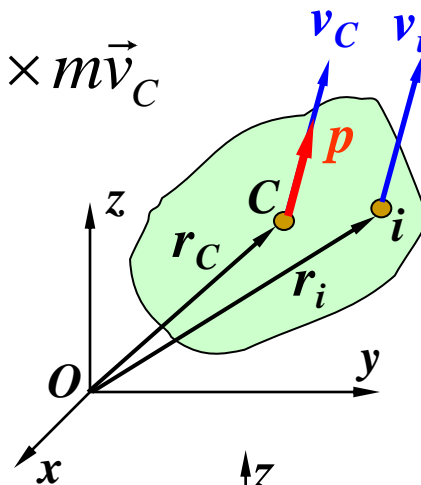
同理 
$$L_z = \sum M_z(m_i \vec{v}_i) = \left[ \vec{L}_O \right]_z$$

### 三、刚体动量矩计算

1、平移刚体  $\vec{L}_O = \vec{M}_O(m_i \vec{v}_i) = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$

$$= \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_C = m \vec{r}_C \times \vec{v}_C = \vec{r}_C \times m \vec{v}_C$$
$$L_z = M_z(m \vec{v}_C)$$

平移刚体可视为质量集中于质心的质点来计算对点（或轴）的动量矩。

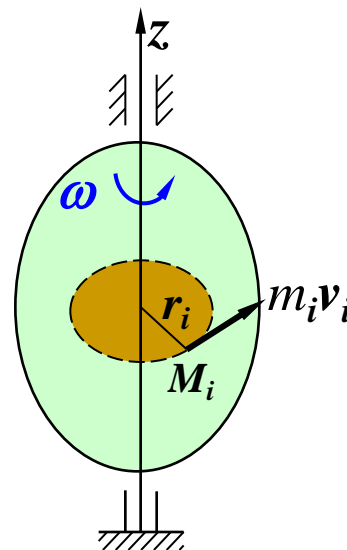


### 2、定轴转动刚体

对转轴  
的动量矩

$$L_z = M_z(m_i \vec{v}_i) = \sum m_i r_i^2 \cdot \omega = J_z \omega$$

定轴转动刚体对转轴的动量矩等于刚体对该轴转动惯量与角速度的乘积。



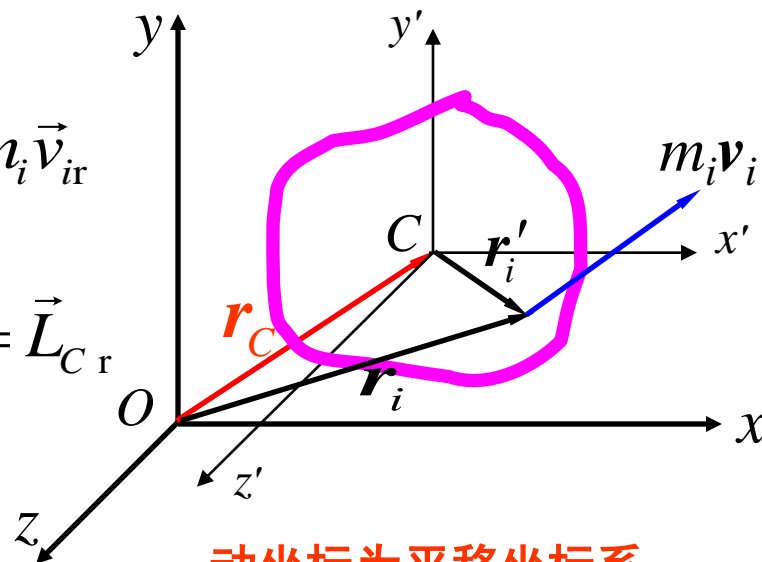


### 3、平面运动刚体

质点系对质心的动量矩

$$\begin{aligned}\vec{L}_C &= \sum \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_i = \sum \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_C + \sum \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_{ir} \\ &= (\sum m_i \vec{r}'_i) \times \vec{v}_C + \sum \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_{ir} \\ &= (m \vec{r}'_C) \times \vec{v}_C + \sum \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_{ir} = \sum \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_{ir} = \vec{L}_{Cr}\end{aligned}$$

对质心的动量矩用绝对速度  
和用相对速度计算是相等的。



动坐标为平移坐标系

质点系对O点的动量矩

$$\vec{L}_O = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum \vec{r}_C \times m_i \vec{v}_i + \sum \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_i = \vec{r}_C \times \sum m_i \vec{v}_i + \vec{L}_C = \vec{r}_C \times m \vec{v}_C + \vec{L}_C$$

平面运动刚体  $L_z = M_z(m \vec{v}_C) + L_C = M_z(m \vec{v}_C) + J_C \omega$

平面运动刚体对垂直于质量对称平面的某轴的动量矩，  
等于刚体随同质心作平移时质心的动量对该轴的动量矩  
与绕质心轴作转动时的动量矩之和。

[例] 滑轮A:  $m_1, R_1, J_1$

滑轮B:  $m_2, R_2, J_2$ ;  $R_1=2R_2$

物体C:  $m_3, v_3$

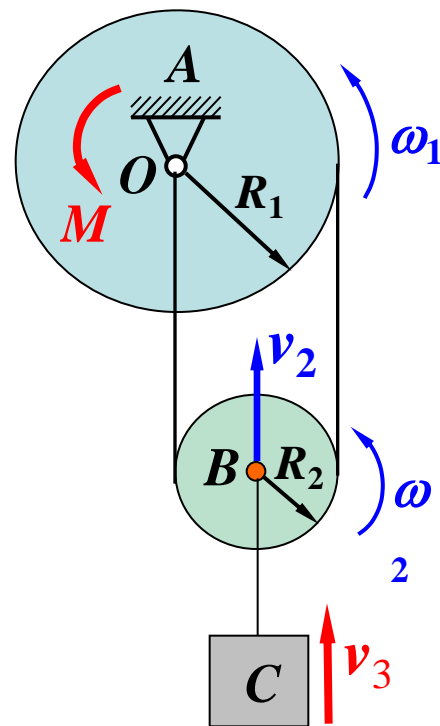
求系统对O轴的动量矩。

解:  $L_O = L_{OA} + L_{OB} + L_{OC}$

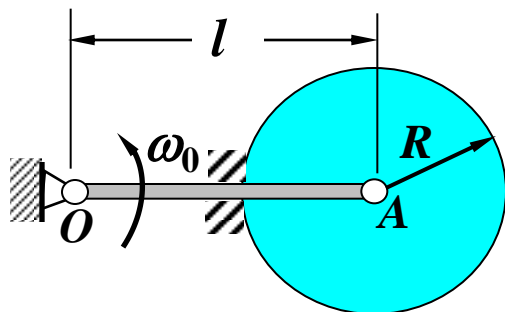
$$= J_1 \omega_1 + (J_2 \omega_2 + m_2 v_2 R_2) + m_3 v_3 R_2$$

$$v_3 = v_2 = R_2 \omega_2 = \frac{1}{2} R_1 \omega_1$$

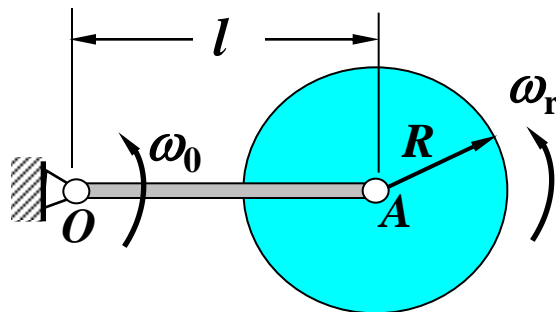
$$L_O = \left( \frac{J_1}{R_2^2} + \frac{J_2}{R_2^2} + m_2 + m_3 \right) R_2 v_3$$



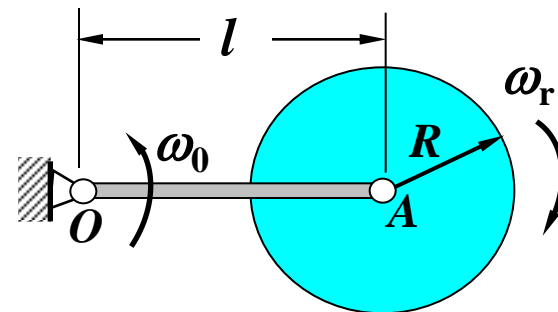
[例]均质圆盘质量为 $m$ ，半径为 $R$ 。与长为 $l$ 的杆 $OA$ 连接， $OA$ 绕轴 $O$ 转动的角速度为 $\omega_0$ 。求下列三种情况下圆盘对轴 $O$ 的动量矩：(a) 圆盘与杆固结；(b) 圆盘绕轴 $A$ 相对杆 $OA$ 以角速度 $\omega_r$ 逆时针方向转动；(c) 圆盘绕轴 $A$ 相对杆 $OA$ 以角速度 $\omega_r$ 顺时针方向转动。 **P281, 11-2**



(a)



(b)



(c)

解:  $L_O = \left(\frac{1}{2}mR^2 + ml^2\right)\omega_0$

$$L_O = L_A + M_O(mv_A)$$

$$= \frac{1}{2}mR^2\omega_a + mv_A l$$

$$= \frac{1}{2}mR^2(\omega_0 + \omega_r) + ml^2\omega_0$$

$$L_O = L_A + M_O(mv_A)$$

$$= \frac{1}{2}mR^2\omega_a + mv_A l$$

$$= \frac{1}{2}mR^2(\omega_0 - \omega_r) + ml^2\omega_0$$

## § 11-2 动量矩定理

### 一、质点对定点的动量矩定理

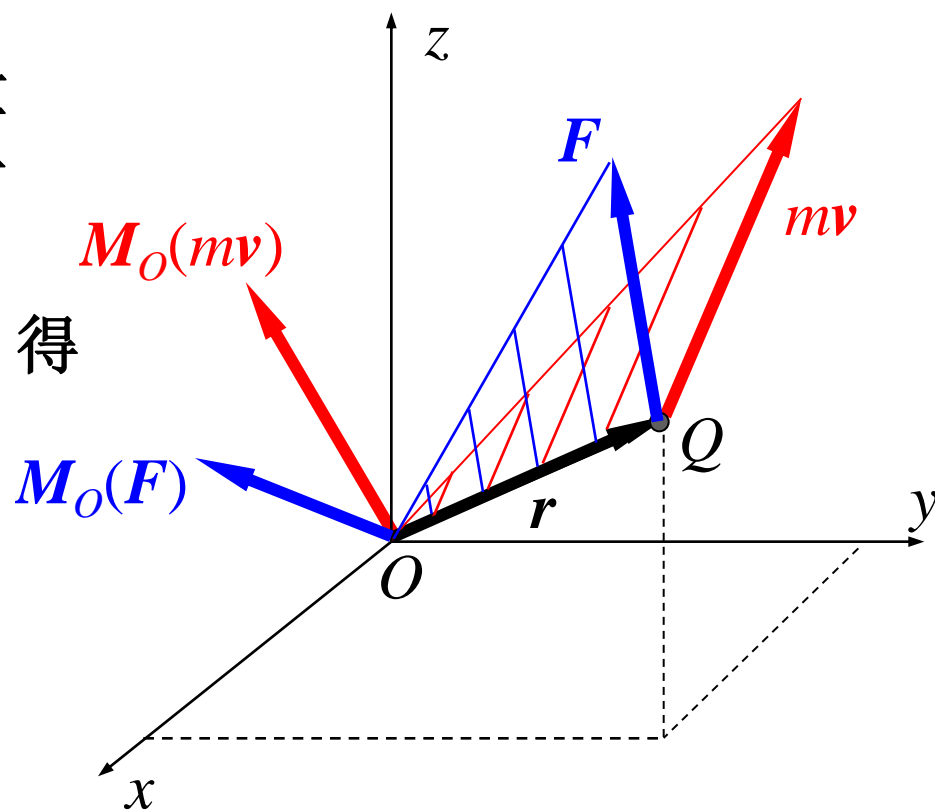
设质点对**固定点** $O$ 的动量矩为 $M_O(mv)$ ，作用力 $F$ 对同一点的矩为 $M_O(F)$ ，如图所示。

将动量矩对时间取一次导数，得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} M_O(mv) &= \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) \\ &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d}{dt} (m\mathbf{v})\end{aligned}$$

因为  $\frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) = \mathbf{F}$ ,  $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$

所以  $\frac{d}{dt} M_O(mv) = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = M_O(\mathbf{F})$



质点对**固定点**的动量矩定理

$$\frac{dM_o(mv)}{dt} = M_o(F) \quad \text{质点对任一固定点的动量矩对时间的导数, 等于作用在质点上的力对同一点之矩。}$$

将上式在通过固定点 $O$ 的三个直角坐标轴上投影, 得

$$\frac{d}{dt}M_x(mv) = M_x(F), \quad \frac{d}{dt}M_y(mv) = M_y(F), \quad \frac{d}{dt}M_z(mv) = M_z(F)$$

上式称质点对**固定轴**的动量矩定理, 也是质点动量矩定理的投影形式。即质点对任一**固定轴**的动量矩对时间的导数, 等于作用在质点上的力对同一轴之矩。

注意: 用上式计算动量矩与力矩时, 符号规定应一致。

若  $\vec{M}_o(\vec{F})=0$  ;  $[M_z(\vec{F})=0]$  则  $\vec{M}_o(m\vec{v}) = \text{常矢量}$   $[M_z(m\vec{v}) = \text{常量}]$

称为质点的动量矩守恒。

[例] 单摆 已知 $m$ ,  $l$ ,  $t=0$ 时 $\varphi=\varphi_0$ , 从静止开始释放。求单摆的运动规律。

解：将小球视为质点，受力图如图所示。

$$M_O(F) = M_O(F_T) + M_O(mg) = -mgl \sin \varphi$$

运动分析： $v = l\dot{\varphi}$ ,  $\perp OM$ 。  $M_O(mv) = ml\dot{\varphi}l = ml^2\dot{\varphi}$

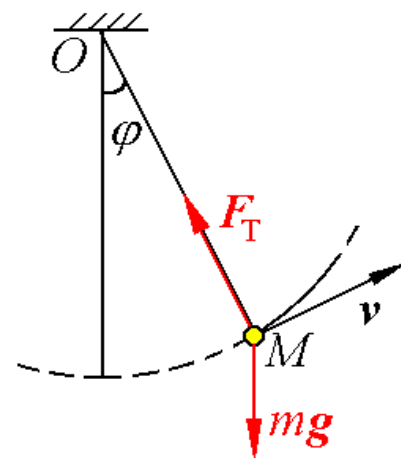
由动量矩定理  $\frac{d}{dt} M_O(mv) = M_O(F)$

$$\text{即 } \frac{d}{dt}(ml^2\dot{\varphi}) = -mgl \sin \varphi, \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

微幅摆动时,  $\sin \varphi \approx \varphi$ , 并令  $\omega_n^2 = \frac{g}{l}$ , 则  $\ddot{\varphi} + \omega_n^2 \varphi = 0$

解微分方程,并代入初始条件( $t=0, \varphi=\varphi_0, \dot{\varphi}_0=0$ ) 则运动方程

$$\varphi = \varphi_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}}t, \quad \text{摆动周期} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}$$



## 二、质点系的动量矩定理

对每一质点  $\frac{d}{dt}\vec{M}_O(m_i\vec{v}_i) = \vec{M}_O(\vec{F}_i^{(i)}) + \vec{M}_O(\vec{F}_i^{(e)}) \quad (i=1,2,\dots,n)$

对质点系，将每一质点的动量矩定理求矢量和。得

$$\sum \frac{d}{dt}\vec{M}_O(m_i\vec{v}_i) = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i^{(i)}) + \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i^{(e)}) \quad (i=1,2,\dots,n)$$

左边交换求和与求导运算的顺序，并且注意

$$\vec{L}_O = \sum \vec{M}_O(m_i\vec{v}_i), \quad \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i^{(i)}) = 0, \text{ 则}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i^{(e)}) \quad \text{一质点系对固定点的动量矩定理}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{M}_O(\vec{F}^{(e)})$$

质点系对任一**固定点**的动量矩对时间的导数，等于作用在质点系上所有外力对同一点之矩的矢量和（外力系的主矩）。

将上式在通过固定点 $O$ 的三个**固定**直角坐标轴上投影，得：

$$\frac{dL_x}{dt} = \sum M_x(\vec{F}^{(e)}) , \quad \frac{dL_y}{dt} = \sum M_y(\vec{F}^{(e)}) , \quad \frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}^{(e)})$$

上式称为质点系对**固定轴**的动量矩定理。即质点系对任一固定轴的动量矩对时间的导数，等于作用在质点系上所有外力对同一固定轴之矩的代数和（外力系对同一轴的主矩）。



$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{M}_O(\vec{F}^{(e)})$$

$$\frac{dL_x}{dt} = \sum M_x(\vec{F}^{(e)}) , \quad \frac{dL_y}{dt} = \sum M_y(\vec{F}^{(e)}) , \quad \frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}^{(e)})$$

动量矩定理说明内力不会改变质点系的动量矩，只有外力才能改变质点系的动量矩。

质点系的动量矩守恒

当  $\sum \vec{M}_O(\vec{F}^{(e)}) = 0$  时， $\vec{L}_O = \text{常矢量}$ 。

当  $\sum M_z(\vec{F}^{(e)}) = 0$  时， $L_z = \text{常量}$ 。



芭蕾舞演员  
花样滑冰运动员

[例]滑轮A:  $m_1$ ,  $R_1$ ,  $J_1$ , 作用常力偶 $M$ 。滑轮B:  $m_2$ ,  $R_2$ ,  $J_2$ ;  
 $R_1=2R_2$ 。物体C:  $m_3$ 。求物体C的加速度。

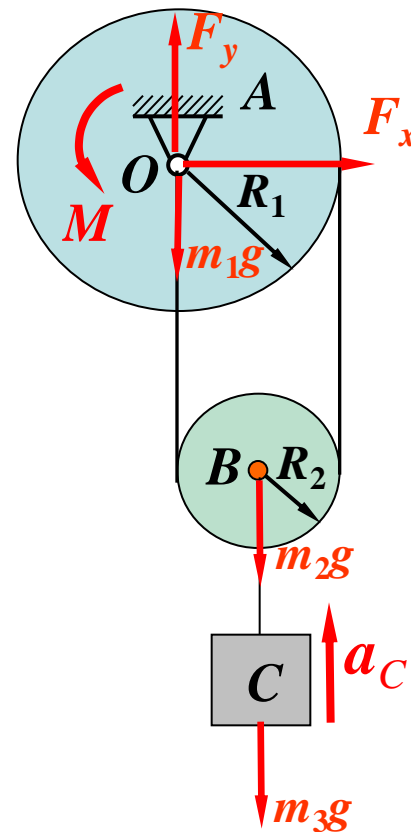
解: 取整个系统为研究对象, 受力分析如图示。

$$L_O = \left( \frac{J_1}{R_2^2} + \frac{J_2}{R_2^2} + m_2 + m_3 \right) R_2 v_C$$

$$\Sigma M_O(F^{(e)}) = M - (m_2 + m_3)gR_2$$

由动量矩定理:  $\frac{dL_O}{dt} = \Sigma M_O(F^{(e)})$

$$a_C = \frac{M - (m_2 + m_3)g}{\left( \frac{J_1}{R_2^2} + \frac{J_2}{R_2^2} + m_2 + m_3 \right)}$$



[例]高炉运送矿石的卷扬机如图。已知鼓轮的半径为 $R$ ，质量为 $m_1$ ，绕 $O$ 轴转动。小车和矿石的总质量为 $m_2$ 。作用在鼓轮上的力偶矩为 $M$ ，鼓轮对转轴的转动惯量为 $J$ ，轨道倾角为 $\theta$ 。设绳质量和各处摩擦不计，绳平行斜面，求小车的加速度 $a$ 。

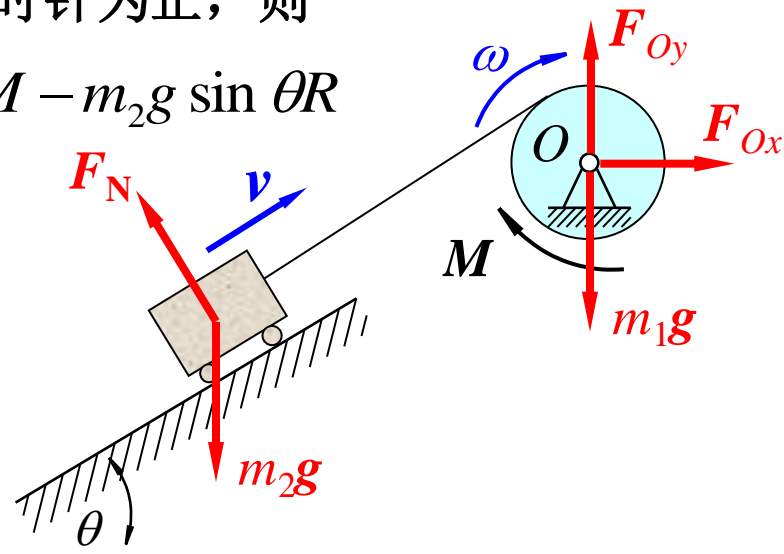
解：以系统为研究对象，受力如图。以顺时针为正，则

$$L_O = J\omega + m_2 v R \quad \sum M_O(F^{(e)}) = M - m_2 g \sin \theta R$$

由  $\frac{d}{dt} L_O = \sum M_O(F_i^{(e)})$ ，有

$$\frac{d}{dt} (J\omega + m_2 v R) = M - m_2 g \sin \theta R$$

于是解得 
$$a = \frac{MR - m_2 g R^2 \sin \theta}{J + m_2 R^2}$$



若 $M > m_2 g R \sin \theta$ ，则 $a > 0$ ，小车的加速度沿轨道向上。

**必须强调的是：为使动量矩定理中各物理量的正负号保持协调，动量矩和力矩的正负号规定必须完全一致。**

[例]水平杆 $AB$ 长 $2b$ ，可绕铅垂轴 $z$ 转动，其两端各用铰链与长为 $l$ 的杆 $AC$ 及 $BD$ 相连，杆端各联结质量为 $m$ 的小球 $C$ 和 $D$ 。起初两小球用细线相连，使杆 $AC$ 与 $BD$ 均为铅垂，系统绕 $z$ 轴的角速度为 $\omega_0$ 。如将此细线拉断，杆 $AC$ 和 $BD$ 各与铅垂线成 $\theta$ 角。不计各杆的质量，求这时系统的角速度 $\omega$ 。

解：以系统为研究对象，系统所受的外力有球的重力和轴承处的约束力，这些力对转轴之矩都等于零。所以系统对转轴的动量矩守恒，即

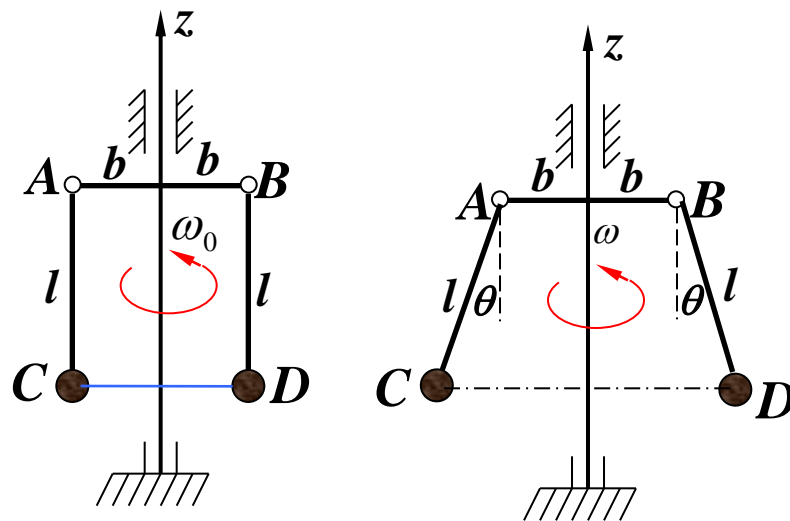
$$L_{z1} = L_{z2}$$

$$L_{z1} = 2(mb\omega_0)b = 2mb^2\omega_0$$

$$L_{z2} = 2m(b + l \sin \theta)^2 \omega$$

$$2mb^2\omega_0 = 2m(b + l \sin \theta)^2 \omega$$

$$\omega = \frac{b^2}{(b + l \sin \theta)^2} \omega_0$$



显然，此时的角速度 $\omega < \omega_0$ 。

[例] 一绳跨过定滑轮，其一端吊有质量为 $m$ 的重物A，另一端有一质量为 $m$ 的人以速度 $u$ 相对细绳向上爬。若滑轮半径为 $r$ ，质量不计，并且开始时系统静止，求重物A的速度。

解：以系统为研究对象，受力如图。

由于 $\Sigma M_O(F^{(e)})=0$ ，且系统初始静止，所以 $L_O=0$ 。

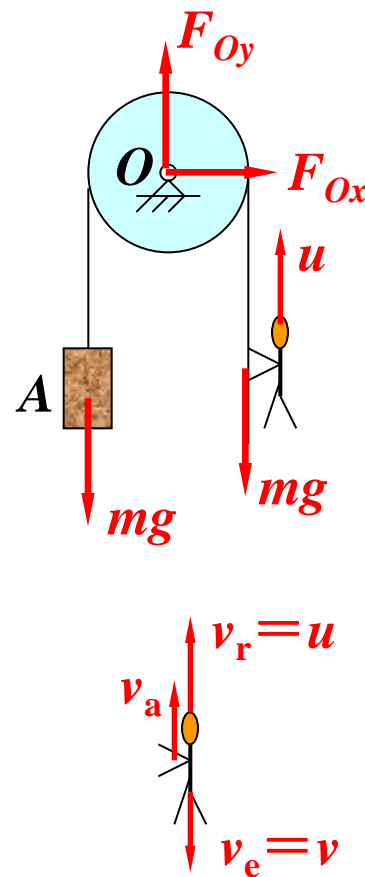
设重物A上升的速度为 $v$ ，则人的绝对速度 $v_a$ 的大小为

$$v_a = u - v$$

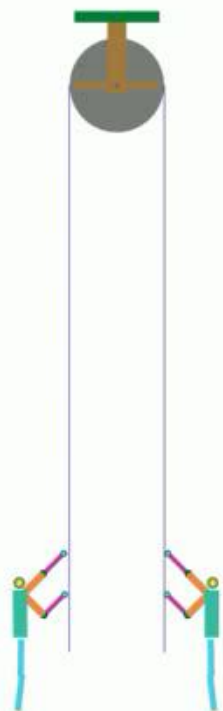
$$L_O = mv_a r - mvr = 0$$

$$L_O = m(u - v)r - mvr = 0 \quad v = \frac{u}{2} \quad v_a = \frac{u}{2}$$

由上可知，人与重物A具有相同的的速度，此速度等于人相对绳的速度的一半。如果开始时，人与重物A位于同一高度，则不论人以多大的相对速度爬绳，人与重物A将始终保持相同的高度。



## 爬绳比赛



$$m_a = m_b$$

$$v_{a_{\text{相对}}} < v_{b_{\text{相对}}}$$

$$v_{a_{\text{绝对}}} = v_{b_{\text{绝对}}}$$



清华大学  
Tsinghua University

## § 11-3 刚体定轴转动微分方程

### 一、刚体定轴转动微分方程

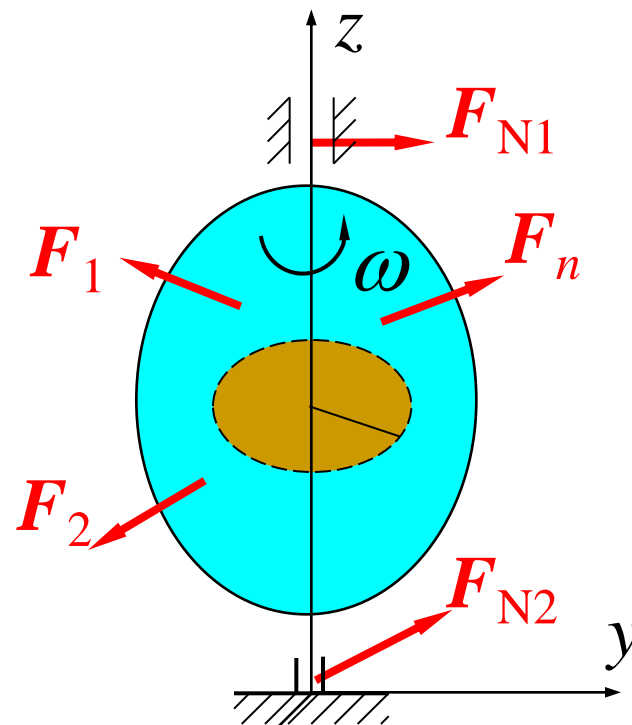
对于一个定轴转动刚体  $L_z = J_z \omega$

代入质点系动量矩定理，有

$$\frac{d}{dt}(J_z \omega) = \Sigma M_z(F^{(e)})$$

于是，得到刚体定轴转动微分方程

$$\therefore J_z \alpha = \Sigma M_z(F^{(e)}) \text{ 或 } J_z \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \Sigma M_z(F^{(e)})$$





解决两类问题：

① 已知作用在刚体的外力矩，求刚体的转动规律。

② 已知刚体的转动规律，求作用于刚体的外力（矩）。

但不能求出轴承处的约束力，需用质心运动定理求解。

特殊情况：

若  $\sum M_z(F^{(e)}) = 0$ ，则  $\alpha = 0$ ,  $\omega = \text{恒量}$ ，刚体作匀速转动或保持静止。

若  $\sum M_z(F^{(e)}) = \text{常量}$ ，则  $\alpha = \text{常量}$ ，刚体作匀变速转动。

将  $J_z \alpha = M_z^{(e)}$  与  $ma = F$  比较，刚体的转动惯量  $J_z$  是刚体转动惯性的度量。

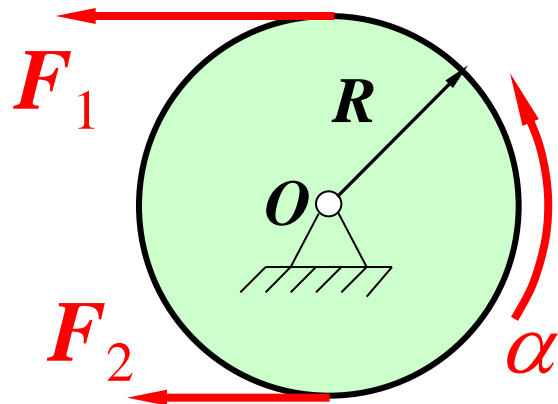
[例] 如图所示，已知滑轮半径为 $R$ ，转动惯量为 $J$ ，带动滑轮的皮带拉力为 $F_1$ 和 $F_2$ 。求滑轮的角加速度 $\alpha$ 。

解：由刚体定轴转动的微分方程

$$J\alpha = R(F_1 - F_2)$$

于是得

$$\alpha = \frac{(F_1 - F_2)R}{J}$$



由上式可见，只有当定滑轮匀速转动（包括静止）或虽非匀速转动，但可忽略滑轮的转动惯量时，跨过定滑轮的皮带拉力才是相等的。

[例]如图，飞轮对转轴的转动惯量为 $J$ ，以初角速度 $\omega_0$ 绕水平轴转动，其阻力矩  $M = -\beta\omega$  ( $\beta$  为常数)。求经过多长时间，角速度降至初角速度的一半，在此时间内共转多少转？

解：以飞轮为研究对象，由刚体定轴转动的微分方程，有

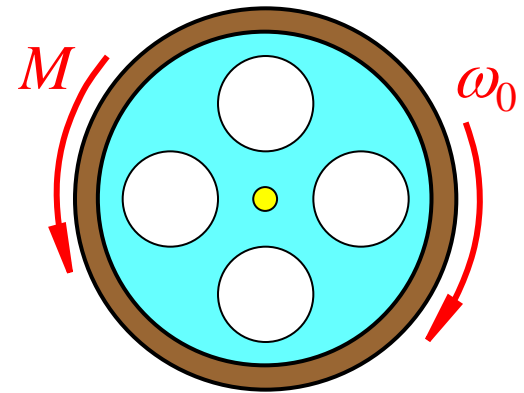
$$J \frac{d\omega}{dt} = -\beta\omega \quad (1)$$

将 (1) 式变换，有

$$\frac{J}{\beta} \frac{d\omega}{\omega} = -dt$$

将上式求定积分，得

$$\int_{\omega_0}^{\frac{\omega_0}{2}} \frac{J}{\beta} \frac{d\omega}{\omega} = -\int_0^t dt$$



$$t = \frac{J}{\beta} \ln \frac{\omega_0}{\omega_0/2} = \frac{J}{\beta} \ln 2$$

将  $J \frac{d\omega}{dt} = -\beta\omega$  改写为

$$J \frac{d\omega}{dt} = -\beta \frac{d\varphi}{dt}$$

即  $J d\omega = -\beta d\varphi$

将上式求定积分，得

$$\int_{\omega_0}^{\frac{\omega_0}{2}} J d\omega = -\int_{\varphi_0}^{\varphi} \beta d\varphi$$

转过的角度为

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{J}{2\beta} \omega_0$$

因此转过的转数

$$n = \frac{\varphi - \varphi_0}{2\pi} = \frac{J\omega_0}{4\pi\beta}$$

[例] 如图所示，啮合齿轮各绕定轴  $O_1$ 、 $O_2$  转动，其半径分别为  $r_1$ 、 $r_2$ ，质量分别为  $m_1$ 、 $m_2$ ，转动惯量分别为  $J_1$ 、 $J_2$ ，今在轮  $O_1$  上作用一力矩  $M$ ，求其角加速度。

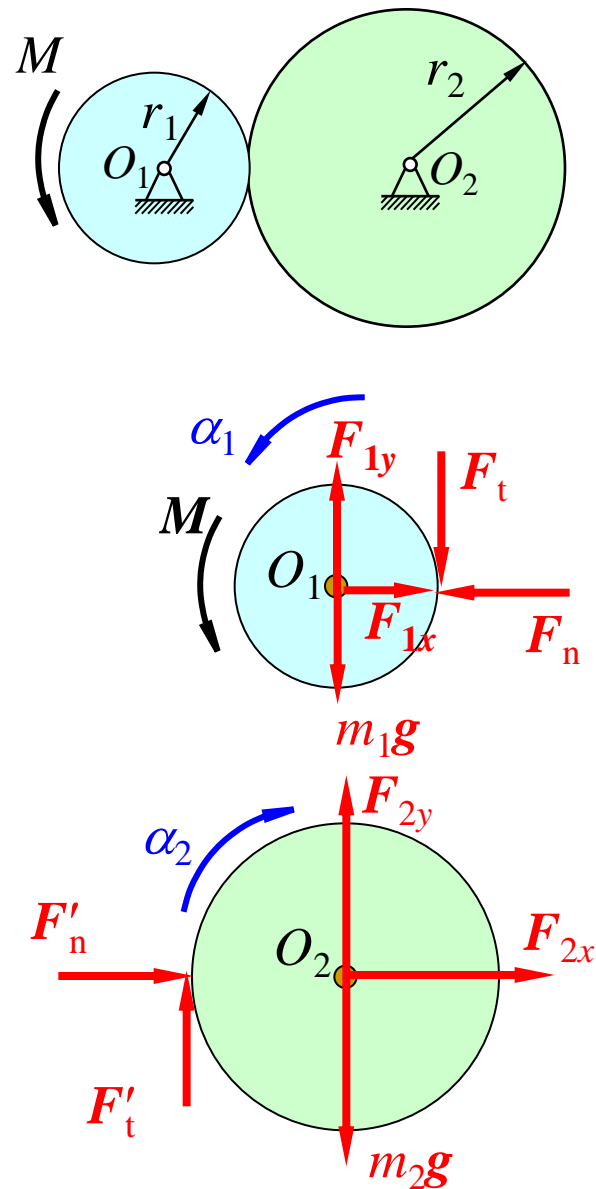
解：分别以两轮为研究对象，受力如图，由刚体定轴转动的微分方程，有

$$J_1 \alpha_1 = M - F_t r_1, \quad J_2 \alpha_2 = F'_t r_2$$

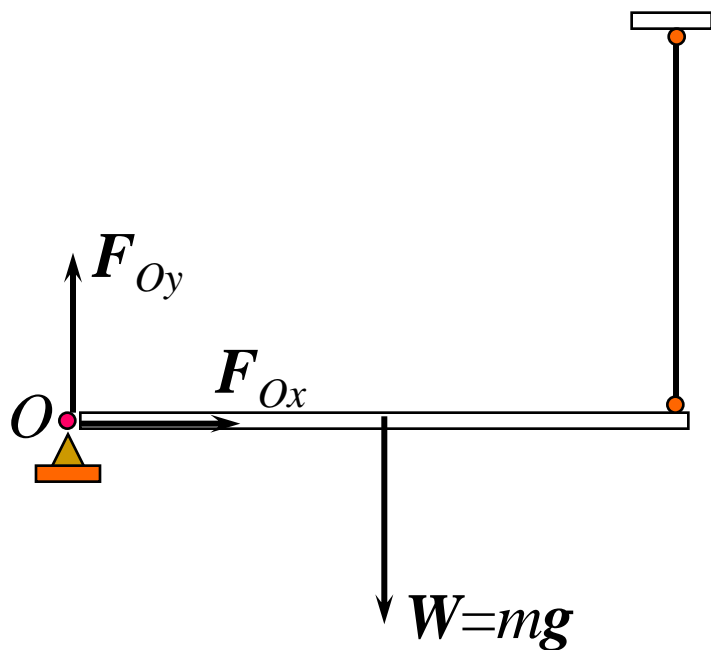
由运动学关系，得  $\alpha_1 r_1 = \alpha_2 r_2$

注意到  $F_t = F'_t$ ，联立求解以上三式得

$$\alpha_1 = \frac{Mr_2^2}{J_1 r_2^2 + J_2 r_1^2}$$

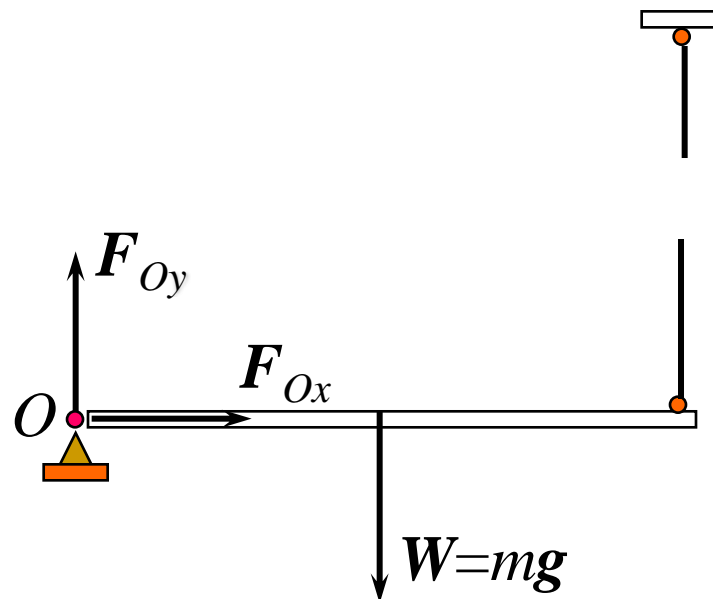


## [例] 关于突然解除约束问题



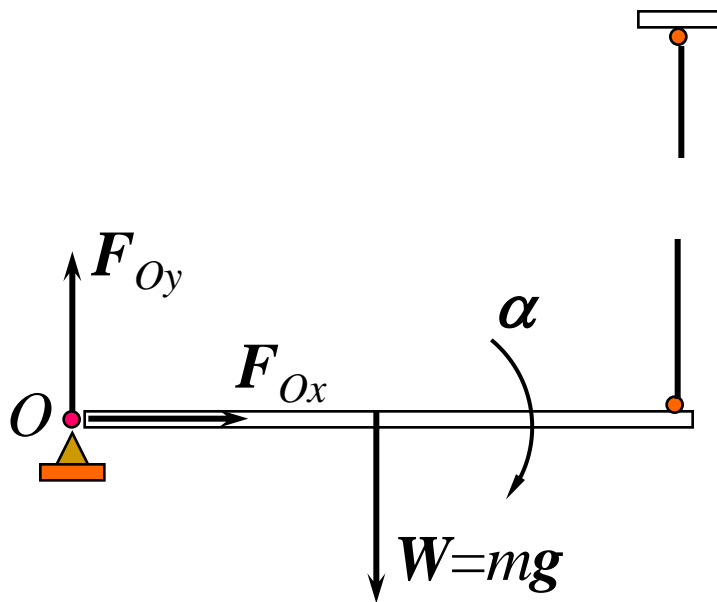
解除约束前:

$$F_{Ox}=0, F_{Oy}=mg/2$$



突然解除约束瞬时:

$$F_{Ox}=?, F_{Oy}=?$$



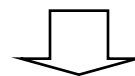
## 应用定轴转动微分方程

$$\frac{1}{3}ml^2\alpha = mg \times \frac{l}{2}, \quad \alpha = \frac{3g}{2l}$$

## 应用质心运动定理

$$m \times \frac{l}{2} \omega^2 = 0 = F_{Ox}$$

$$m \times \frac{l}{2} \alpha = mg - F_{Oy}$$



$$F_{Ox} = 0$$

$$F_{Oy} = mg - m \times \frac{l}{2} \alpha = \frac{mg}{4}$$

突然解除约束瞬时，杆 $OA$ 将绕 $O$ 轴转动，不再是静力学问题。这时， $\omega=0$ ， $\alpha \neq 0$ 。需要先求出 $\alpha$ ，再确定约束力。

## § 11-4 刚体对轴的转动惯量

一、定义 
$$J_z = \sum m_i r_i^2$$

若刚体的质量是连续分布，则 
$$J_z = \int_m r^2 dm$$

刚体的转动惯量是刚体对某轴转动惯性大小的度量，它的大小表现了刚体转动状态改变的难易程度。转动惯量不仅与质量有关，而且与质量的分布有关；在国际单位制中，转动惯量的单位是： $\text{kg m}^2$ 。同一刚体对不同轴的转动惯量是不同的，而它对某定轴的转动惯量却是常数。因此在谈及转动惯量时，必须指明它是对哪一轴的转动惯量。



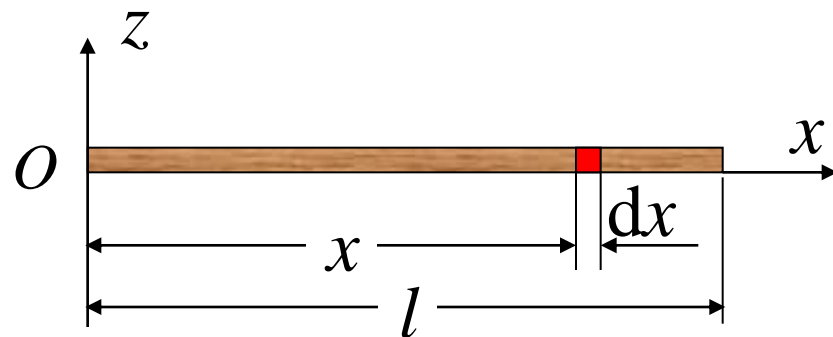
## 二、转动惯量的计算

### 1、积分法（具有规则几何形状的均匀刚体可采用）

均质细直杆长为 $l$ ，质量为 $m$ 。

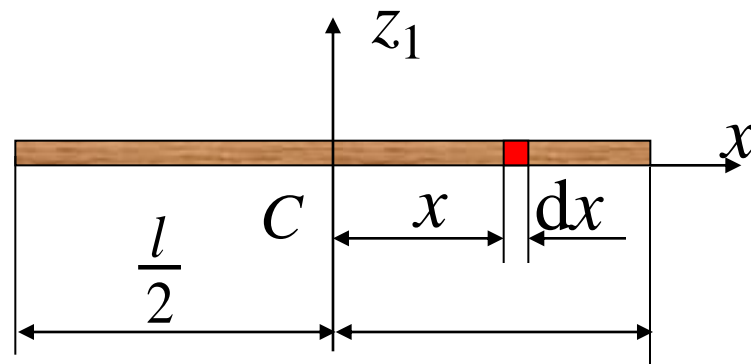
求：对 $z$ 轴的转动惯量 $J_z$ ；

对 $z_1$ 轴的转动惯量 $J_{z_1}$ 。



$$\text{解: } J_z = \int_0^l x^2 \cdot \frac{m}{l} dx = \frac{1}{3} ml^2$$

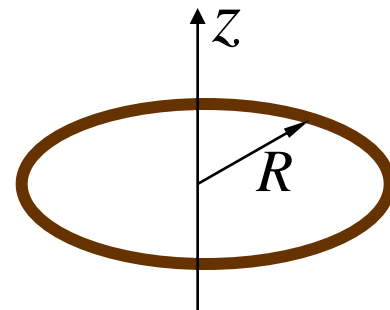
$$J_{z_1} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{1}{12} ml^2$$



## 均质薄圆环对于中心轴的转动惯量

设细圆环的质量为 $m$ ，半径为 $R$ 。则

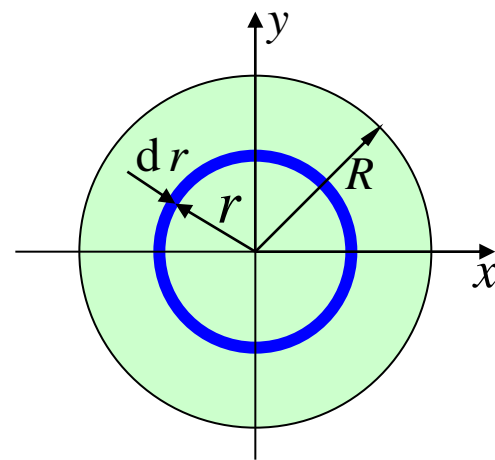
$$J_z = \sum m_i r_i^2 = R^2 \sum m_i = mR^2$$



## 均质圆板对于中心轴的转动惯量

设圆板的质量为 $m$ ，半径为 $R$ 。将圆板分为无数同心的薄圆环，任一圆环的质量为 $dm = \rho \cdot 2\pi r dr$ ， $\rho = m/\pi R^2$ ，于是圆板转动惯量为

$$J_z = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \cdot \rho \cdot 2\pi r dr = \frac{1}{2}mR^2$$



## 2、回转半径

由  $\rho_z = \sqrt{\frac{J_z}{m}}$  所定义的长度  $\rho_z$  称为刚体对  $z$  轴的回转半径。

$$J_z = m\rho_z^2$$

对于均质刚体,  $\rho_z$  仅与几何形状有关, 与密度无关。对于几何形状相同而材料不同 (密度不同) 的均质刚体, 其回转半径是相同的。

在机械工程设计手册中, 可以查阅到简单几何形状或已标准化的零件的转动惯量和回转半径。书中列出几种常见均质刚体的  $J_z$  和  $\rho_z$ , 以供参考。

### 3、平行移轴定理

刚体对某轴的转动惯量等于刚体对通过质心且与该轴平行的轴的转动惯量，加上刚体的质量与两轴间距离的平方之乘积。

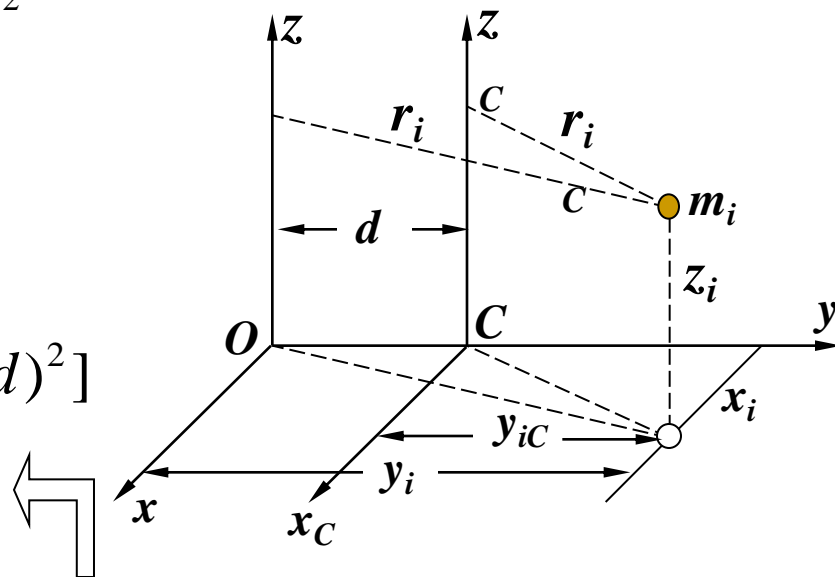
$$J_z = J_{zC} + md^2$$

$$J_{zC} = \sum m_i r_{iC}^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_{iC}^2)$$

$$\begin{aligned} J_z &= \sum m_i r_i^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \\ &= \sum m_i [x_i^2 + (y_{iC} + d)^2] \end{aligned}$$

$$\sum m_i y_{iC} = 0$$

$$J_z = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) + (\sum m_i) d^2 + 2d \sum m_i y_{iC} = J_{zC} + md^2$$



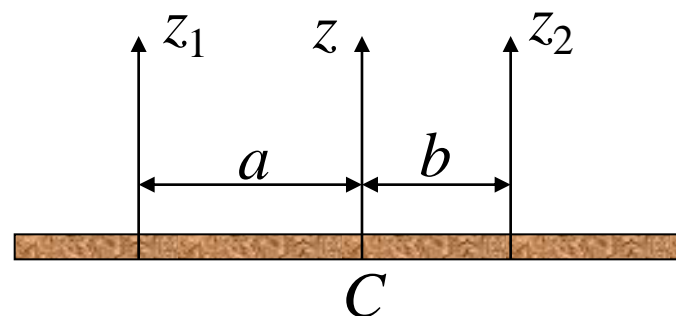
刚体对通过质心轴的转动惯量具有最小值。

[例] 如图所示，已知均质杆的质量为 $m$ ，对 $z_1$ 轴的转动惯量为 $J_1$ ，求杆对 $z_2$ 的转动惯量 $J_2$ 。

解：由  $J_z = J_{zC} + md^2$ ，得

$$J_1 = J_{zC} + ma^2 \quad (1)$$

$$J_2 = J_{zC} + mb^2 \quad (2)$$



$$(1)-(2) \text{ 得 } J_2 = J_1 + m(b^2 - a^2)$$

#### 4、计算转动惯量的组合法

当物体由几个规则几何形状的对象组成时，可先计算每一部分(对象)的转动惯量，然后再加起来就是整个对象的转动惯量。若对象有空心部分，要把此部分的转动惯量视为负值来处理。

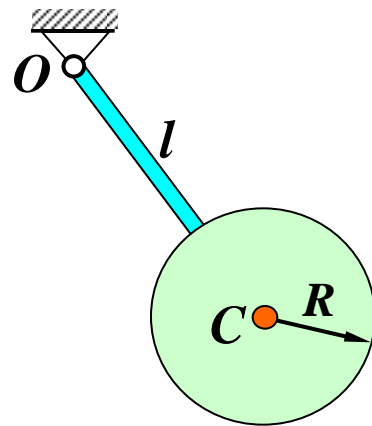
[例] 钟摆：均质直杆 $m_1, l$ ；

均质圆盘： $m_2, R$ 。求 $J_O$ 。

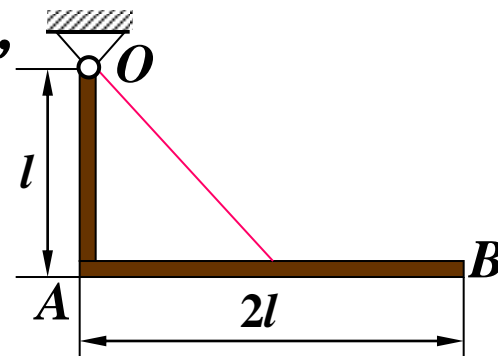
解： $J_O = J_{O1} + J_{O2}$

$$= \frac{1}{3}m_1l^2 + \frac{1}{2}m_2R^2 + m_2(l+R)^2$$

$$= \frac{1}{3}m_1l^2 + \frac{1}{2}m_2(3R^2 + 2l^2 + 4lR)$$

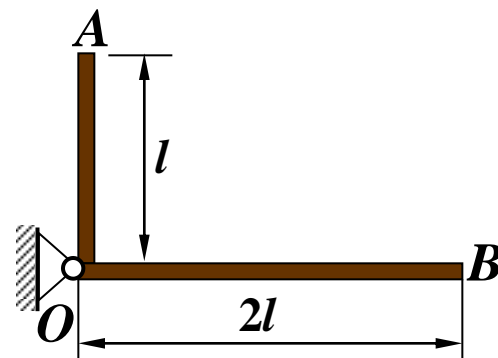
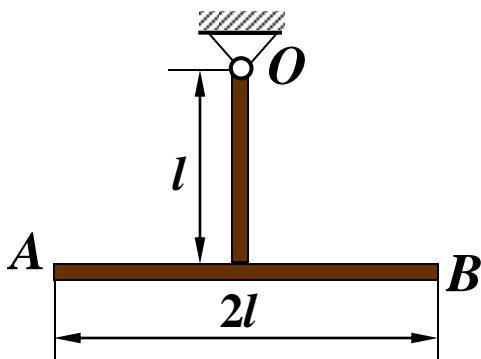


[例] 均质直角折杆尺寸如图，其质量为 $3m$ ，求其对轴 $O$ 的转动惯量。



$$\begin{aligned} \text{解: } J_O &= J_{OA} + J_{AB} \\ &= \frac{1}{3}ml^2 + \frac{1}{12}(2m)(2l)^2 + (2m)(\sqrt{2}l)^2 \\ &= 5ml^2 \end{aligned}$$

计算下列组合杆对轴 $O$ 的转动惯量



[例] 如图所示, 质量为 $m$ 的均质空心圆柱体外径为 $R_1$ , 内径为 $R_2$ 。  
求对中心轴 $z$ 的转动惯量。

解: 空心圆柱可看成由两个实心圆柱体组成, 外圆柱体的转动惯量为 $J_1$ , 内圆柱体的转动惯量为 $J_2$ 取负值, 即

$$J_z = J_1 - J_2$$

设 $m_1$ 、 $m_2$ 分别为外、内圆柱体的质量, 则

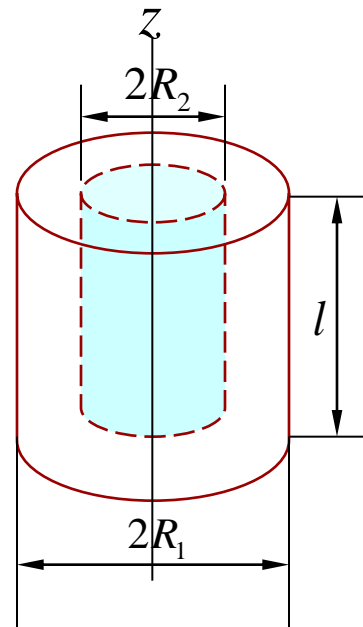
$$J_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 \quad J_2 = \frac{1}{2} m_2 R_2^2$$

于是 
$$J_z = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 - \frac{1}{2} m_2 R_2^2$$

设单位体积的质量为 $\rho$ , 则  $m_1 = \rho \pi R_1^2 l$ ,  $m_2 = \rho \pi R_2^2 l$

$$J_z = \frac{1}{2} \rho \pi l (R_1^4 - R_2^4) = \frac{1}{2} \rho \pi l (R_1^2 - R_2^2)(R_1^2 + R_2^2)$$

注意到 $\rho \pi l (R_1^2 - R_2^2) = m$ , 则得 
$$J_z = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2)$$



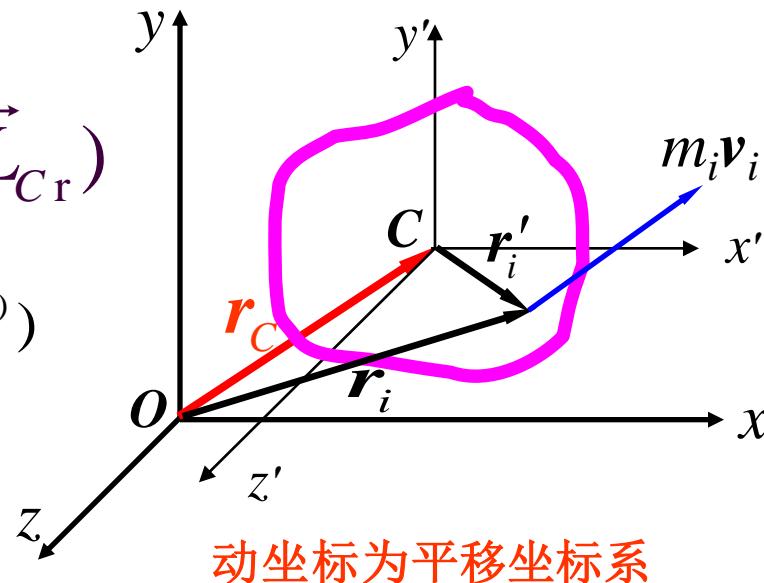


## § 11-5 质点系相对于质心的动量矩定理

$$\vec{L}_O = \vec{r}_C \times m\vec{v}_C + \vec{L}_C \quad (\text{其中 } \vec{L}_C = \vec{L}_{Cr})$$

若  $O$  为固定点, 有  $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i^{(e)})$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_C \times m\vec{v}_C + \vec{L}_C) = \sum (\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)})$$



上式左边求导展开, 右边代入  $\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{r}'_i$  也展开, 得

$$\frac{d\vec{r}_C}{dt} \times m\vec{v}_C + \vec{r}_C \times \frac{d(m\vec{v}_C)}{dt} + \frac{d\vec{L}_C}{dt} = \sum (\vec{r}_C \times \vec{F}_i^{(e)}) + \sum (\vec{r}'_i \times \vec{F}_i^{(e)})$$

=0
相等

质点系相对质心的动量矩定理

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \frac{d\vec{L}_{Cr}}{dt} = \sum \vec{M}_C(\vec{F}^{(e)})$$

质点系相对于质心的动量矩的改变，只与作用在质点系上的外力有关，而与内力无关。

当外力系对质心的主矩等于零时，质点系对于质心的动量矩保持不变。

质点系相对于质心和固定点的动量矩定理，具有完全相似的数学形式，而对于质心以外的其它动点，一般并不存在这种简单的关系。



## § 11-6 刚体平面运动微分方程

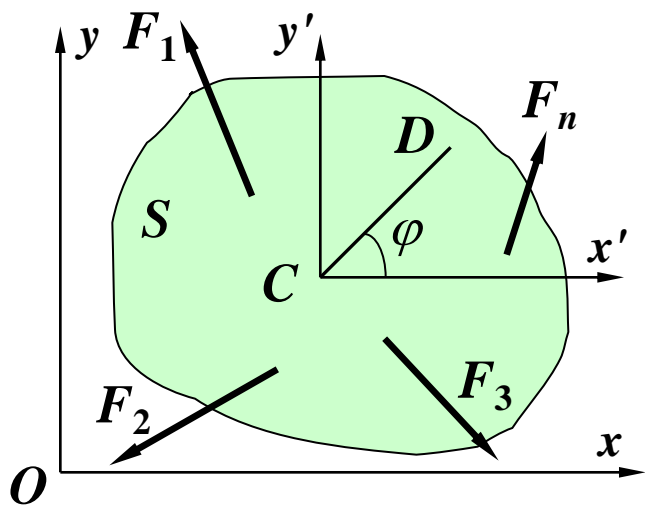
设平面运动刚体具有质量对称平面，力系 $F_1, F_2 \dots F_n$ 可以简化为该平面内的一个平面力系。取质量对称平面为平面图形 $S$ ，质心一定位于 $S$ 内。

取质心 $C$ 为动系原点，则此平面运动可分解为

随质心 $C$ 的平移  $(x_C, y_C)$

绕质心 $C$ 的转动  $(\varphi)$

可通过质心运动定理和相对质心的动量矩定理来确定。



$$\because L_{C_r} = J_C \omega, \quad \frac{dL_{C_r}}{dt} = J_C \alpha = J_C \ddot{\varphi}$$

$$\therefore m\vec{a}_C = \sum \vec{F}^{(e)}, \quad J_C \alpha = \sum M_C(\vec{F}^{(e)})$$

以上两式称为**刚体平面运动微分方程**。应用时，前一式取其投影式。即

$$\begin{cases} ma_{Cx} = m\ddot{x}_C = \sum F_x^{(e)} \\ ma_{Cy} = m\ddot{y}_C = \sum F_y^{(e)} \\ J_C\alpha = J_C\ddot{\varphi} = \sum M_C(\mathbf{F}^{(e)}) \end{cases}$$

[例]提升装置中，轮A、B的重量分别为 $P_1$ 和 $P_2$ ，半径分别为 $R_1$ 和 $R_2$ ，视为均质圆盘；物体C的重量为 $P_3$ ；轮A上作用常力偶矩 $M$ 。求物体C上升的加速度。

解：取轮A为研究对象

$$\frac{1}{2} \frac{P_1}{g} R_1^2 \alpha_1 = M - F_T R_1$$

取轮B连同物体C为研究对象

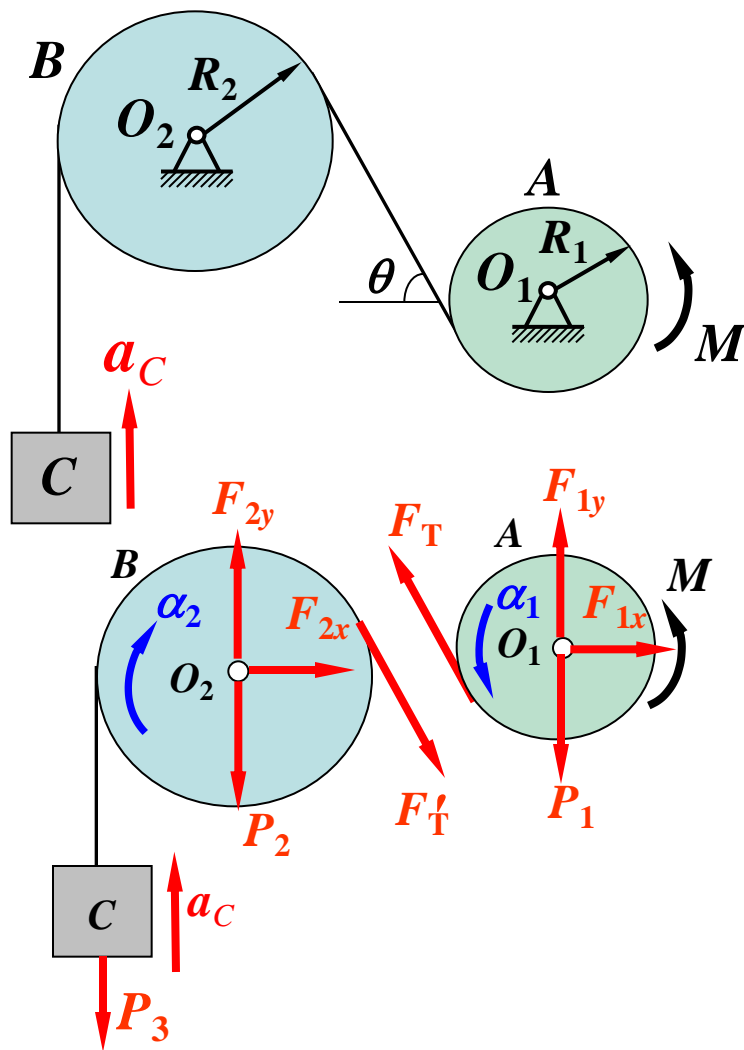
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} R_2^2 \omega_2 + \frac{P_3}{g} v_C R_2 \right) = F'_T R_2 - P_3 R_2$$

$$\text{即} \quad \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} R_2 \alpha_2 + \frac{P_3}{g} a_C = F'_T - P_3$$

补充运动学条件

$$R_2 \omega_2 = v_C, \quad R_2 \alpha_2 = a_C = R_1 \alpha_1$$

$$\text{联立解得} \quad a_C = \frac{2(M / R_1 - P_3)}{P_1 + P_2 + 2P_3} g$$



[例] 一均质圆柱，质量为 $m$ ，半径为 $r$ ，无初速地放在倾角为 $\theta$ 的斜面上，不计滚动阻力，求其质心的加速度。

解：以圆柱体为研究对象。圆柱体在斜面上的运动形式，取决于接触处的光滑程度，下面分三种情况进行讨论：

(1) 设接触处完全光滑 此时圆柱作平移

由质心运动定理  $ma_C = mg \sin \theta$

得圆柱质心的加速度  $a_C = g \sin \theta$

(2) 设接触处足够粗糙

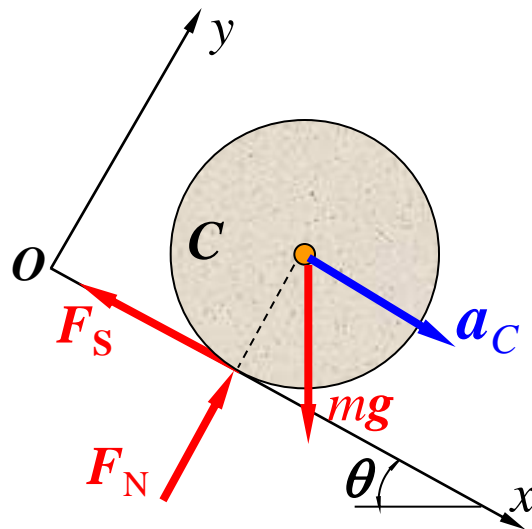
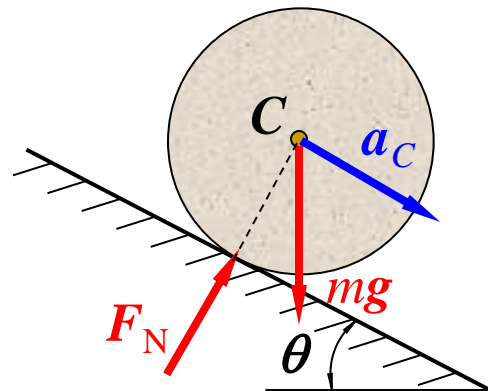
此时圆柱作纯滚动，列出平面运动微分方程

$$ma_C = mg \sin \theta - F_S$$

$$0 = F_N - mg \cos \theta$$

$$\frac{1}{2}mr^2\alpha = F_S r$$

由纯滚动条件有  $a_C = r\alpha$  解得  $a_C = \frac{2}{3}g \sin \theta$



$$F_s = \frac{1}{2} m a_c = \frac{1}{3} m g \sin \theta$$

由于圆柱作纯滚动, 故  $F_s \leq F_{\max} = f_s F_N = f_s m g \cos \theta$

所以  $f_s m g \cos \theta \geq \frac{1}{3} m g \sin \theta$ , 可得  $f_s \geq \frac{1}{3} \tan \theta$  这就是圆柱体在斜面上作纯滚动的条件。

**(3) 设不满足圆柱体在斜面上作纯滚动的条件  $f_s < \frac{1}{3} \tan \theta$**

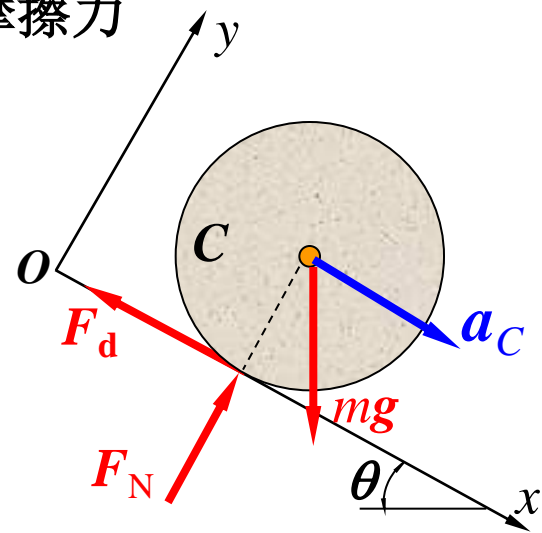
圆柱体在斜面上又滚又滑, 在这种情况下,  $a_c \neq r\alpha$

设圆柱体沿斜面滑动的动摩擦因数为  $f$ , 则滑动摩擦力

$$F_d = f F_N = f m g \cos \theta$$

于是 
$$\alpha = \frac{2 g f \cos \theta}{r}$$

$$a_c = g(\sin \theta - f \cos \theta)$$



[例]质量为 $m$ 长为 $l$ 的均质杆，在铅直平面内一端沿着水平地面，另一端沿着铅垂墙壁，从 $\varphi_0$ 角无初速地滑下，不计摩擦。求：(1)杆在任意位置时的角速度和角加速度；(2)开始滑动的瞬时，地面和墙壁对杆的约束力；(3)杆脱离墙时，杆与水平面所夹的角。

解：以任意位置的杆 $AB$ 为研究对象，受力如图。

杆作平面运动，设角速度和角加速度分别为 $\omega$ 和 $\alpha$ ，质心 $C$ 的加速度为 $a_{Cx}$ 、 $a_{Cy}$ ，

由刚体平面运动微分方程

$$ma_{Cx} = F_B \quad (1)$$

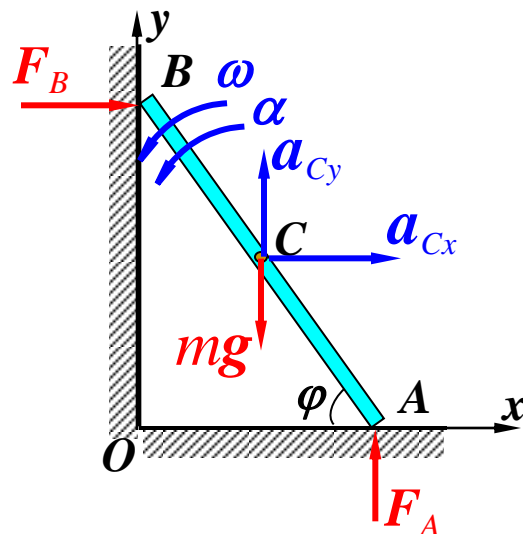
$$ma_{Cy} = F_A - mg \quad (2)$$

$$J_C \alpha = F_A \frac{l}{2} \cos \varphi - F_B \frac{l}{2} \sin \varphi \quad (3)$$

3个方程，5个未知量，必须补充运动学关系才能求解。

以 $C$ 点为基点，则 $A$ 点的加速度为  $\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{a}_{AC}^t + \boldsymbol{a}_{AC}^n$

$$= \boldsymbol{a}_{Cx} + \boldsymbol{a}_{Cy} + \boldsymbol{a}_{AC}^t + \boldsymbol{a}_{AC}^n$$





## 作加速度矢量图

在y轴上投影得  $a_{Cy} + a_{AC}^t \cos \varphi + a_{AC}^n \sin \varphi = 0$

即 
$$a_{Cy} = -\left(\frac{l}{2}\alpha \cos \varphi + \frac{l}{2}\omega^2 \sin \varphi\right) \quad (4)$$

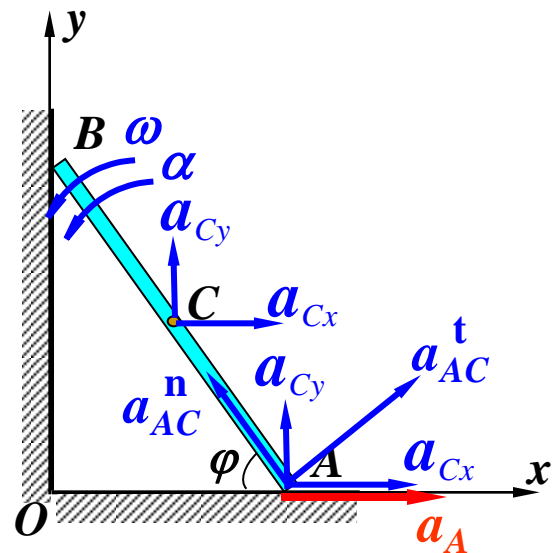
同理，以C为基点分析B的加速度，  
并在x轴上投影得

$$a_{Cx} = \frac{l}{2}\alpha \sin \varphi - \frac{l}{2}\omega^2 \cos \varphi \quad (5)$$

联立求解(1) ~ (5)式，并注意到  $J_C = \frac{1}{12}ml^2$  可得  $\alpha = \frac{3g}{2l} \cos \varphi$

$$\because \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = -\omega \frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{3g}{2l} \cos \varphi \quad \therefore \int_0^\omega \omega d\omega = -\int_{\varphi_0}^\varphi \frac{3g}{2l} \cos \varphi d\varphi$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l} (\sin \varphi_0 - \sin \varphi)}$$



$\omega$ 、 $\alpha$ 代入(4)、(5)求得 $a_{Cy}$ 、 $a_{Cx}$ 后再代入(1)、(2)得

任意瞬时的约束力

$$F_B = \frac{3}{4}mg(3\sin\varphi - 2\sin\varphi_0)\cos\varphi$$

$$F_A = \frac{mg}{4} + \frac{3mg}{4}(3\sin\varphi - 2\sin\varphi_0)\sin\varphi$$

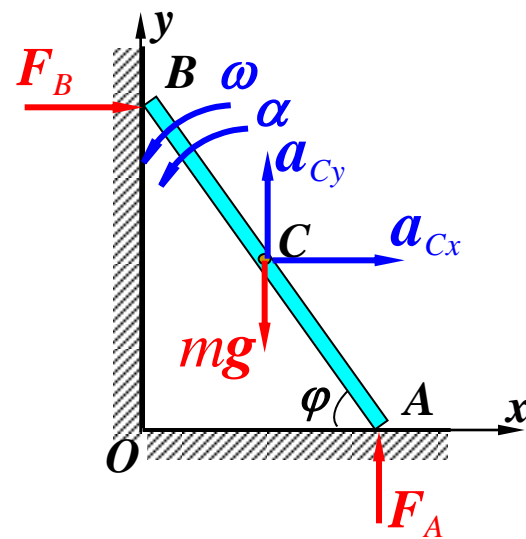
运动开始的初瞬时， $\varphi = \varphi_0$ ，代入上式得

$$F_B = \frac{3}{4}mg\sin\varphi_0\cos\varphi_0$$

$$F_A = mg + \frac{3}{4}mg\sin^2\varphi_0 = mg(1 + \frac{3}{4}\sin^2\varphi_0)$$

杆脱离墙时， $F_B=0$ 。设脱离墙时的夹角为 $\varphi_1$ ，则

$$3\sin\varphi_1 - 2\sin\varphi_0 = 0 \quad \varphi_1 = \arcsin(\frac{2}{3}\sin\varphi_0)$$



注： 亦可由坐标法求出 (4)、(5) 式：  $x_C = \frac{l}{2} \cos \varphi$ ,  $y_C = \frac{l}{2} \sin \varphi$

$$\dot{x}_C = -\frac{l}{2} \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}, \quad \dot{y}_C = \frac{l}{2} \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}$$

$$\ddot{x}_C = -\frac{l}{2} \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - \frac{l}{2} \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi}, \quad \ddot{y}_C = -\frac{l}{2} \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{l}{2} \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi}$$

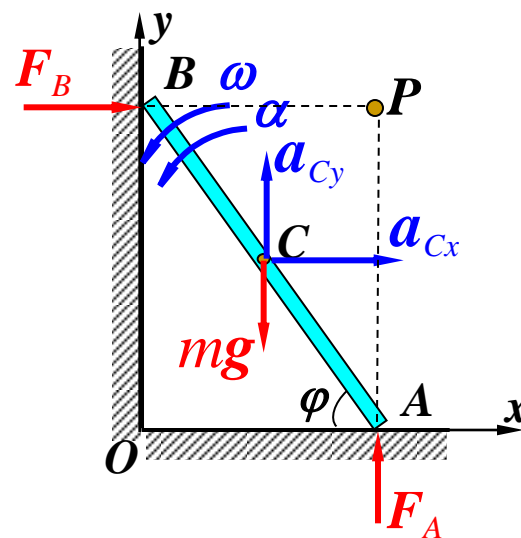
注 意：  $\ddot{x}_C = a_{Cx}$ ,  $\ddot{y}_C = a_{Cy}$ ,  $\dot{\varphi} = -\omega$ ,  $\ddot{\varphi} = -\alpha$

杆AB的速度瞬心为P，并且在运动过程中  $PC = \text{const}$ ，则对速度瞬心用动量矩定理：

$$J_P \alpha = \sum M_P(F^{(e)})$$

$$\frac{1}{3} m l^2 \alpha = m g \frac{l}{2} \cos \varphi \quad \alpha = \frac{3g}{2l} \cos \varphi$$

如果在运动过程中，**速度瞬心到质心的距离始终不变**，则可对速度瞬心用动量矩定理。



# 第十一章 动量矩定理习题课

## 一、基本概念

1、动量矩：物体某瞬时机械运动强弱的一种度量。

2、质点的动量矩： $\vec{M}_O(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v}$

3、质点系的动量矩： $\vec{L}_O = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$

4、转动惯量：物体转动时惯性的度量。

对于均匀直杆，细圆环，薄圆盘（圆柱）对过质心垂直于质量对称平面的转轴的转动惯量要熟记。

## 5、刚体动量矩计算

平移： $\vec{L}_O = \vec{r}_C \times m\vec{v}_C$  ,  $L_z = M_z(m\vec{v}_C)$

定轴转动： $L_z = J_z \omega$

平面运动： $L_z = M_z(m\vec{v}_C) + J_C \omega$

## 二、质点的动量矩定理及守恒

### 1、质点的动量矩定理

$$\frac{d}{dt}[\vec{M}_O(m\vec{v})] = \vec{M}_O(\vec{F}) \quad \text{或} \quad \frac{d}{dt}M_z(m\vec{v}) = M_z(\vec{F})$$

### 2、质点的动量矩守恒

若  $\vec{M}_O(\vec{F})=0$  ， 则  $\vec{M}_O(m\vec{v}) = \text{常矢量}$ 。

若  $M_z(\vec{F})=0$  ， 则  $M_z(m\vec{v}) = \text{常量}$ 。

## 三、质点系的动量矩定理及守恒

### 1、质点系的动量矩定理

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{M}_O(\vec{F}^{(e)}) \quad \text{或} \quad \frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}^{(e)})$$

### 2、质点系的动量矩守恒

若  $\sum \vec{M}_O(\vec{F}^{(e)})=0$  ， 则  $\vec{L}_O = \text{常矢量}$

若  $\sum M_z(\vec{F}^{(e)})=0$  ， 则  $L_z = \text{常量}$

## 四、质点系相对质心的动量矩定理

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \sum \vec{M}_C(\vec{F}^{(e)}) \quad \text{或} \quad \frac{dL_{Cz}}{dt} = \sum M_{Cz}(\vec{F}^{(e)})$$

## 五、刚体定轴转动微分方程和刚体平面运动微分方程

### 1、刚体定轴转动微分方程

$$J_z \alpha = \sum M_z(F)$$

### 2、刚体平面运动微分方程

$$\begin{array}{l} m\mathbf{a}_C = \sum \mathbf{F}^{(e)} \\ J_C \alpha = \sum M_C(\mathbf{F}^{(e)}) \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} ma_{Cx} = m\ddot{x}_C = \sum F_x^{(e)} \\ ma_{Cy} = m\ddot{y}_C = \sum F_y^{(e)} \\ J_C \alpha = J_C \ddot{\phi} = \sum M_C(\mathbf{F}^{(e)}) \end{cases}$$

## 六、动量矩定理的应用

应用动量矩定理，一般可以处理下列一些问题：

（对单轴传动系统尤为方便）

- 1、已知质点系的转动运动，求系统所受的外力或外力矩。
- 2、已知质点系所受的外力矩是常力矩或时间的函数，求刚体的角加速度或角速度的改变。
- 3、已知质点所受到的外力主矩或外力矩在某轴上的投影代数和等于零，应用动量矩守恒定理求角速度或角位移。

## 七、应用举例

[例]置于墙角半径为 $r$ 重量为 $P$ 的均质圆柱，初始角速度 $\omega_0$ ，各接触处的滑动摩擦因数均为 $f$ ，求使圆柱停止转动所需要的时间。P284,11-17

解：选取圆柱为研究对象。受力分析如图示。

运动分析：质心 $C$ 不动，刚体绕质心定轴转动。

根据刚体平面运动微分方程  $(a_{Cx}=0, a_{Cy}=0)$

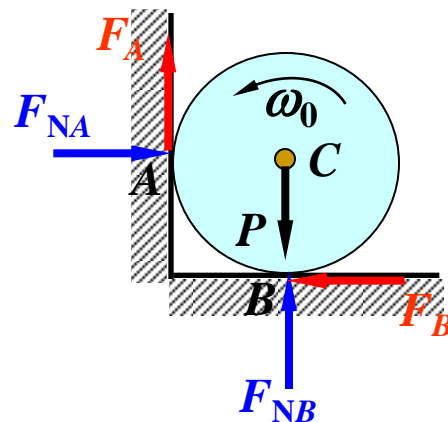
$$0 = F_{NA} - F_B \quad (1)$$

$$0 = F_A + F_{NB} - P \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \frac{P}{g} r^2 \frac{d\omega}{dt} = -F_A r - F_B r \quad (3)$$

$$\text{补充方程: } F_A = f F_{NA}, F_B = f F_{NB} \quad (4)$$

$$\text{将④式代入①、②两式，有 } (f^2 + 1)F_{NB} - P = 0$$





$$\therefore F_{NB} = \frac{P}{f^2 + 1}, \quad F_B = \frac{f P}{f^2 + 1}, \quad F_{NA} = \frac{f P}{f^2 + 1}, \quad F_A = \frac{f^2 P}{f^2 + 1}$$

将上述结果代入③式，有

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{1+f}{1+f^2} \cdot f \frac{2g}{r}$$

$$\int_{\omega_0}^0 d\omega = -\frac{2gf}{r} \cdot \frac{1+f}{1+f^2} \int_0^t dt$$

$$\text{解得：} \quad t = \frac{(1+f^2)r\omega_0}{2gf(1+f)}$$

[例] 均质圆柱体A和B的质量均为 $m$ ，半径均为 $r$ ，一绳缠在绕固定轴O转动的圆柱A上，绳的另一端绕在圆柱B上，绳重不计且不可伸长，不计轴O处摩擦。P286,11-28

求：1、圆柱B下落时质心的加速度。

2、若在圆柱体A上作用一逆时针转向的转矩 $M$ ，试问在什么条件下圆柱B的质心加速度将向上。

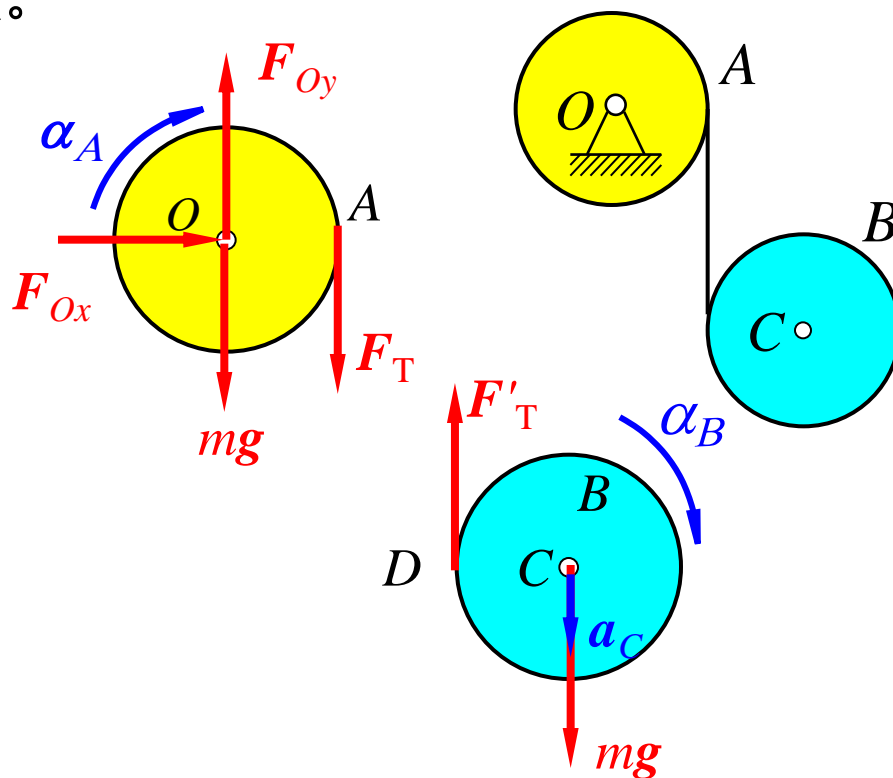
解：选圆柱A为研究对象

$$\frac{1}{2}mr^2\alpha_A = F_T r \quad (1)$$

选圆柱B为研究对象

$$\frac{1}{2}mr^2\alpha_B = F'_T r \quad (2)$$

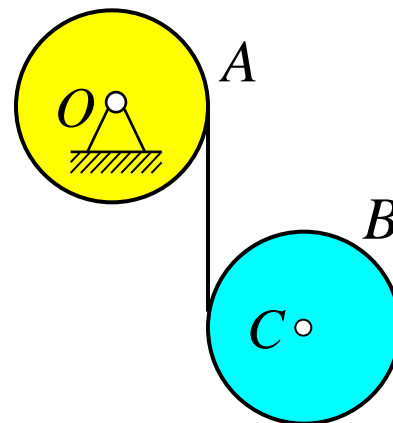
$$ma_C = mg - F'_T \quad (3)$$



$$\frac{1}{2}mr^2\alpha_A = F_T r \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}mr^2\alpha_B = F'_T r \quad (2)$$

$$ma_C = mg - F'_T \quad (3)$$



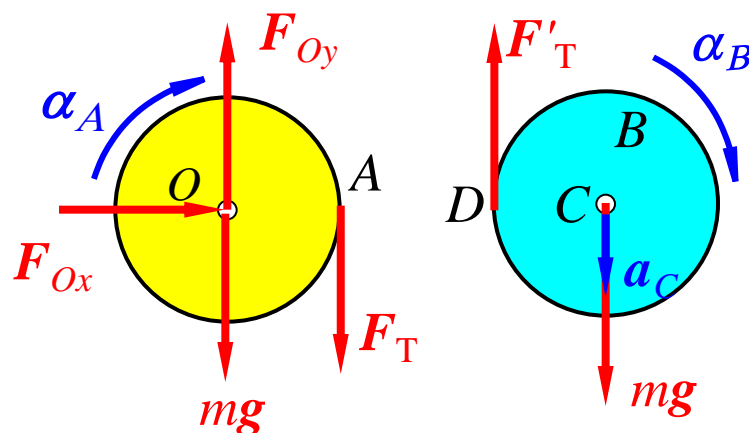
考虑运动学关系，有

$$a_C = r\alpha_A + r\alpha_B \quad (4)$$

由①、②式得：  $\alpha_A = \alpha_B$

代入③、④式得：  $\alpha_A = \alpha_B = \frac{2g}{5r}$

$$a_C = \frac{4}{5}g$$



再取系统为研究对象

$$L_O = \frac{1}{2}mr^2 \cdot \omega_A + mv_C \cdot 2r - \frac{1}{2}mr^2\omega_B$$

$$\Sigma M_O(F^{(e)}) = M - mg \cdot 2r$$

由动量矩定理:

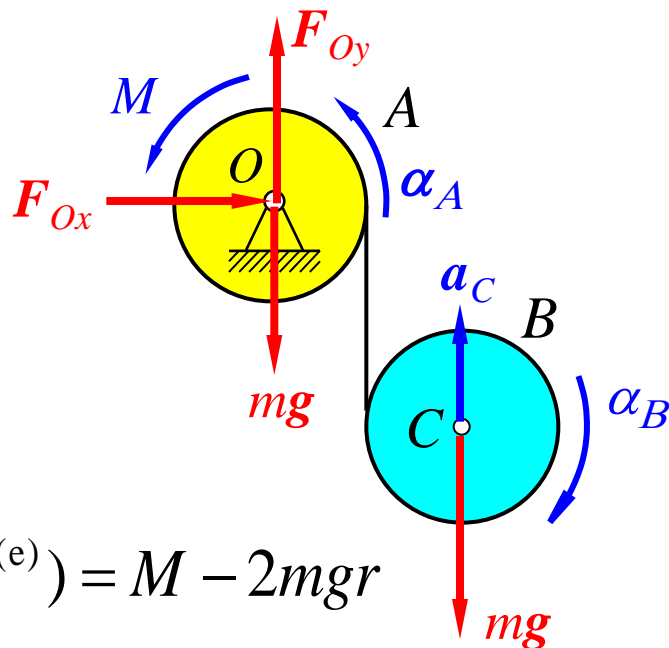
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}mr^2\omega_A + 2mv_Cr - \frac{1}{2}mr^2\omega_B \right) = \Sigma M_O(F^{(e)}) = M - 2mgr$$

$$\therefore \frac{1}{2}mr^2\alpha_A + 2mra_C - \frac{1}{2}mr^2\alpha_B = M - 2mgr \quad (1)$$

补充运动学关系式:  $a_C = r\alpha_A - r\alpha_B$       代入(1)式, 得

$$\frac{1}{2}mra_C + 2mra_C = M - 2mgr \quad ; \quad a_C = \frac{2(M - 2mgr)}{5mr}$$

当  $M > 2mgr$  时,  $a_C > 0$  , 圆柱B的质心C加速度将向上。



[例] 如图质量为 $m$ 的均质杆 $AB$ 用细绳吊住，已知两绳与水平方向的夹角为 $\varphi$ 。求 $B$ 端绳断开瞬时， $A$ 端绳的张力。



解：取杆分析，建立如图坐标。有

$$ma_{Cx} = -F_T + mg \sin \varphi$$

$$\frac{1}{12} ml^2 \alpha = F_T \frac{l}{2} \sin \varphi$$

$AB$ 作平面运动，以 $A$ 为基点，则

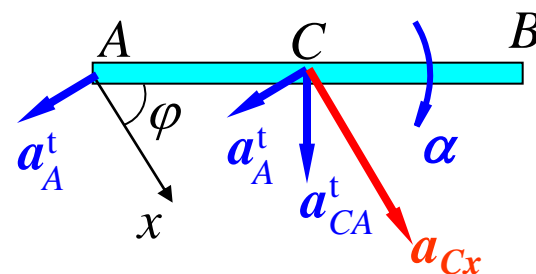
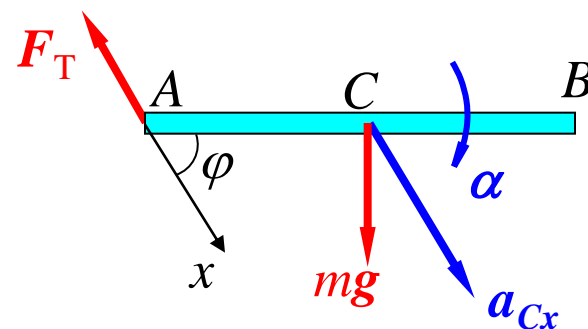
$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_A^t + \mathbf{a}_A^n + \mathbf{a}_{CA}^t + \mathbf{a}_{CA}^n$$

因为断开初瞬时， $v_A=0$ ， $\omega=0$ ，故  $\mathbf{a}_A^n=0$ ， $\mathbf{a}_{CA}^n=0$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_A^t + \mathbf{a}_{CA}^t$$

将上式投影到 $x$ 轴上，得  $a_{Cx} = a_{CA}^t \sin \varphi$

$$a_{CA}^t = \frac{l}{2} \alpha \quad a_{Cx} = \frac{l}{2} \alpha \sin \varphi \quad F_T = \frac{mg \sin \varphi}{1 + 3 \sin \varphi}$$



[例] 长为 $l$ ，质量为 $m$  的均质杆 $AB$  和 $BC$  用铰链 $B$ 联接，并用铰链 $A$ 固定，位于铅直平衡位置。今在  $C$  端作用一水平力 $F$ ，求此瞬时，两杆的角加速度。

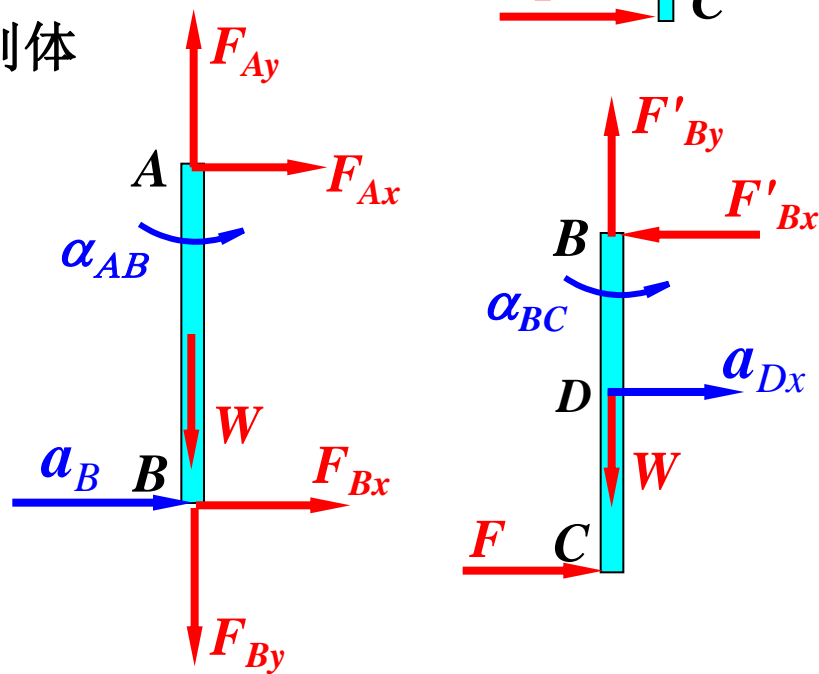
解：以 $AB$ 为研究对象，受力如图。由定轴转动的微分方程得

$$\frac{1}{3}ml^2\alpha_{AB} = F_{Bx}l \quad (1)$$

以 $BC$ 为研究对象，受力如图。由刚体平面运动的微分方程得

$$ma_{Dx} = F - F'_{Bx} \quad (2)$$

$$\frac{1}{12}ml^2\alpha_{BC} = F\frac{l}{2} + F'_{Bx}\frac{l}{2} \quad (3)$$



**$BC$ 作平面运动，取 $B$ 为基点，则**

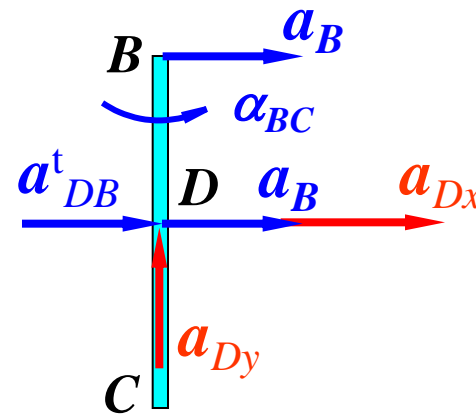
$$\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_{Dx} + \mathbf{a}_{Dy} = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{DB}^t + \mathbf{a}_{DB}^n$$

$$a_B = l\alpha_{AB}, \quad a_{DB}^t = \frac{l}{2}\alpha_{BC}, \quad a_{DB}^n = 0$$

将以上矢量式投影到水平方向，得

$$a_{Dx} = a_B + a_{DB}^t = l\alpha_{AB} + \frac{l}{2}\alpha_{BC} \quad (4)$$

由(1) ~ (4)联立解得  $\alpha_{AB} = -\frac{6F}{7ml}, \quad \alpha_{BC} = \frac{30F}{7ml}$



[例]平板质量为 $m_1$ ，受水平力 $F$ 作用而沿水平面运动，板与水平面间的动摩擦因数为 $f$ ，平板上放一质量为 $m_2$ 的均质圆柱，它相对平板只滚动不滑动，求平板的加速度。**P286,11-26**

解：取圆柱分析，受力如图。

由平面  
运动方程

$$m_2 a_O = F_1$$

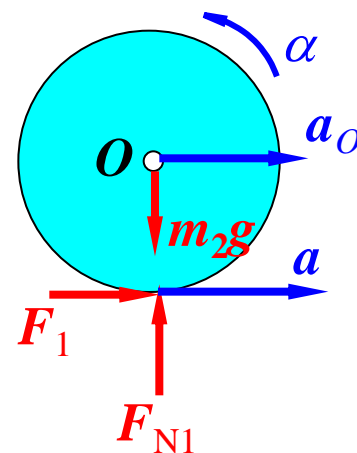
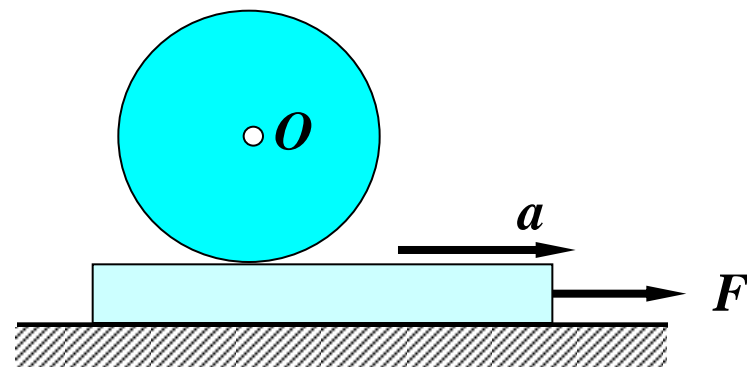
$$0 = F_{N1} - m_2 g$$

$$\frac{1}{2} m_2 r^2 \alpha = F_1 r$$

于是得：  $F_{N1} = m_2 g, \quad \alpha = \frac{2F_1}{m_2 r}$

$$a_O = a - r\alpha = a - \frac{2F_1}{m_2}$$

$$F_1 = \frac{1}{3} m_2 a$$





## 取板分析

$$m_1 a = F - F_2 - F'_1$$

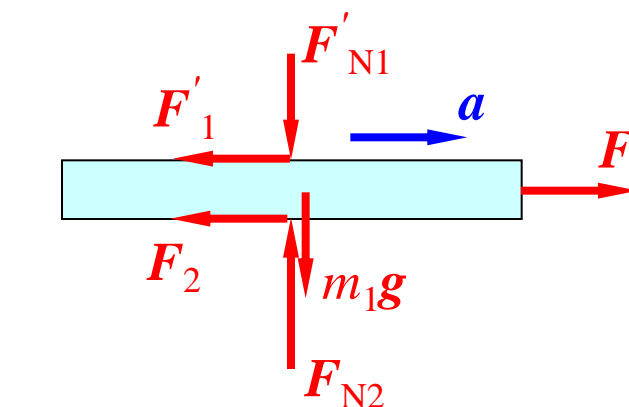
$$F_{N2} - m_1 g - F'_{N1} = 0$$

$$F_{N2} = (m_1 + m_2)g$$

$$F_2 = f(m_1 + m_2)g$$

$$m_1 a = F - f(m_1 + m_2)g - \frac{1}{3}m_2 a$$

$$a = \frac{F - f(m_1 + m_2)g}{m_1 + \frac{1}{3}m_2}$$



教材答案有误

[例]水平面上行星齿轮机构的曲柄 $OA$ 受力偶 $M$ 作用而绕固定水平轴 $O$ 转动，并带动齿轮 II 在固定齿轮 I 上滚动如图所示。设曲柄 $OA$ 为均质杆，长 $l$ 、质量为 $m_1$ ；齿轮 II 为均质圆盘，半径 $r$ 、质量为 $m_2$ 。试求曲柄的角加速度及两齿轮接触处沿切线方向的力。**P321, 12-12**

解：以曲柄为研究对象，画受力图，列转动方程

$$\frac{1}{3}m_1l^2\alpha = M - F_t l \quad (1)$$

取齿轮 II 分析，作受力图，列方程

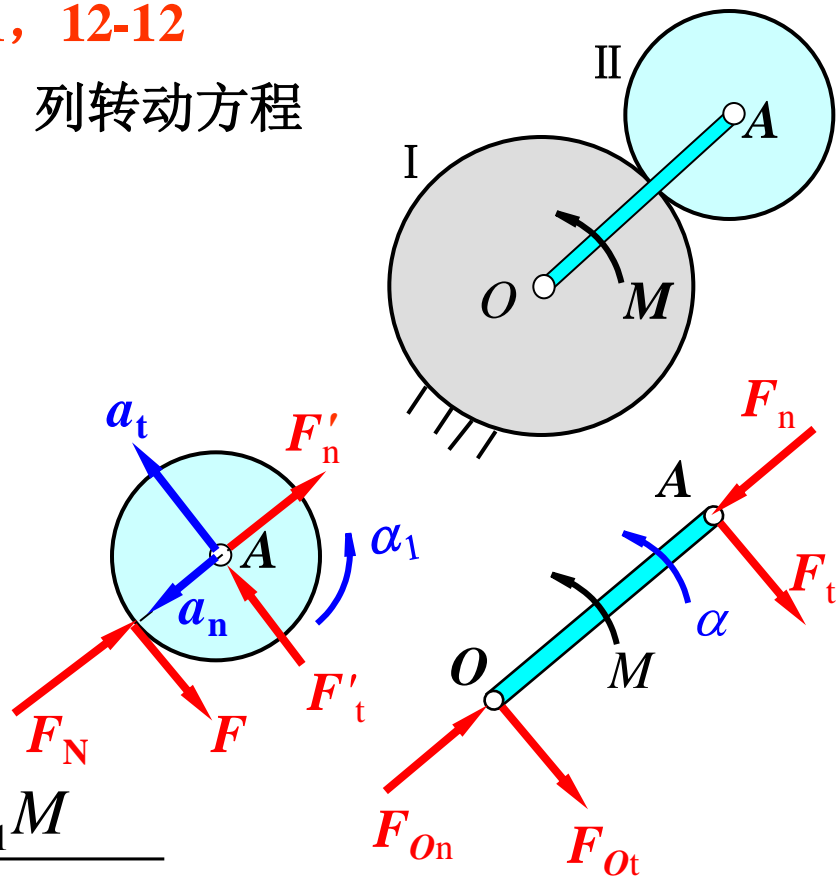
$$m_2a_t = F'_t - F \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}m_2r^2\alpha_1 = Fr \quad (3)$$

由运动学关系有  $a_t = r\alpha_1 = l\alpha$

联立求解得

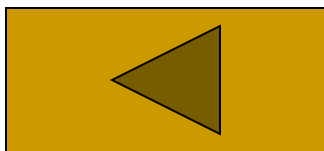
$$\alpha = \frac{6M}{(9m_1 + 2m_2)l^2} \quad F = \frac{3m_1M}{(9m_1 + 2m_2)l}$$



研究刚体平面运动的动力学问题，一定要建立运动学补充方程，找出质心运动与刚体转动之间的联系。

应用动量矩定理列方程时，要特别注意正负号的规定的一致性。

# 本章结束



# 理论力学

## 第十二章 动能定理

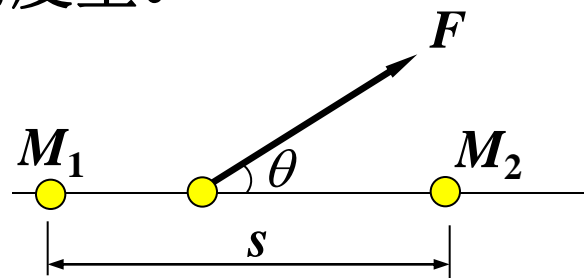
动能定理用能量法研究动力学问题。能量法不仅在机械运动的研究中有重要的应用，而且是沟通机械运动和其它形式运动的桥梁。动能定理建立了与运动有关的物理量—动能和作用力的物理量—功之间的联系，这是一种能量传递的规律。

## § 12-1 力的功

力的功是力沿路程累积效应的度量。

### 一、常力的功

$$\begin{aligned} W &= Fs \cos \theta \\ &= \vec{F} \cdot \vec{s} \end{aligned}$$



功是代数量。 $\theta < \frac{\pi}{2}$  时，正功； $\theta = \frac{\pi}{2}$  时，功为零； $\theta > \frac{\pi}{2}$  时，负功。

单位：焦耳（J）；  $1\text{J} = 1\text{N} \cdot \text{m}$

## 二、变力的功

设质点 $M$ 在变力 $F$ 的作用下沿曲线运动，力 $F$ 在微小弧段上所作的功称为力的元功，记为 $\delta W$ ，于是有

$$\delta W = F \cos \theta \cdot ds$$

力 $F$ 在曲线路程 $\widehat{M_1 M_2}$ 中做功为

$$W = \int_0^s F \cos \theta ds$$

自然法表示的  
功的计算公式

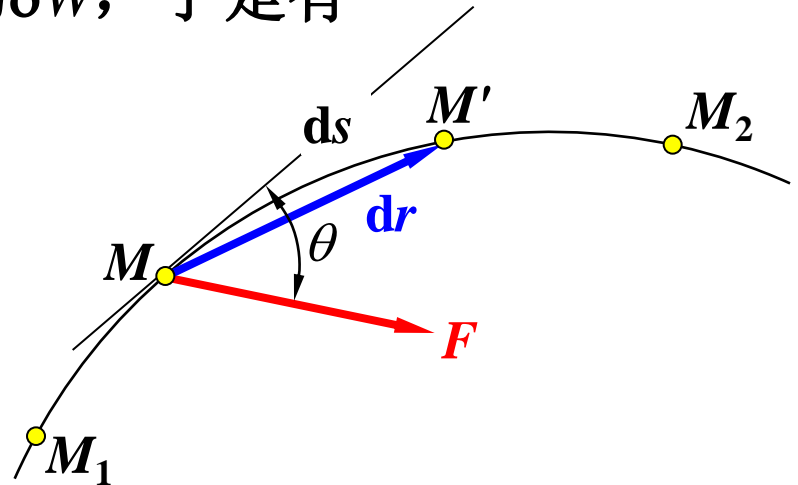
上两式可写成矢量点乘积形式

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad W = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

矢径法表示的  
功的计算公式

$$\delta W = F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad W = \int_{M_1}^{M_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

直角坐标法表示的功的计算公式，也称为功的解析表达式。



### 三、常见力的功

#### 1、重力的功

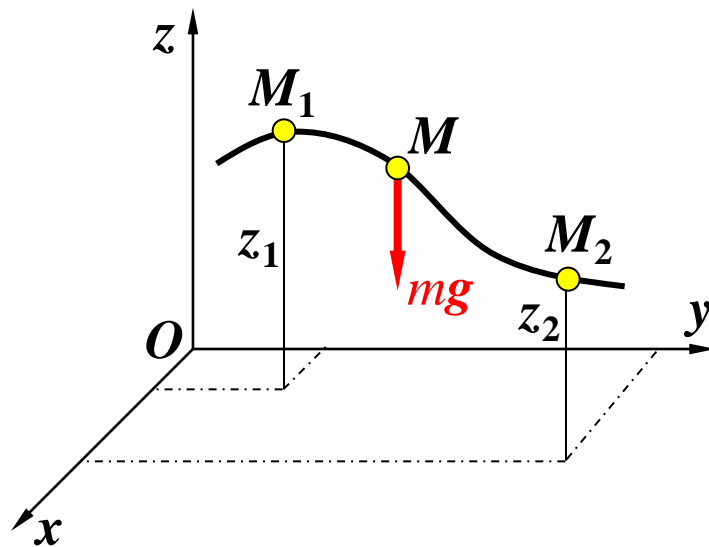
$$F_x = 0, F_y = 0, F_z = -mg$$

代入功的解析表达式得

$$W_{12} = \int_{z_1}^{z_2} (-mg) dz = mg(z_1 - z_2)$$

质点系：  $W = \sum W_i = \sum m_i g(z_{i1} - z_{i2}) = mg(z_{C1} - z_{C2})$

质点系重力的功，等于质点系的重量与其在始末位置重心的高度差的乘积，而与各质点运动的路径无关。





## 2、弹性力的功

弹簧原长 $l_0$ ，作用点的轨迹为图示曲线 $A_1A_2$ 。在弹性极限内 $\vec{F} = -k(r - l_0)\vec{r}_0$   
 $k$ —弹簧的刚性系数，表示使弹簧发生单位变形时所需的力(N/m)。

$$W = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{M_1}^{M_2} -k(r - l_0)\vec{r}_0 \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{r}_0 \cdot d\vec{r} = \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2r} d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = \frac{1}{2r} d(r^2) = dr$$

$$\therefore W = \int_{r_1}^{r_2} -k(r - l_0)dr = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{k}{2} d(r - l_0)^2$$

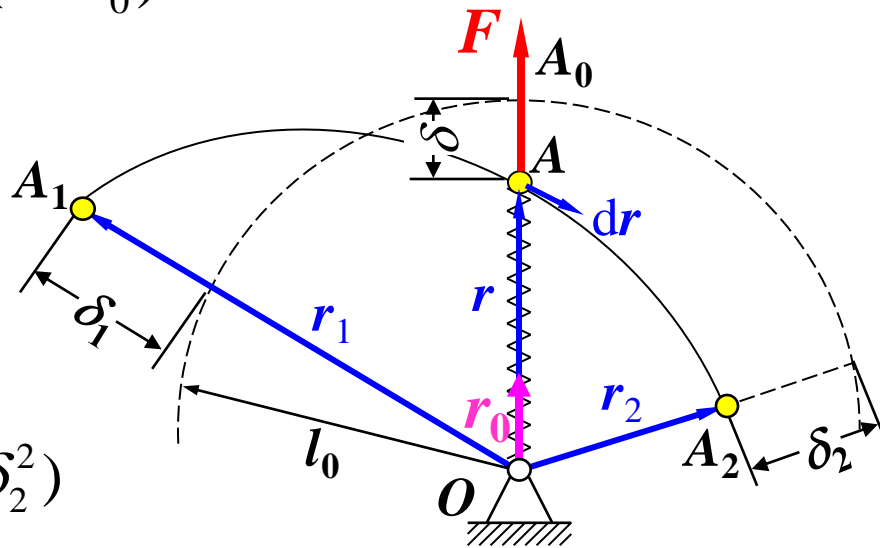
$$= \frac{k}{2} [(r_1 - l_0)^2 - (r_2 - l_0)^2]$$

令 $\delta_1 = r_1 - l_0$ ；初变形

$\delta_2 = r_2 - l_0$ ；末变形

$$\text{即 } W = \frac{k}{2} (\delta_1^2 - \delta_2^2) = \frac{k}{2} (\delta_{\text{初}}^2 - \delta_{\text{末}}^2)$$

**弹性力的功只与弹簧的起始变形和终了变形有关，与力作用点的路径无关。**



### 3、作用于转动刚体上的力的功，力偶的功

设作用在定轴转动刚体上A点的力为 $F$ ，  
将该力分解为 $F_t$ 、 $F_n$ 和 $F_b$ 。  $F_t = F \cos \theta$

当刚体转动时，转角 $\varphi$ 与弧长 $s$ 的关系为

$$ds = R d\varphi$$

$R$ 为点A到轴的垂距。力 $F$ 的元功为

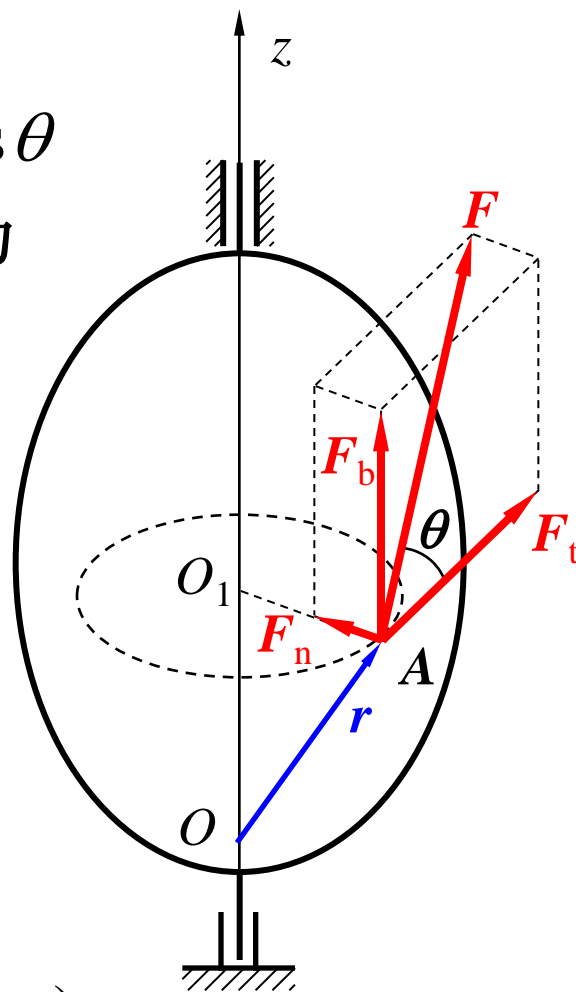
$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_t ds = F_t R d\varphi = M_z d\varphi$$

力 $F$ 在刚体从角 $\varphi_1$ 转到 $\varphi_2$ 所作的功为

$$W_{12} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi$$

作用面垂直转轴的常力  
偶 $M$ ，则力偶作的功为

$$W_{12} = M(\varphi_2 - \varphi_1)$$



## 4、摩擦力的功

(1) 动滑动摩擦力的功 
$$W = \int_{M_1}^{M_2} -F ds = -\int_{M_1}^{M_2} f F_N ds$$

$F_N$ =常量时,  $W = -f F_N s$ , 与质点的路径有关。

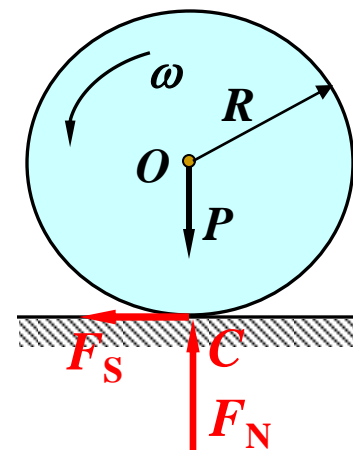
(2) 圆轮沿固定面作纯滚动时, 静滑动摩擦力的功。

法向力 $F_N$ , 静摩擦力 $F_S$ 作用于瞬心 $C$ 处, 而瞬心的元位移

$$d\vec{r} = \vec{v}_C dt = 0$$

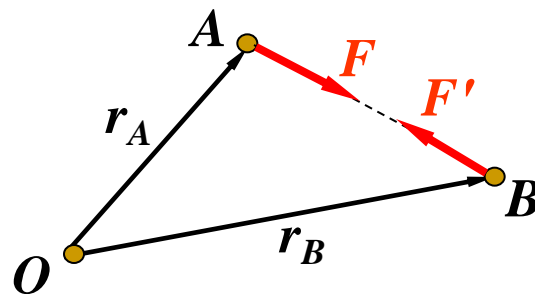
$$\delta W = \vec{F}_S \cdot d\vec{r} = \vec{F}_S \cdot \vec{v}_C dt = 0$$

圆轮沿固定面作纯滚动时,  
摩擦力是静摩擦力, 不作功!



## 5、质点系内力的功

$$\begin{aligned}\delta W &= \vec{F} \cdot d\vec{r}_A + \vec{F}' \cdot d\vec{r}_B \\ &= \vec{F} \cdot d\vec{r}_A - \vec{F} \cdot d\vec{r}_B \\ &= \vec{F} \cdot d(\vec{r}_A - \vec{r}_B) \\ &= \vec{F} \cdot d\vec{r}_{BA}\end{aligned}$$



只要A、B两点间距离保持不变，内力的元功和就等于零。

**刚体的内力功之和等于零，不可伸长的绳索内力功之和等于零，但变形体内力功之和不为零。**

## 6、任意运动刚体上力系的功

结论1：任意运动刚体上力系的功，等于刚体上所受各力作功的代数和。

结论2：任意运动刚体上力系的功，也等于力系向任一点（质心）简化所得的力与力偶做功之和。

## 四、理想约束力的功

约束力元功为零或元功之和为零的约束称为理想约束。

### 1、光滑固定面约束

$$\delta W = \vec{F}_N \cdot d\vec{r} = 0 \quad (\vec{F}_N \perp d\vec{r})$$

### 2、联接刚体的光滑铰链（中间铰）

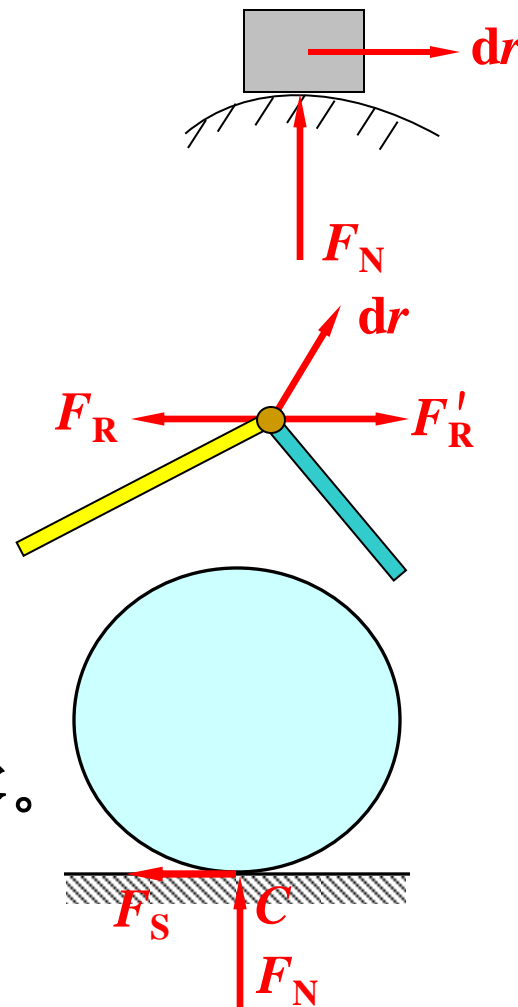
$$\sum \delta W = \vec{F}_R \cdot d\vec{r} + \vec{F}'_R \cdot d\vec{r} = \vec{F}_R \cdot d\vec{r} - \vec{F}_R \cdot d\vec{r} = 0$$

### 3、刚体沿固定面作纯滚动

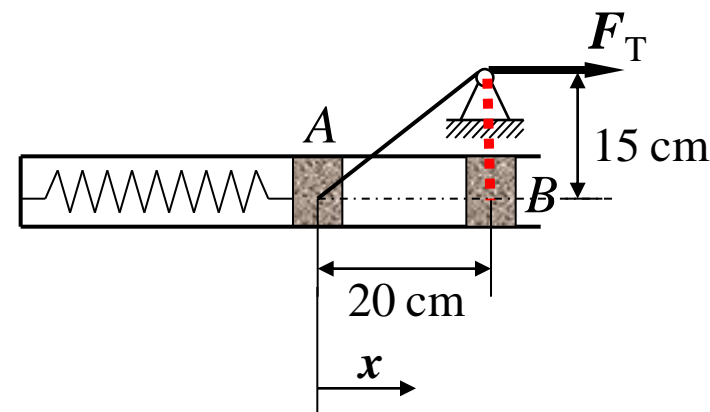
$$\sum \delta W_N = (\vec{F}_N + \vec{F}_S) \cdot d\vec{r}_C = 0$$

### 4、柔性约束（不可伸长的绳索）

拉紧时，内部拉力的元功之和恒等于零。



[例]如图所示滑块重 $P=9.8\text{N}$ ，弹簧刚度系数 $k=0.5\text{N/cm}$ ，滑块在A位置时弹簧对滑块的拉力为 $2.5\text{N}$ ，滑块在 $20\text{N}$ 的绳子拉力作用下沿光滑水平槽从位置A运动到位置B，求作用于滑块上所有力的功的和。



解：滑块在任一瞬时受力如图。由于 $P$ 与 $F_N$ 始终垂直于滑块位移，因此，它们所作的功为零。所以只需计算 $F_T$ 与 $F$ 的功。先计算 $F_T$ 的功：

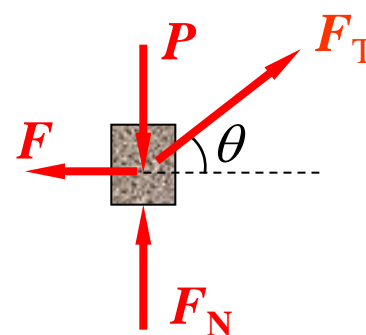
在运动过程中， $F_T$ 的大小不变，但方向在变，因此其元功为

$$\delta W_{F_T} = F_T \cos \theta dx$$

$$\cos \theta = (20 - x) / \sqrt{(20 - x)^2 + 15^2}$$

因此 $F_T$ 在整个过程中所作的功为

$$W_{F_T} = \int_0^{20} F_T \cos \theta dx = \int_0^{20} 20 \frac{20 - x}{\sqrt{(20 - x)^2 + 15^2}} dx = 200 \text{ N} \cdot \text{cm}$$



另外  $\cot\theta = \frac{20-x}{15} \longrightarrow dx = -15d\cot\theta = \frac{15d\theta}{\sin^2\theta} \longrightarrow \cos\theta dx = -15d\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)$

再计算弹性力 $F$ 的功：由题意：

$$\delta_1 = \frac{2.5}{0.5} = 5\text{cm}$$

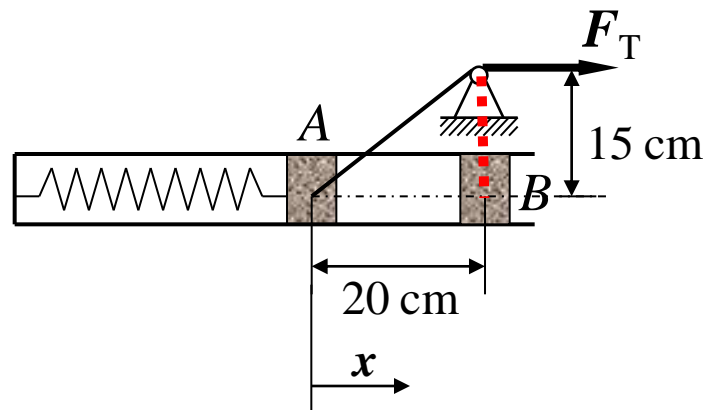
$$\delta_2 = 5 + 20 = 25\text{cm}$$

因此 $F$ 在整个过程中所作的功为

$$W_F = \frac{1}{2}k(\delta_1^2 - \delta_2^2) = \frac{1}{2}0.5(5^2 - 25^2) = -150\text{ N}\cdot\text{cm}$$

因此所有力的功为

$$W = W_{F_T} + W_F = 200 - 150 = 50\text{ N}\cdot\text{cm}$$



[例]图示机构中，杆 $OB$ 长为 $l$ ， $AB$ 长为 $2l$ ， $C$ 为中点， $A$ 处有一大小不变且始终垂直杆的力 $F$ 作用。当 $\theta$ 从 $0^\circ$ 连续变化到 $90^\circ$ 时，力 $F$ 作的功是多少？

解：将 $A$ 处的力平行移到 $C$ 处，同时附加一个力偶矩为 $Fl$ 的力偶。

$C$ 处的力 $F$ 所作的功为：

$$W_{CF} = -\int F \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) dx = -\int F \sin \theta dx$$

为何加负号？

$$x = 2l \cos \theta \quad dx = -2l \sin \theta d\theta$$

$$W_{CF} = -\int F \sin \theta dx = 2l \int_0^{\frac{\pi}{2}} F \sin^2 \theta d\theta = 2l \int_0^{\frac{\pi}{2}} F \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{Fl\pi}{2}$$

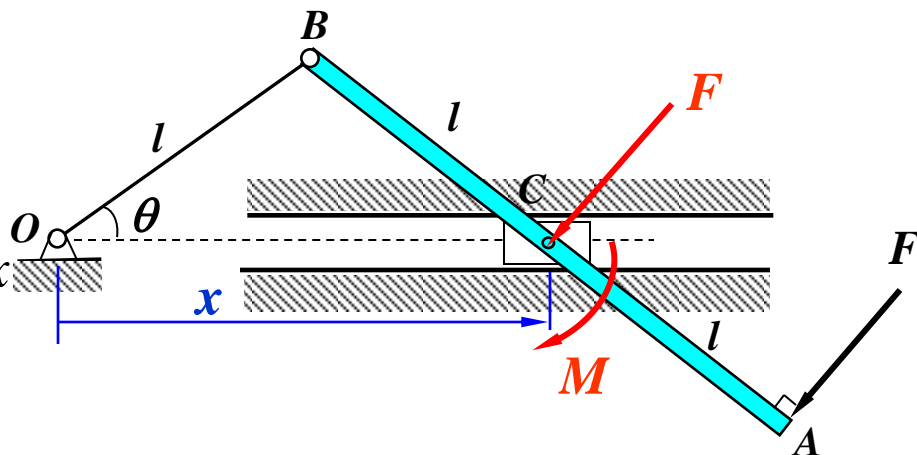
力偶 $Fl$ 所作的功为：

$$W_M = M \frac{\pi}{2} = \frac{Fl\pi}{2}$$

$A$ 处的力 $F$ 所作的总功为：

$$W_{AF} = W_{CF} + W_M = Fl\pi$$

也可将 $A$ 处的力平行移到 $B$ 处，自行计算。





## § 12-2 动 能

物体的动能是由于物体运动而具有的能量，是机械运动强弱的又一种度量。

一、质点的动能  $T = \frac{1}{2}mv^2$

瞬时量，恒为正，具有与功相同的量纲，单位也是J(焦耳)。

二、质点系的动能  $T = \sum \frac{1}{2}m_i v_i^2$

对于任一质点系：( $v_{iC}$  为第*i*个质点相对质心的速度)

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}\sum m_i v_{iC}^2 \quad \text{柯尼希定理}$$

上式是对质心而言的，对任意一点能否成立呢？

设质点系第*i*个质点的速度为 $\vec{v}_i$ ，质心的速度为 $\vec{v}_C$ 。

$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}_{iC} \quad v_i^2 = v_C^2 + v_{iC}^2 + 2\vec{v}_C \cdot \vec{v}_{iC}$$

质点系的动能  $T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i v_C^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_{iC}^2 + \sum m_i \vec{v}_C \cdot \vec{v}_{iC}$

$$\sum m_i \vec{v}_C \cdot \vec{v}_{iC} = \vec{v}_C \cdot \sum m_i \vec{v}_{iC} = \vec{v}_C \cdot m \vec{v}_{CC} = 0$$

若任选一点A的速度为基点，有

$$\vec{v}_i = \vec{v}_A + \vec{v}_{iA} \quad v_i^2 = v_A^2 + v_{iA}^2 + 2\vec{v}_A \cdot \vec{v}_{iA}$$

$$\sum m_i \vec{v}_A \cdot \vec{v}_{iA} = \vec{v}_A \cdot \sum m_i \vec{v}_{iA} = \vec{v}_A \cdot m \vec{v}_{CA} \neq 0$$

### 三、刚体的动能

1、平移刚体  $T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} (\sum m_i) v^2 = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_C^2$

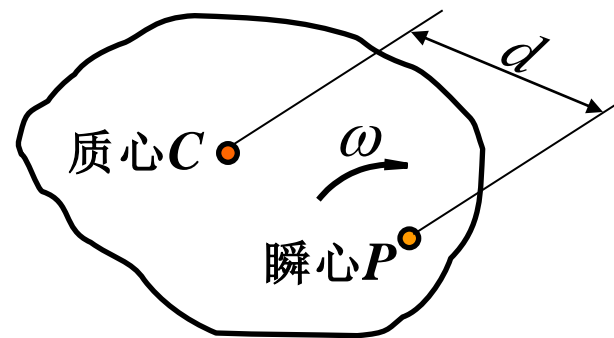
2、定轴转动刚体  $T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} (\sum m_i r_i^2) \omega^2 = \frac{1}{2} J_z \omega^2$

### 3、平面运动刚体

$$T = \frac{1}{2} J_P \omega^2 \quad (P \text{ 为速度瞬心})$$

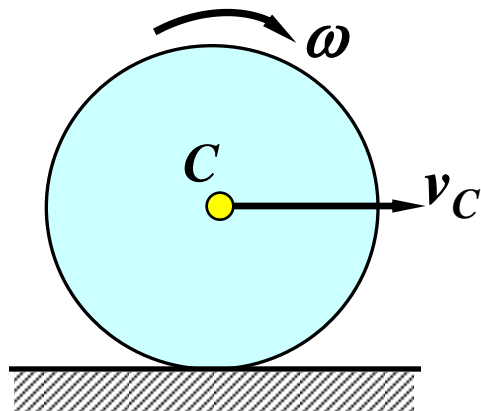
$$J_P = J_C + m d^2$$

$$= \frac{1}{2} J_C \omega^2 + \frac{1}{2} m (d^2 \omega^2) = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2$$



只能对瞬心和质心用，对其它点不存在类似的公式。

均质圆盘在地面上  
作纯滚动时的动能

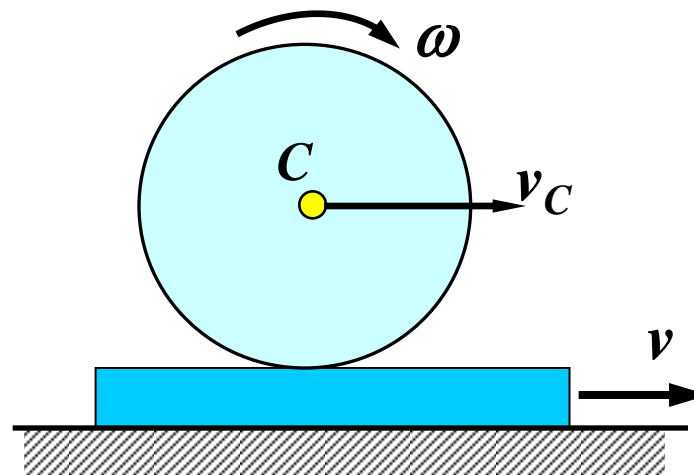


$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2$$

$$J_C = \frac{1}{2}mR^2, \quad v_C = R\omega$$

$$T = \frac{3}{4}mv_C^2$$

均质圆盘在平板上  
作纯滚动时的动能



$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2$$

$$v_C = R\omega + v$$

$$T = \frac{1}{2}m(v + R\omega)^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2$$

[例] 均质细杆长为 $l$ ，质量为 $m$ ，上端 $B$ 靠在光滑的墙上，下端 $A$ 用铰与质量为 $M$ 半径为 $R$ 且放在粗糙地面上的圆柱中心相连，在图示位置圆柱作纯滚动，中心速度为 $v_A$ ，杆与水平线的夹角 $\theta=45^\circ$ ，求该瞬时系统的动能。

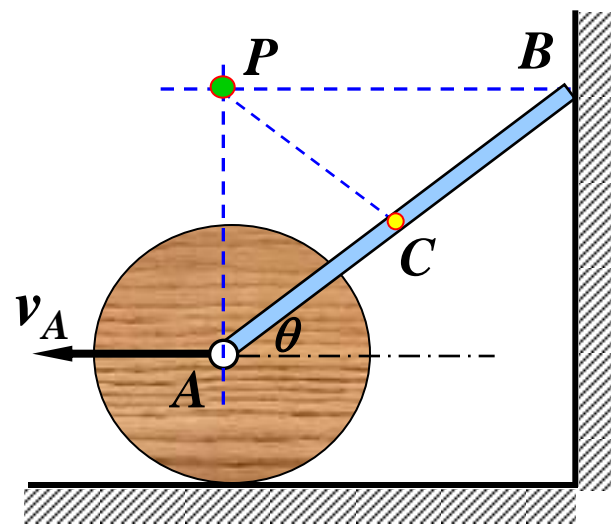
解：  $T = T_A + T_{AB}$

$$T_A = \frac{3}{4} M v_A^2$$

$P$  为 $AB$ 杆的瞬心  $v_A = PA \omega_{AB}$

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{l \sin \theta} \quad J_P = \frac{1}{3} m l^2$$

$$T_{AB} = \frac{1}{2} J_P \omega_{AB}^2 = \frac{m v_A^2}{6 \sin^2 \theta} = \frac{1}{3} m v_A^2$$



$$T = \frac{1}{12} (9M + 4m) v_A^2$$

[例]长为 $l$ ，重为 $P$ 的均质杆 $OA$ 由球铰链 $O$ 固定，并以等角速度 $\omega$ 绕铅直线转动，如图所示，如杆与铅直线的交角为 $\theta$ ，求杆的动能。

解：取出微段 $dr$ 到球铰的距离为 $r$ ，该微段的速度是

$$v = O_1B \cdot \omega = r\omega \sin \theta$$

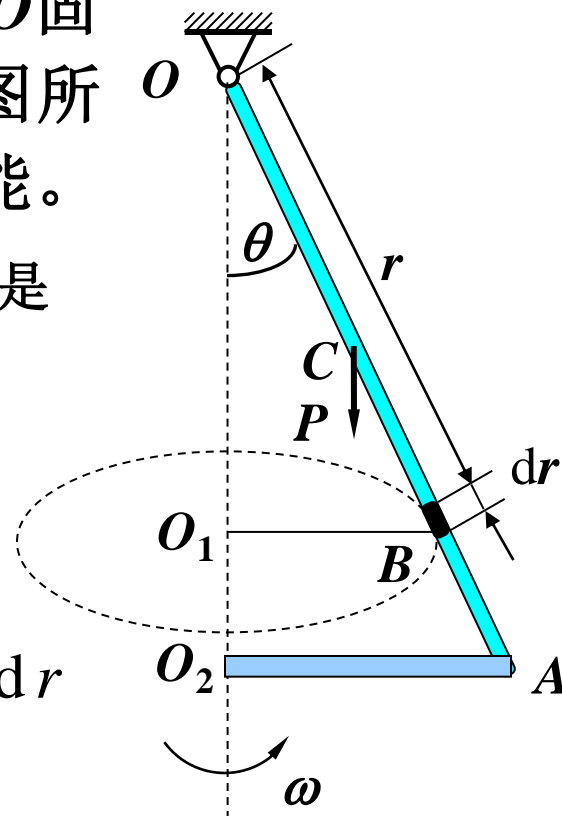
微段的质量  $dm = \frac{P}{l} \cdot \frac{1}{g} \cdot dr$

微段的动能  $dT = \frac{1}{2} \cdot dm \cdot v^2 = \frac{P\omega^2 r^2}{2gl} \sin^2 \theta \cdot dr$

杆 $OA$ 的动能是

$$T = \int_0^l dT = \int_0^l \frac{P\omega^2 r^2}{2gl} \sin^2 \theta \cdot dr = \frac{Pl^2 \omega^2}{6g} \sin^2 \theta$$

此动能与重量为 $P$ 绕铅垂轴以 $\omega$ 作定轴转动的 $O_2A$ 杆动能一样！



[例]求椭圆规的动能，其中 $OC$ 、 $AB$ 为均质细杆，质量为 $m$ 和 $2m$ ，长为 $b$ 和 $2b$ ，滑块 $A$ 和 $B$ 质量均为 $m$ ，曲柄 $OC$ 的角速度为 $\omega$ ， $\varphi=60^\circ$ 。

解：在椭圆规系统中滑块 $A$ 和 $B$ 作平移，曲柄 $OC$ 作定轴转动，规尺 $AB$ 作平面运动。首先对运动进行分析， $O_1$ 是 $AB$ 的速度瞬心，因：

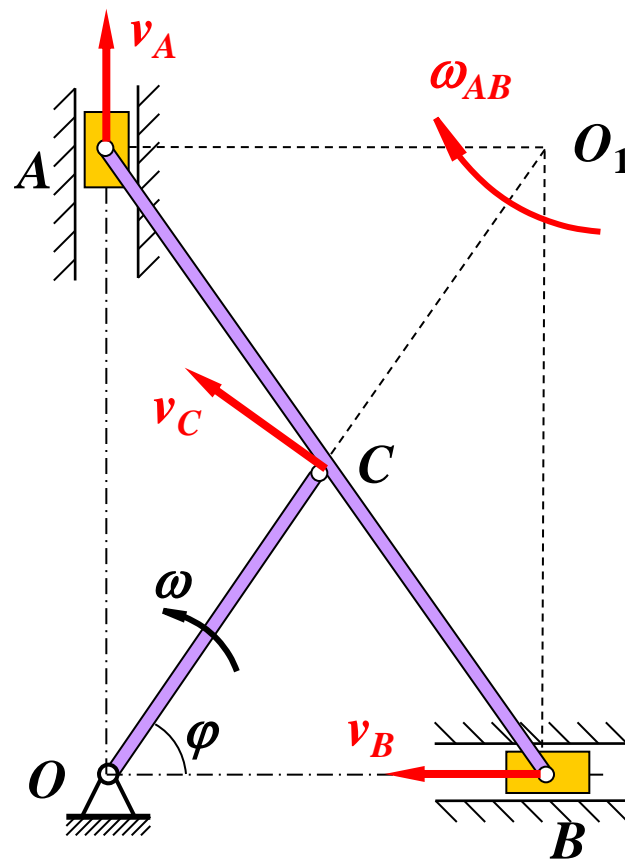
$$v_C = O_1C \cdot \omega_{AB} = OC \cdot \omega \quad \therefore \omega_{AB} = \omega$$

$$v_A = O_1A \cdot \omega_{AB} = 2b \cos \varphi \cdot \omega = b\omega$$

$$T_A = \frac{1}{2} m_A v_A^2 = \frac{mb^2 \omega^2}{2}$$

$$v_B = O_1B \cdot \omega_{AB} = 2b \sin \varphi \cdot \omega = \sqrt{3}b\omega$$

$$T_B = \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{3mb^2 \omega^2}{2}$$



对于曲柄 $OC$ :  $J_O = \frac{1}{3} m_{OC} b^2 = \frac{1}{3} m b^2$

$$T_{OC} = \frac{1}{2} J_O \omega^2 = \frac{1}{6} m b^2 \omega^2$$

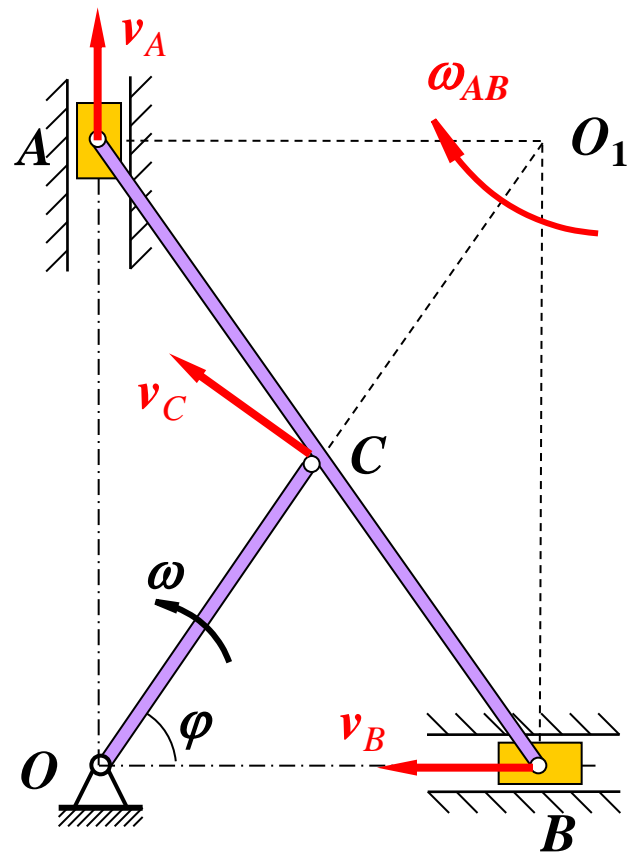
$AB$ 作平面运动，用绕速度瞬心转动的公式求动能：

$$\begin{aligned} J_{O_1} &= J_C + m_{AB} \cdot O_1 C^2 \\ &= \frac{1}{12} \cdot 2m \cdot (2b)^2 + 2m \cdot b^2 = \frac{8}{3} m b^2 \end{aligned}$$

$$T_{AB} = \frac{1}{2} J_{O_1} \omega_{AB}^2 = \frac{4}{3} m b^2 \omega^2$$

系统的总动能为：

$$\begin{aligned} T &= T_A + T_B + T_{OC} + T_{AB} \\ &= \frac{1}{2} m b^2 \omega^2 + \frac{3}{2} m b^2 \omega^2 + \frac{1}{6} m b^2 \omega^2 + \frac{4}{3} m b^2 \omega^2 = \frac{7}{2} m b^2 \omega^2 \end{aligned}$$





[例]如图滑块A以速度 $v_A$ 在滑道内滑动，其上铰接一质量为 $m$ ，长为 $l$ 的均质杆AB，杆以角速度 $\omega$ 绕A转动。试求当杆AB与铅垂线的夹角为 $\varphi$ 时，杆的动能。

解：AB杆作平面运动，其质心C的速度为

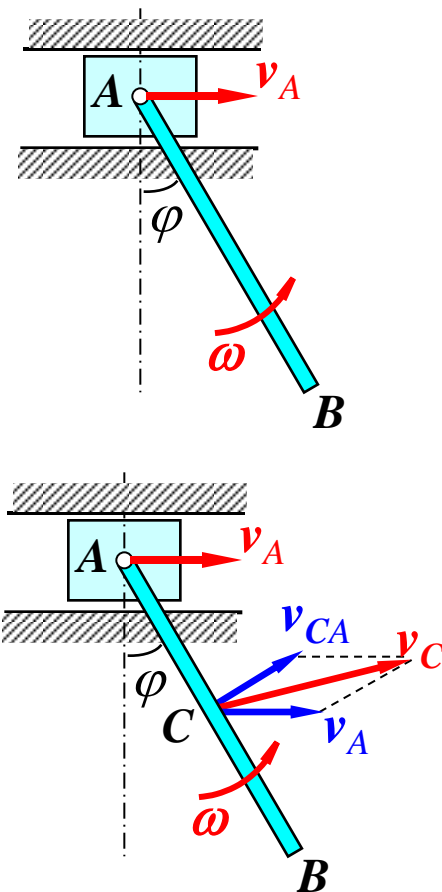
$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{CA}$$

速度合成矢量图如图，由余弦定理有：

$$\begin{aligned} v_C^2 &= v_A^2 + v_{CA}^2 - 2v_A v_{CA} \cos(180^\circ - \varphi) \\ &= v_A^2 + \left(\frac{1}{2}l\omega\right)^2 + 2v_A \frac{1}{2}l\omega \cos \varphi \\ &= v_A^2 + \frac{1}{4}l^2\omega^2 + l\omega v_A \cos \varphi \end{aligned}$$

则杆的动能  $T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}m\left(v_A^2 + \frac{1}{4}l^2\omega^2 + l\omega v_A \cos \varphi\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^2\right)\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}m\left(v_A^2 + \frac{1}{3}l^2\omega^2 + l\omega v_A \cos \varphi\right) \end{aligned}$$



## § 12-3 动能定理

### 一、质点的动能定理

牛顿定律  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$

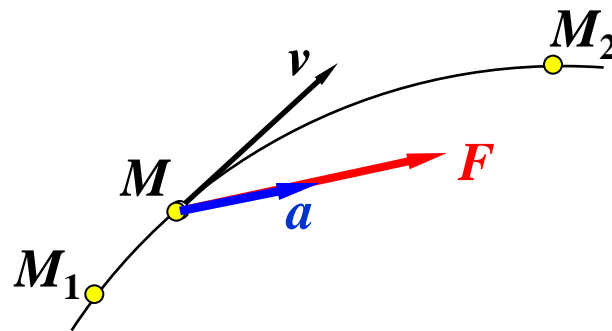
两边点乘以  $d\vec{r}$ , 有  $m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$$m d\vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{m}{2} d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

因此  $d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \delta W$       动能定理的微分形式

将上式沿路径  $\widehat{M_1 M_2}$  积分, 可得

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W_{12} \quad \text{动能定理的积分形式}$$



## 二、质点系的动能定理

对质点系中的一质点 $M_i$ ：
$$d\left(\frac{1}{2}m_i v_i^2\right) = \delta W_i$$

对整个质点系，有 
$$\sum d\left(\frac{1}{2}m_i v_i^2\right) = \sum \delta W_i \Rightarrow d\left(\sum \frac{1}{2}m_i v_i^2\right) = \sum \delta W_i$$

即 
$$dT = \sum \delta W_i$$
 质点系动能定理的微分形式

将上式沿路径  $\widehat{M_1 M_2}$  积分，可得

$$T_2 - T_1 = \sum W_{12}$$
 质点系动能定理的积分形式

在理想约束的条件下，质点系的约束力不作功，但质点系的内力做功之和并不一定等于零，例如弹簧在系统内做功。

[例]图示的均质杆 $OA$ 的质量为 $30\text{kg}$ ，杆在铅垂位置时弹簧处于自然状态。设弹簧常数 $k=3\text{kN/m}$ ，为使杆 $OA$ 能由铅直位置转到水平位置，在铅直位置时的角速度至少应为多大？

解：研究 $OA$ 杆  $\sum W_{12} = P \cdot 1.2 + \frac{1}{2}k(\delta_1^2 - \delta_2^2)$

$$= 30 \times 9.8 \times 1.2 + \frac{1}{2} \times 3000 \times [0^2 - (2.4 - 1.2\sqrt{2})^2]$$

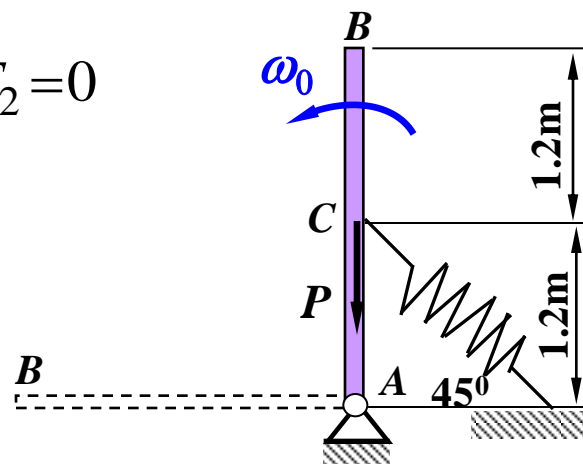
$$= -388.4(\text{J})$$

$$T_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 30 \times 2.4^2 \omega_0^2 = 28.8 \omega_0^2, \quad T_2 = 0$$

由  $T_2 - T_1 = \sum W_{12}$

$$0 - 28.8 \omega_0^2 = -388.4$$

$$\omega_0 = 3.67 \text{ rad/s}$$



[例]两根均质直杆组成的机构及尺寸如图示； $AB$  杆质量是  $OA$  杆质量的两倍，各处摩擦不计，如机构在图示位置从静止释放，求当  $OA$  杆转到铅垂位置时， $AB$  杆  $B$  端的速度。

解：取整个系统为研究对象

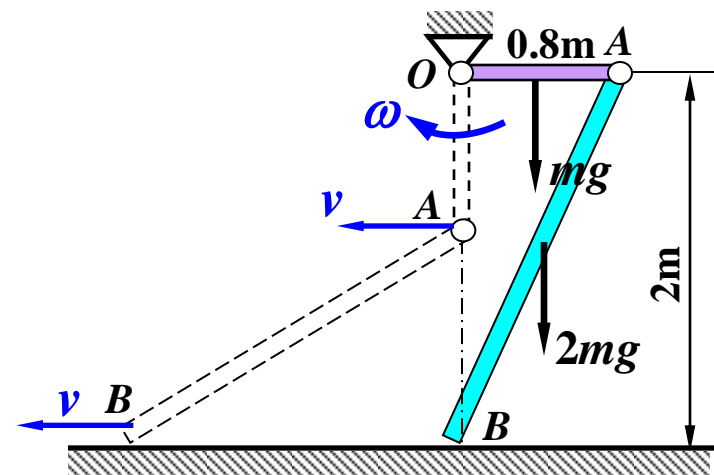
$T_1 = 0$        $OA$  杆铅垂时， $AB$  杆瞬时平移。

$$T_2 = \frac{1}{2} J_O \omega^2 + \frac{1}{2} (2m) v^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{m}{3} 0.8^2 \right) \omega^2 + m v^2$$

$B$  端速度为  $v$ ，且  $v = 0.8\omega \therefore T_2 = \frac{7}{6} m v^2$

$$\sum W_{12} = mg \cdot \frac{0.8}{2} + 2mg(1 - 0.6) = 1.2mg$$

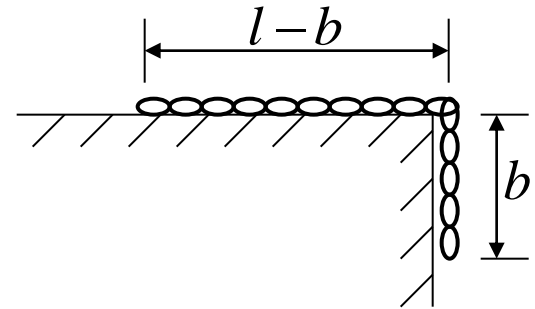
$$T_2 - T_1 = \sum W_{12} \quad \frac{7}{6} m v^2 - 0 = 1.2mg \quad v = 1.01 \text{ m/s}$$



[例]如图一长为 $l$ ，质量密度为 $\rho$ 的链条放置在光滑的水平桌面上，有长为 $b$ 的一段悬挂下垂。初始链条静止，在自重的作用下运动。求当末端滑离桌面时，链条的速度。

解:链条在初始及终了两状态的动能分别为

$$T_1 = 0 \quad T_2 = \frac{1}{2} \rho l v_2^2$$



在运动过程中所有的力所作的功为

$$\text{由 } \sum W_{12} = \rho g b(l-b) + \rho g(l-b) \frac{1}{2}(l-b) = \frac{1}{2} \rho g(l^2 - b^2)$$

$$T_2 - T_1 = \sum W_{12} \quad \text{解得} \quad v_2 = \sqrt{\frac{g(l^2 - b^2)}{l}}$$

[例]图示机构，均质杆质量 $m=10\text{kg}$ ，长度 $l=60\text{cm}$ ，两端与不计重量的滑块铰接，滑块可在光滑槽内滑动，弹簧的弹性系数为 $k=360\text{N/m}$ 。在图示位置，系统静止，弹簧的伸长为 $20\text{cm}$ 。然后无初速释放，求当杆到达铅垂位置时的角速度。

解：以系统为研究对象，则初瞬时的动能为  $T_1 = 0$

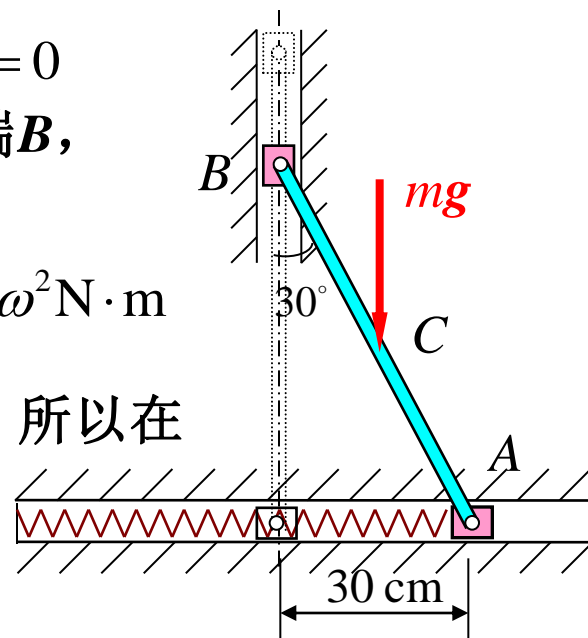
当杆运动到铅垂位置时，其速度瞬心为杆端 $B$ ，  
设此时杆的角速度为 $\omega$ ，则系统的动能为

$$T_2 = \frac{1}{2} J_B \omega^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} m l^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} \times 10 \times 0.6^2 \right) \omega^2 = 0.6 \omega^2 \text{ N} \cdot \text{m}$$

在系统运动过程中，只有重力和弹力做功，所以在  
系统运动过程中所有的力所作的功为

$$\begin{aligned} \Sigma W_{12} &= mg \left( \frac{l}{2} \cos 30^\circ - \frac{l}{2} \right) + \frac{1}{2} k (\delta_1^2 - \delta_2^2) \\ &= 10 \times 9.8 \left( \frac{0.6}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{0.6}{2} \right) + \frac{1}{2} \times 360 (0.2^2 - 0.1^2) = 1.46 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$\text{由 } T_2 - T_1 = \Sigma W_{12} \text{ 得 } \omega = \sqrt{\frac{1.46}{0.6}} = 1.56 \text{ rad/s}$$



[例]两根完全相同的均质细杆 $AB$ 和 $BC$ 用铰链 $B$ 连接在一起，而杆 $BC$ 则用铰链 $C$ 连接在 $C$ 点上，每根杆重 $P=10\text{N}$ ，长 $l=1\text{m}$ ，一弹簧常数 $k=120\text{N/m}$ 的弹簧连接在两杆的中心，如图所示。假设两杆与光滑地面的夹角 $\theta=60^\circ$ 时弹簧不伸长，一力 $F=10\text{N}$ 作用在 $AB$ 的 $A$ 点，该系统由静止释放，试求 $\theta=0$ 时 $AB$ 杆的角速度。

解： $AB$ 杆作平面运动， $BC$ 杆作定轴转动，找出 $AB$ 杆的速度瞬心在 $O$ 点，由几何关系知 $OB=BC=l$ ，因此由

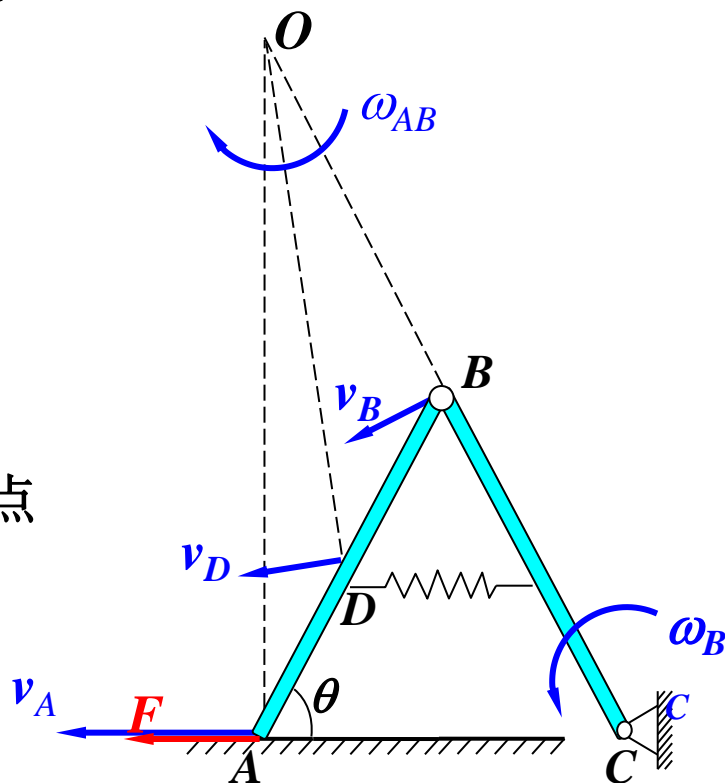
$$v_B = \omega_{AB} \cdot OB = \omega_{BC} \cdot BC$$

$$\text{得} \quad \omega_{AB} = \omega_{BC} = \omega$$

同时还可以得出结论，当 $\theta=0$ 时 $O$ 点与 $A$ 点重合，即此时 $A$ 为 $AB$ 杆的速度瞬心，所以

$$T_1 = 0$$

$$T_2 = \frac{1}{2} J_A \omega_{AB}^2 + \frac{1}{2} J_C \omega_{BC}^2 = \frac{1}{3} \frac{P}{g} l^2 \omega^2$$





因为系统属理想约束，所以约束力不作功，作功的力有主动力 $F$ ，重力 $P$ 和弹性力，分别求得如下：

$$\text{主动力做功 } W_F = F_S = F(2l - 2l \cos \theta) = Fl$$

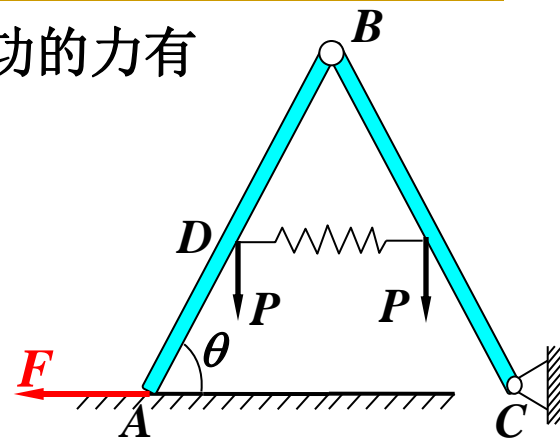
$$\text{重力做功 } W_P = 2P \cdot \frac{1}{2} l \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} Pl$$

$$\text{弹性力做功 } W_E = \frac{1}{2} k(\delta_1^2 - \delta_2^2) = \frac{1}{2} k[0 - (l - \frac{l}{2})^2] = -\frac{1}{8} kl^2$$

$$\text{主动力所作总功 } \sum W_{12} = W_F + W_P + W_E = Fl + \frac{\sqrt{3}}{2} Pl - \frac{1}{8} kl^2$$

$$\text{由动能定理的积分形式得：} \frac{1}{3} \frac{P}{g} \omega^2 l^2 = Fl + \frac{\sqrt{3}}{2} Pl - \frac{1}{8} kl^2$$

$$\omega = \sqrt{(P + \frac{\sqrt{3}}{2} W - \frac{1}{8} kl) / \frac{1}{3} \frac{W}{g} l} = 3.28 \text{ rad/s}$$

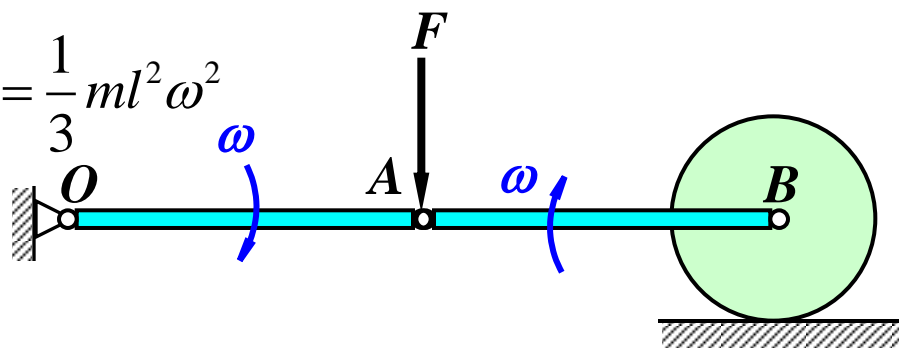
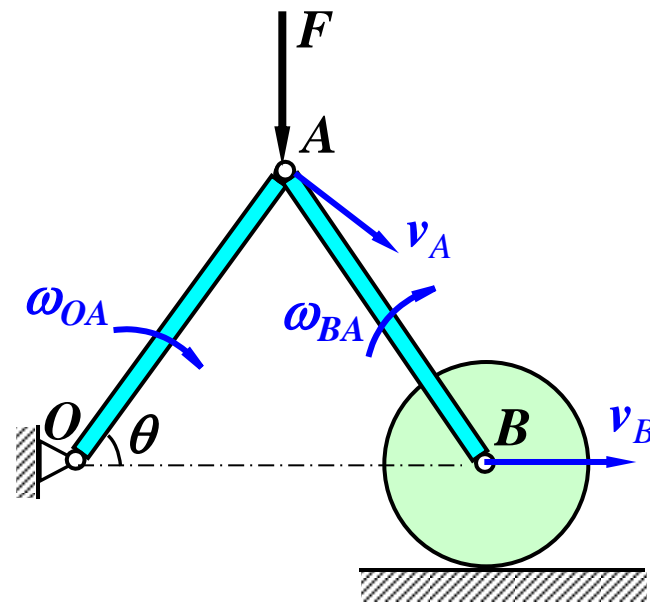


[例]在对称连杆的A点，作用一铅垂方向的常力 $F$ ，初始系统静止，如图。求连杆 $OA$ 运动到水平位置时的角速度。设连杆长均为 $l$ ，质量均为 $m$ ，均质圆盘质量为 $m_1$ ，且作纯滚动。

解：分析系统，初瞬时的动能为  $T_1=0$

设连杆 $OA$ 运动的角速度为 $\omega_{OA}$ ，由于 $OA=AB$ ，所以杆 $AB$ 作平面运动的角速度 $\omega_{BA}=\omega_{OA}$ 。 $OA$ 运动到水平位置时， $B$ 端为杆 $AB$ 的速度瞬心，因此轮 $B$ 的角速度为零， $v_B=0$ 。系统此时的动能为

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} J_O \omega^2 + \frac{1}{2} J_B \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} ml^2 \right) \omega^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} ml^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{3} ml^2 \omega^2 \end{aligned}$$



系统受力如图所示，在运动过程中所有的力所作的功为

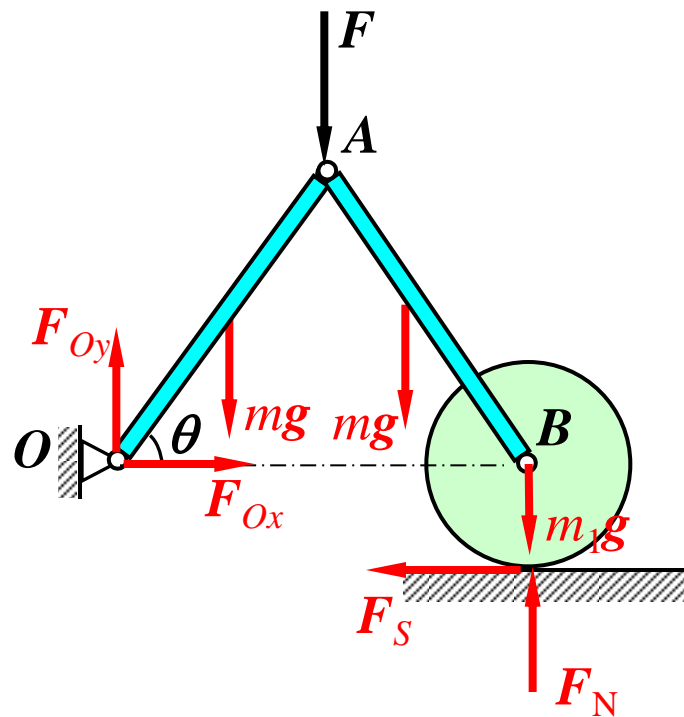
$$\begin{aligned}\sum W_{12} &= 2\left(mg \frac{l}{2} \sin \theta\right) + Fl \sin \theta \\ &= (mg + F)l \sin \theta\end{aligned}$$

由  $T_2 - T_1 = \sum W_{12}$  得

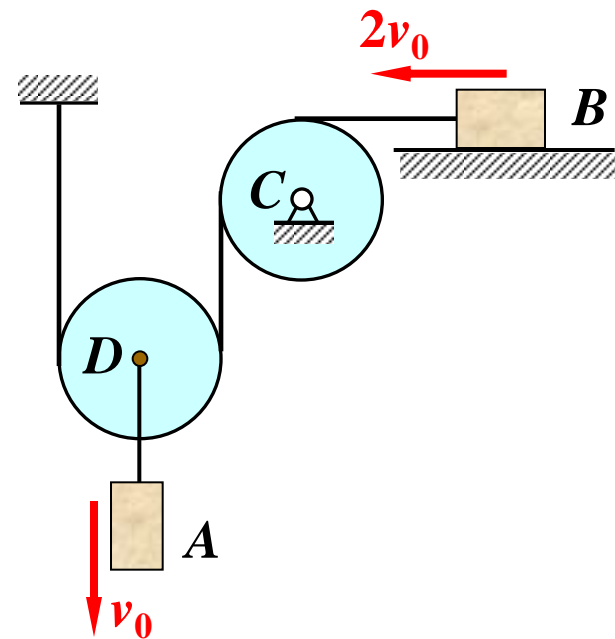
$$\frac{1}{3}ml^2\omega^2 - 0 = (mg + F)l \sin \theta$$

解得

$$\omega = \sqrt{\frac{3(mg + F) \sin \theta}{lm}}$$



[例]如图，重物A和B通过动滑轮D和定滑轮C而运动。如果重物A开始时向下的速度为 $v_0$ ，试问重物A下落多大距离，其速度增大一倍。设重物A和B的质量均为 $m$ ，滑轮D和C的质量均为 $M$ ，半径均为 $r$ 且为均质圆盘。重物B与水平面的动摩擦因数为 $f$ ，绳索质量忽略不计且不能伸长。



解：取系统分析，则运动初瞬时的动能为

$$T_A = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad T_B = \frac{1}{2}m(2v_0)^2 = 2mv_0^2$$

$$T_C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}Mr^2\right)\left(\frac{2v_0}{r}\right)^2 = Mv_0^2$$

$$T_D = \frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}Mr^2\right)\left(\frac{v_0}{r}\right)^2 = \frac{3}{4}Mv_0^2$$

$$T_1 = T_A + T_B + T_C + T_D = \frac{7M + 10m}{4}v_0^2$$

速度增大一倍时的动能为

$$T_2 = (7M + 10m)v_0^2$$

系统受力如图所示，设重物A下降 $h$ 高度时，其速度增大一倍。在此过程中，所有的力所作的功为

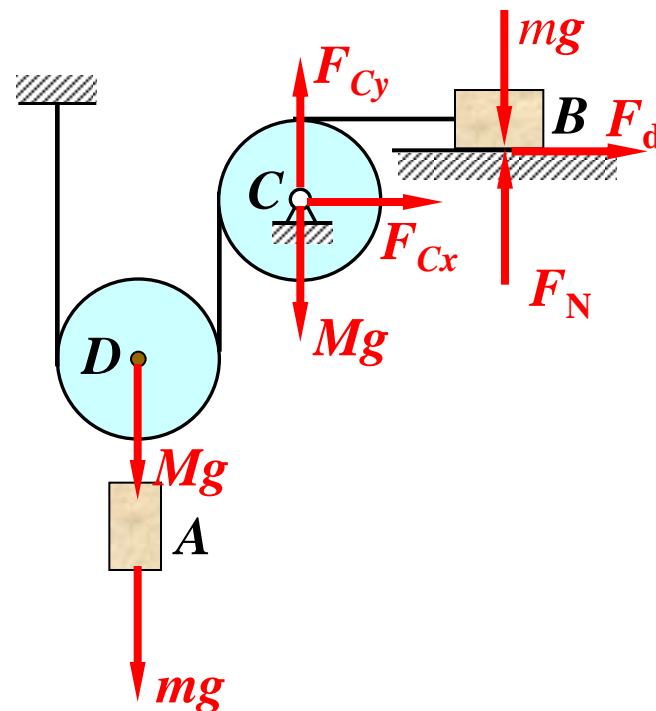
$$\begin{aligned}\sum W_{12} &= mgh + Mgh - F_d \cdot 2h \\ &= [M + (1 - 2f)m]gh\end{aligned}$$

由  $T_2 - T_1 = \sum W_{12}$  得

$$\frac{3}{4}(7M + 10m)v_0^2 = [M + (1 - 2f)m]gh$$

解得

$$h = \frac{3(7M + 10m)v_0^2}{4[M + (1 - 2f)m]g}$$



若初瞬时系统静止，如何求运动过程中各段绳的张力及C处的约束力？

设重物A下降任意位置 $s$ 时的速度为 $v_A$ 。

系统的动能为

$$T_2 = T_A + T_B + T_C + T_D = \frac{7M + 10m}{4} v_A^2$$

$$T_1 = 0$$

在此过程中，所有的力所作的功为

$$\sum W_{12} = mgs + Mgs - F_d \cdot 2s = [M + (1 - 2f)m]gs$$

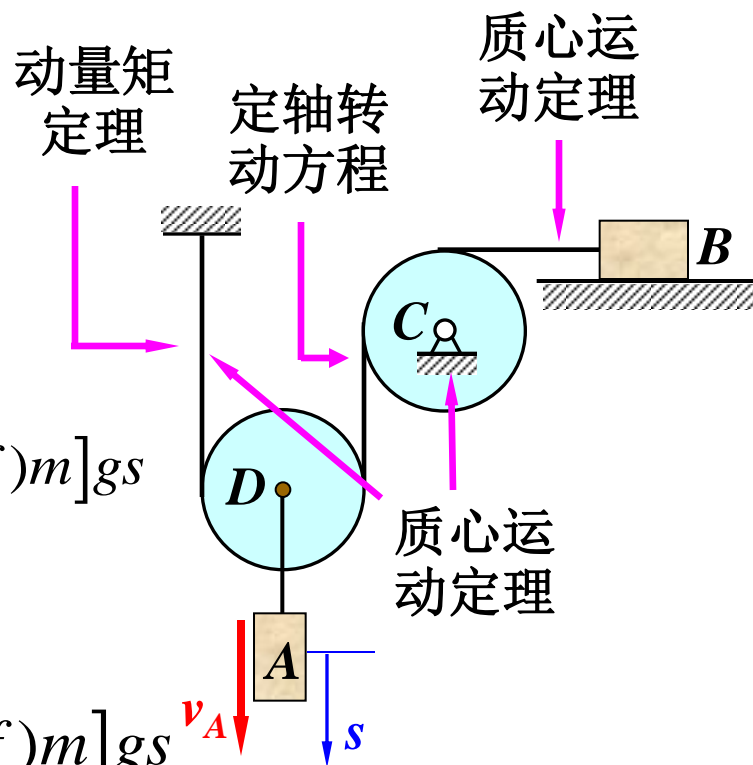
由  $T_2 - T_1 = \sum W_{12}$  得

$$\frac{7M + 10m}{4} v_A^2 = [M + (1 - 2f)m]gs$$

上式两边对时间求导，并注意  $\frac{dv_A}{dt} = a_A$ ， $\frac{ds}{dt} = v_A \neq 0$  可求得

$$a_A = \frac{2[M + (1 - 2f)m]}{7M + 10m} g$$

加速度求得后，如何求力？

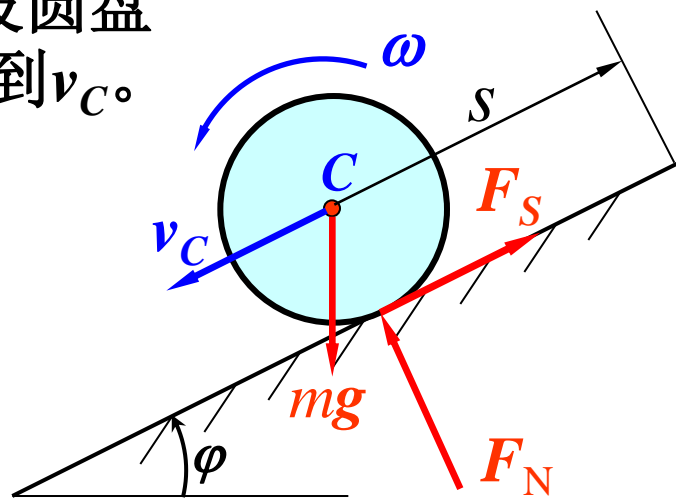


[例]已知均质圆盘质量为 $m$ ，半径为 $R$ ，摩擦因数为 $f$ ，斜面倾角为 $\varphi$ 。求纯滚动时盘心的加速度。

解：取系统为研究对象，假设圆盘中心向下产生位移 $s$ 时速度达到 $v_C$ 。

$$T_1 = 0 \quad T_2 = \frac{3}{4}mv_C^2$$

力的功：  $W_{12} = mgs \sin \varphi$



由动能定理得：  $\frac{3}{4}mv_C^2 - 0 = mgs \sin \varphi$

两边对时间求导解得：  $a = \frac{2}{3}g \sin \varphi$

[例]水平面上行星齿轮机构的曲柄 $OA$ 受力偶 $M$ 作用而绕固定水平轴 $O$ 转动，并带动齿轮 II 在固定齿轮 I 上滚动如图所示。设曲柄 $OA$ 为均质杆，长 $l$ 、质量为 $m_1$ ；齿轮 II 为均质圆盘，半径 $r$ 、质量为 $m_2$ 。试求曲柄的角加速度及两齿轮接触处沿切线方向的力。**P321, 12-12**

解1：以曲柄为研究对象，画受力图，列转动方程

$$\frac{1}{3}m_1l^2\alpha_1 = M - F_t l \quad (1)$$

取齿轮 II 分析，作受力图，列方程

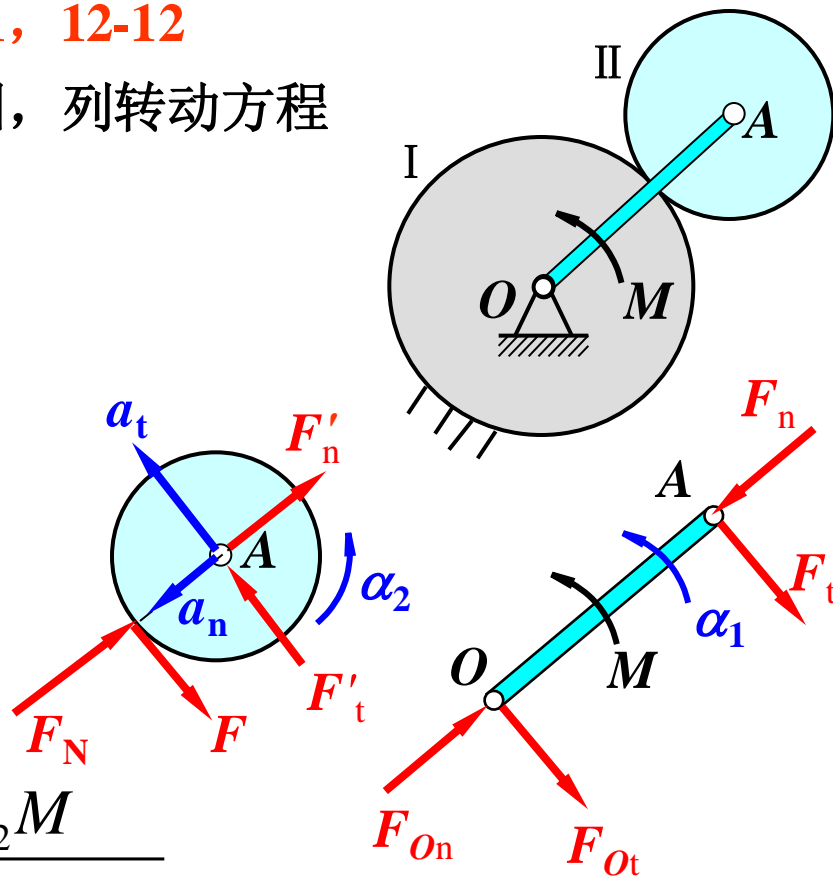
$$m_2a_t = F'_t - F \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}m_2r^2\alpha_2 = Fr \quad (3)$$

由运动学关系有  $a_t = r\alpha_2 = l\alpha_1$

联立求解得

$$\alpha_1 = \frac{6M}{(2m_1 + 9m_2)l^2} \quad F = \frac{3m_2M}{(2m_1 + 9m_2)l}$$



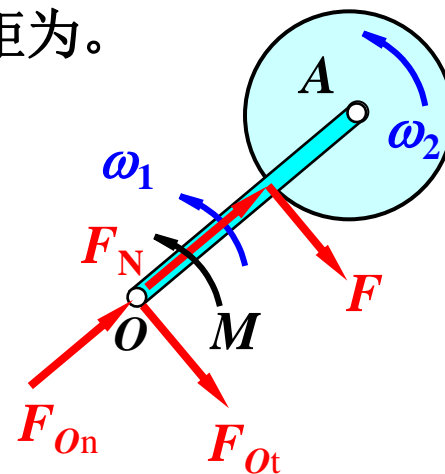


解2：以曲柄和齿轮 II 为研究对象，其对  $O$  的动量矩为。

$$L_O = \frac{1}{3}m_1l^2\omega_1 + \frac{1}{2}m_2r^2\omega_2 + m_2l^2\omega_1$$

由质点系的动量矩定理有

$$\frac{dL_O}{dt} = \sum M_O(F^{(e)}) = M - F(l - r)$$



即  $\frac{1}{3}m_1l^2\alpha_1 + \frac{1}{2}m_2r^2\alpha_2 + m_2l^2\alpha_1 = M - F(l - r)$  (1)

单独考虑齿轮 II 有  $\frac{1}{2}m_2r^2\alpha_2 = Fr$  (2)

由运动学关系有  $l\alpha_1 = r\alpha_2$  (3)

联立求解得  $\alpha = \frac{6M}{(2m_1 + 9m_2)l^2}$   $F = \frac{3m_2M}{(2m_1 + 9m_2)l}$

[例]水平面上行星齿轮机构的曲柄 $OA$ 受力偶 $M$ 作用而绕固定水平轴 $O$ 转动，并带动齿轮Ⅱ在固定齿轮Ⅰ上滚动如图所示。设曲柄 $OA$ 为均质杆，长 $l$ 、质量为 $m_1$ ；齿轮Ⅱ为均质圆盘，半径 $r$ 、质量为 $m_2$ 。试求曲柄的角速度及角加速度。**P321, 12-12**

解：取整个系统为研究对象  $T_1=0$

$$T_2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 l^2}{3} \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 v_A^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{m_2 r^2}{2} \omega_{\text{II}}^2$$

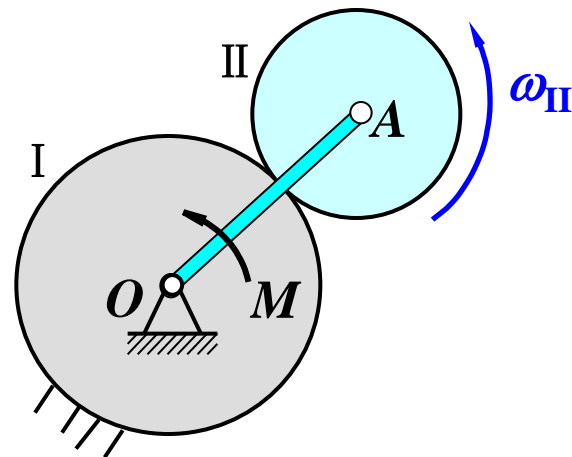
$$v_A = l\omega, \quad \omega_{\text{II}} = \frac{v_A}{r} = \frac{l}{r} \omega$$

$$T_2 = \frac{m_1 l^2}{6} \omega^2 + \frac{m_2}{2} (l\omega)^2 + \frac{m_2 r^2}{4} \left(\frac{l}{r} \omega\right)^2 = \frac{2m_1 + 9m_2}{12} l^2 \omega^2 \quad \sum W_{12} = M\varphi$$

根据动能定理，得  $\frac{2m_1 + 9m_2}{12} l^2 \omega^2 - 0 = M\varphi$  ①

$$\omega = \frac{2}{l} \sqrt{\frac{3M\varphi}{2m_1 + 9m_2}}$$

将①式对 $t$ 求导数，得  $\alpha = \frac{6M}{(2m_1 + 9m_2)l^2}$



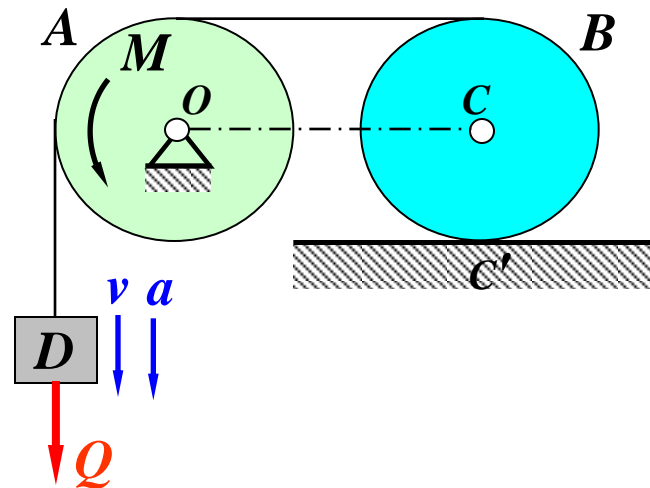
[例]图示系统中，均质圆盘A、B各重 $P$ ，半径均为 $R$ ，两盘中心线为水平线，重物D重 $Q$ ，盘A上作用有常力偶矩 $M$ 。问下落距离 $h$ 时重物的速度与加速度。(不可伸长的绳不计自重，盘B作纯滚动，初始时系统静止)

解：取系统为研究对象，设重物速度为 $v$ ，加速度为 $a$ 。

$$T_1 = 0$$

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} J_O \omega_A^2 + \frac{1}{2} \frac{Q}{g} v^2 + \frac{1}{2} J_{C'} \omega_B^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{2g} R^2 \omega_A^2 + \frac{1}{2} \frac{Q}{g} v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \frac{P}{g} R^2 \omega_B^2 \\ &= \frac{P}{4g} R^2 \left(\frac{v}{R}\right)^2 + \frac{Q}{2g} v^2 + \frac{3P}{4g} R^2 \left(\frac{v}{2R}\right)^2 \\ &= \frac{v^2}{16g} (8Q + 7P) \end{aligned}$$

$$\sum W_{12} = M\varphi + Qh = M \frac{h}{R} + Qh$$



由动能定理  $T_2 - T_1 = \sum W_{12}$

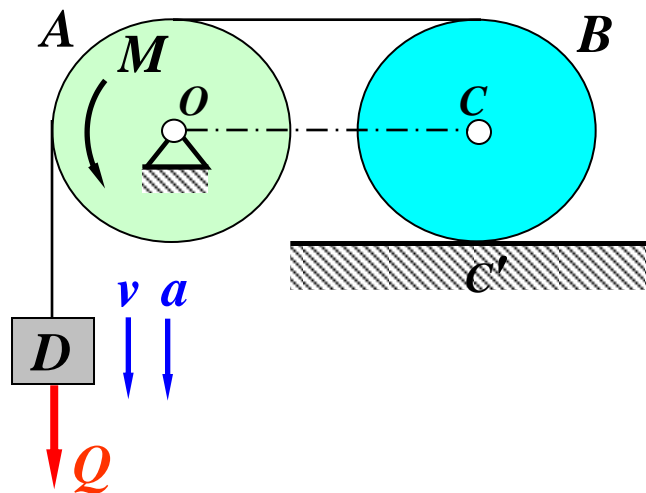
$$\frac{v^2}{16g}(8Q+7P)-0=(\frac{M}{R}+Q)h \Rightarrow v=4\sqrt{\frac{(M/R+Q)hg}{8Q+7P}}$$



上式两边求导得：

$$\frac{8Q+7P}{16g} \cdot 2v \frac{dv}{dt} = (\frac{M}{R}+Q) \frac{dh}{dt} \quad (v = \frac{dh}{dt})$$

$$a = \frac{8(M/R+Q)g}{8Q+7P}$$



[例]均质圆盘A质量 $m$ ，半径 $r$ ；滑块B质量 $m$ ，通过**质量不计**、平行于斜面的杆AB连接。斜面倾角为 $\theta$ ，动摩擦因数为 $f$ ，圆盘作纯滚动，系统初始静止。求滑块B的加速度。

解：选系统为研究对象，受力如图。

设A移动 $s$ ，则

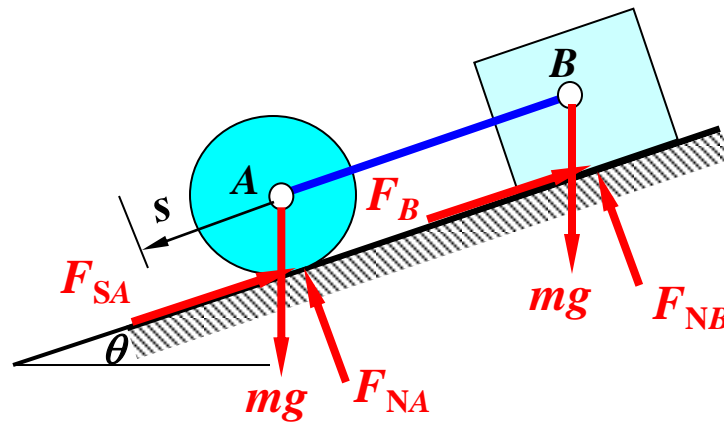
$$T_1 = 0 \quad T_2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mr^2\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\begin{aligned} \Sigma W_{12} &= 2mgs \sin \theta - fmg s \cos \theta \\ &= mgs(2 \sin \theta - f \cos \theta) \end{aligned}$$

运动学关系：  $v = r\omega \quad \therefore T_2 = \frac{5}{4}mv^2$

由动能定理： $\frac{5}{4}mv^2 - 0 = mgs(2 \sin \theta - f \cos \theta)$  对  $t$  求导，得

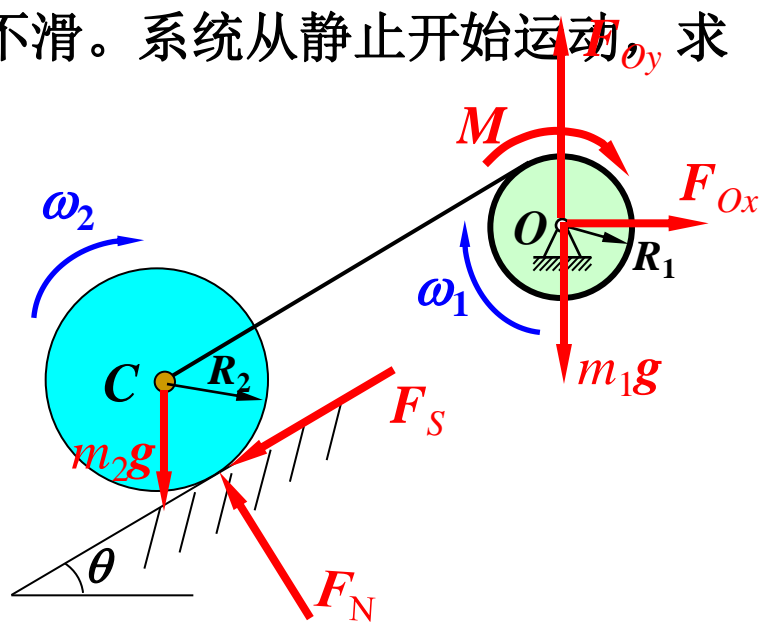
$$a = \left( \frac{4}{5} \sin \theta + \frac{2}{5} f \cos \theta \right) g$$



[例]卷扬机如图，鼓轮在常力偶 $M$ 的作用下将圆柱上拉。已知鼓轮的半径为 $R_1$ ，质量为 $m_1$ ，质量分布在轮缘上；圆柱的半径为 $R_2$ ，质量为 $m_2$ ，质量

均匀分布。设斜坡的倾角为 $\theta$ ，圆柱只滚不滑。系统从静止开始运动。求圆柱中心 $C$ 经过路程 $s$ 时的速度和加速度。

解：以系统为研究对象，受力如图。



$$\Sigma W_{12} = M \frac{s}{R_1} - m_2 g \sin \theta \cdot s$$

系统在初始及终了两状态的动能分别为

$$T_1 = 0 \quad T_2 = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega_2^2$$

$$\text{其中} \quad J_1 = m_1 R_1^2 \quad J_C = \frac{1}{2} m_2 R_2^2 \quad \omega_1 = \frac{v_C}{R_1} \quad \omega_2 = \frac{v_C}{R_2}$$

于是 
$$T_2 = \frac{v_C^2}{4} (2m_1 + 3m_2)$$

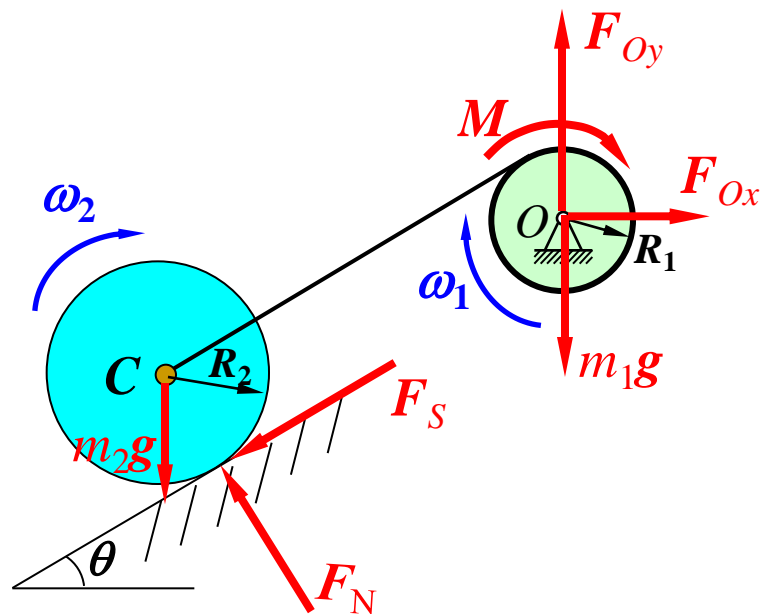
由  $T_2 - T_1 = \sum W_{12}$  得

$$\frac{v_C^2}{4} (2m_1 + 3m_2) - 0 = M \frac{s}{R_1} - m_2 g \sin \theta \cdot s$$

解之得 
$$v_C = 2 \sqrt{\frac{(M - m_2 g R_1 \sin \theta) s}{R_1 (2m_1 + 3m_2)}}$$

动能定理求导得 
$$a_C = \frac{2(M - m_2 g R_1 \sin \theta)}{(2m_1 + 3m_2) R_1}$$

由于斜面不一定通过 $O$ 点，所以系统不能用对点 $O$ 的动量矩定理求解。



[例] 齿轮传动机构，I 为主动轮，II 为从动轮。已知各齿轮的转动惯量和半径分别为  $J_1$ 、 $J_2$ ， $R_1$ 、 $R_2$ ，两齿轮作用的扭矩分别为  $M_1$ 、 $M_2$ 。求轴 I 的角加速度。

解：取系统为研究对象， $T_1=0$

由运动学可知：

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = i_{12} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} (J_1 + \frac{J_2}{i_{12}^2}) \omega_1^2$$

主动力的功：

$$\sum W_{12} = M_1 \varphi_1 - M_2 \varphi_2 = (M_1 - \frac{M_2}{i_{12}}) \varphi_1$$

由动能定理得：

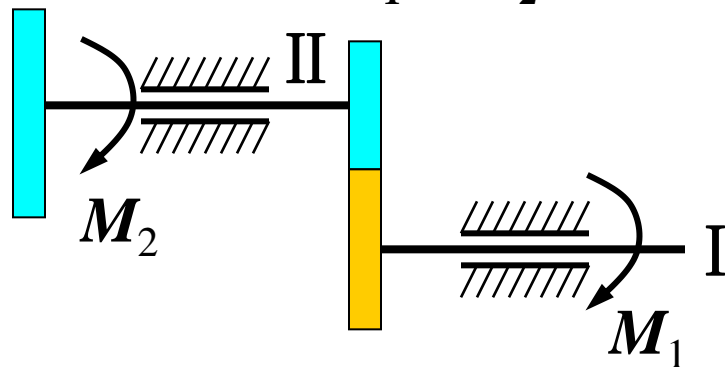
$$\frac{1}{2} (J_1 + \frac{J_2}{i_{12}^2}) \omega_1^2 - 0 = (M_1 - \frac{M_2}{i_{12}}) \varphi_1$$

将上式对时间求导，并注意

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \alpha_1, \quad \frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1$$

解得：

$$\alpha_1 = (M_1 - \frac{M_2}{i_{12}}) / (J_1 + \frac{J_2}{i_{12}^2})$$





## § 12-4 功率 · 功率方程

一、功率：力在单位时间内所作的功（它是衡量机器工作能力的一个重要指标）。功率是代数量，并有瞬时性。

$$P = \frac{\delta W}{dt}$$

作用力的功率：
$$P = \frac{\delta W}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F_t v$$

力矩(力偶矩)的功率：
$$P = \frac{\delta W}{dt} = M_z \frac{d\varphi}{dt} = M_z \omega = M_z \frac{n\pi}{30}$$

功率的单位：瓦特（W），千瓦（kW），1 W = 1 J/s。

我国 1马力=0.735 kW

## 二、功率方程

由  $dT = \sum \delta W$  的两边同除以  $dt$

得  $\frac{dT}{dt} = \frac{\sum \delta W}{dt}$  即  $\frac{dT}{dt} = \sum P = P_{\text{输入}} - P_{\text{有用}} - P_{\text{无用}}$  功率方程

分析：起动阶段（加速）： $\frac{dT}{dt} > 0$  即  $P_{\text{输入}} > P_{\text{有用}} + P_{\text{无用}}$

制动阶段（减速）： $\frac{dT}{dt} < 0$  即  $P_{\text{输入}} < P_{\text{有用}} + P_{\text{无用}}$

稳定阶段（匀速）： $\frac{dT}{dt} = 0$  即  $P_{\text{输入}} = P_{\text{有用}} + P_{\text{无用}}$

机器稳定运行时， $dT / dt = 0$  机械效率

$$\eta = \frac{P_{\text{有用}}}{P_{\text{输入}}} \times 100\%$$

$\eta$ 是评定机器质量优劣的重要指标之一，一般情况下  $\eta < 1$  。

[例] 车床电动机的输入功率  $P=5.4\text{ kW}$ 。传动零件之间的磨擦损耗功率为输入功率的30%。工件的直径  $d=100\text{ mm}$ 。

求：转速  $n=42\text{ r/min}$  和  $n=112\text{ r/min}$  的允许最大切削力。

解：车床正常工作时，工件匀速旋转，动能无变化

$$\frac{dT}{dt} = 0 \longrightarrow P_{\text{有用}} = P_{\text{输入}} - P_{\text{无用}}$$

其中  $P_{\text{输入}} = 5.4\text{ kW}$   $P_{\text{有用}} = P_{\text{输入}} - P_{\text{无用}} = 3.78\text{ kW}$

$$P_{\text{无用}} = P_{\text{输入}} \times 30\% = 1.62\text{ kW}$$

切削力  $F$  与工件在切削力作用点的速度  $v$  同向

$$P_{\text{有用}} = F \cdot v = Fv = F \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{\pi n}{30} \quad F = \frac{60}{\pi d n} P_{\text{有用}}$$

当  $n = 42\text{ r/min}$  时

当  $n = 112\text{ r/min}$  时

$$F = \frac{60}{\pi \times 0.1 \times 42} \times 3.78 = 17.19\text{ kN}$$

$$F = \frac{60}{\pi \times 0.1 \times 112} \times 3.78 = 6.45\text{ kN}$$

## § 12-5 势力场、势能、机械能守恒定律

### 一、势力场

1、力场：若质点在某空间内的任何位置都受到一个大小和方向完全由所在位置确定的力作用，则此空间称为力场。

2、势力场：在力场中，如果作用于质点的场力作功只决定于质点的始末位置，与运动路径无关，这种力场称为势力场。

重力场、万有引力场、弹性力场都是势力场。

质点在势力场中受到的场力称为有势力(保守力)，  
如重力、弹力等均为有势力（保守力）。

## 二、势能

在势力场中，质点从位置 $M$ 运动到任选位置 $M_0$ ，有势力所作的功称为质点在位置 $M$ 相对于位置 $M_0$ 的势能，用 $V$ 表示。

$$V = \int_M^{M_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_M^{M_0} F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$M_0$ 作为势能为零的基准位置，称为零势能点。势能具有相对性。零势能点可以任意选取，对于不同的零势能点，在势力场中同一位置具有不同的势能。

### 零势能点的选取

①、重力场 取 $z_0$ 处为零势能点  $V = mg(z - z_0) = \pm mgh$

②、弹性力场 取弹簧的自然位置为零势能点

$$V = \frac{1}{2}k\delta^2 \quad \text{其中}\delta\text{为弹簧的变形}$$

### ③、重力—弹性力系统

一般取系统的平衡位置作为系统的零势能点。

质量为 $m$ ，长为 $l$ 的均质杆用刚性系数为 $k$ 的弹簧吊住于水平位置平衡。选不同零势能点列出系统的势能。

平衡时弹簧的初变形为  $\delta_0 = \frac{mg}{2k}$

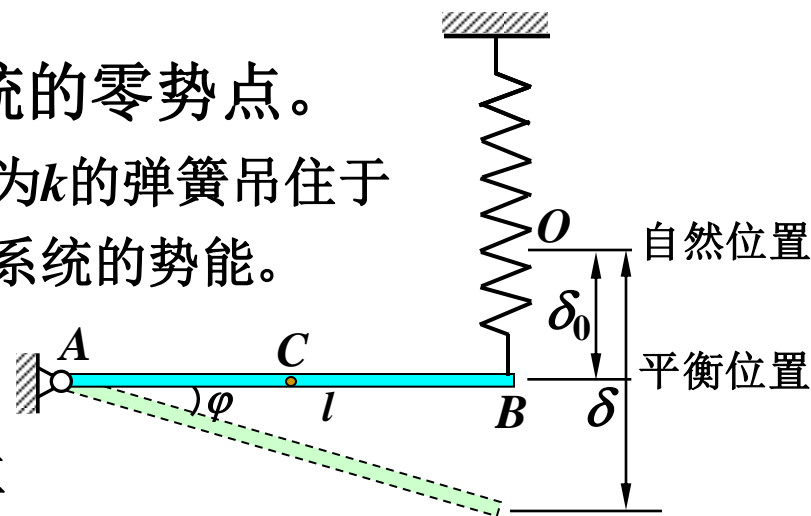
选水平位置为重力零势能点，自然位置 $O$ 为弹簧零势能点。杆处于微小摆

角 $\varphi$ 时，系统的势能为

$$V = \frac{1}{2}k(\delta_0 + \varphi l)^2 - mg \frac{\varphi l}{2} = \frac{1}{2}kl^2\varphi^2 + \frac{m^2g^2}{8k}$$

选杆水平位置平衡时为系统的零势能点，杆处于微小摆角 $\varphi$ 时，系统的势能为

$$V = \frac{1}{2}k(\delta^2 - \delta_0^2) - mg \frac{\varphi l}{2} = \frac{1}{2}k[(\delta_0 + \varphi l)^2 - \delta_0^2] - mg \frac{\varphi l}{2} = \frac{1}{2}kl^2\varphi^2$$



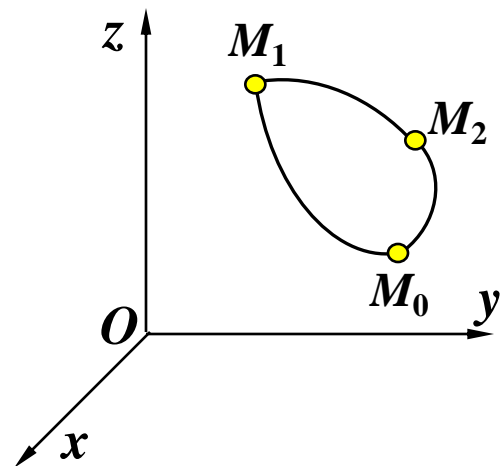
### 三、有势力的功

在 $M_1$ 位置:  $V_1 = \int_{M_1}^{M_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} = W_{10}$

在 $M_2$ 位置:  $V_2 = \int_{M_2}^{M_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} = W_{20}$

$M_1 \rightarrow M_2$ :

$$W_{12} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{M_1}^{M_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{M_0}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = W_{10} - W_{20} = V_1 - V_2$$



有势力的功等于质点系在运动的始末位置的势能之差。

$V$ 与积分路径无关，积分号内必为全微分，即

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dV$$

$V = V(x, y, z)$  是坐标的单值连续函数。

质点系的势能:  $V(x_1, y_1, z_1, \dots) = \sum \int_{M_i}^{M_{io}} (F_{xi} dx_i + F_{yi} dy_i + F_{zi} dz_i)$

等势面: 质点位于该面上任何地方, 势能都相等。

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \quad \therefore F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

#### 四、机械能守恒定律

机械能: 系统的动能与势能的代数和。

设质点系只受到有势力(或同时受到不作功的非有势力)作用,

则  $T_2 - T_1 = W_{12} = V_1 - V_2$

$\therefore T_1 + V_1 = T_2 + V_2 = \text{常量}$  —机械能守恒定律

这样的系统称为保守系统。

对非保守系统, 设非保守力的功为  $W'_{12}$ , 则有

$$(T_2 + V_2) - (T_1 + V_1) = W'_{12}$$



[例] 长为 $l$ ，质量为 $m$ 的均质直杆，初瞬时直立于光滑的桌面上。当杆无初速度地倾倒后，求质心的速度（用杆的倾角 $\theta$ 和质心的位置表达）。

解：由于水平方向不受外力，且初始静止，故质心 $C$ 只能铅垂下降。

约束力不作功，主动力为有势力，因此可用机械能守恒定律求解。

初瞬时：  $T_1 = 0, \quad V_1 = mg \frac{l}{2}$

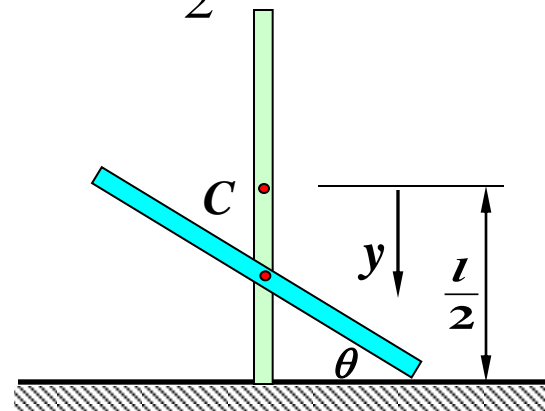
任一瞬时：  $y = \frac{l}{2}(1 - \sin \theta), \quad v_C = \dot{y} = -\frac{l}{2} \cos \theta \dot{\theta}, \quad \dot{\theta} = -\omega = -\frac{2\dot{y}}{l \cos \theta}$

$$T_2 = \frac{1}{2} J_C \omega^2 + \frac{1}{2} m v_C^2 = \frac{1}{24} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 \quad V_2 = mg \left( \frac{l}{2} - y \right) = mg \frac{l \sin \theta}{2}$$

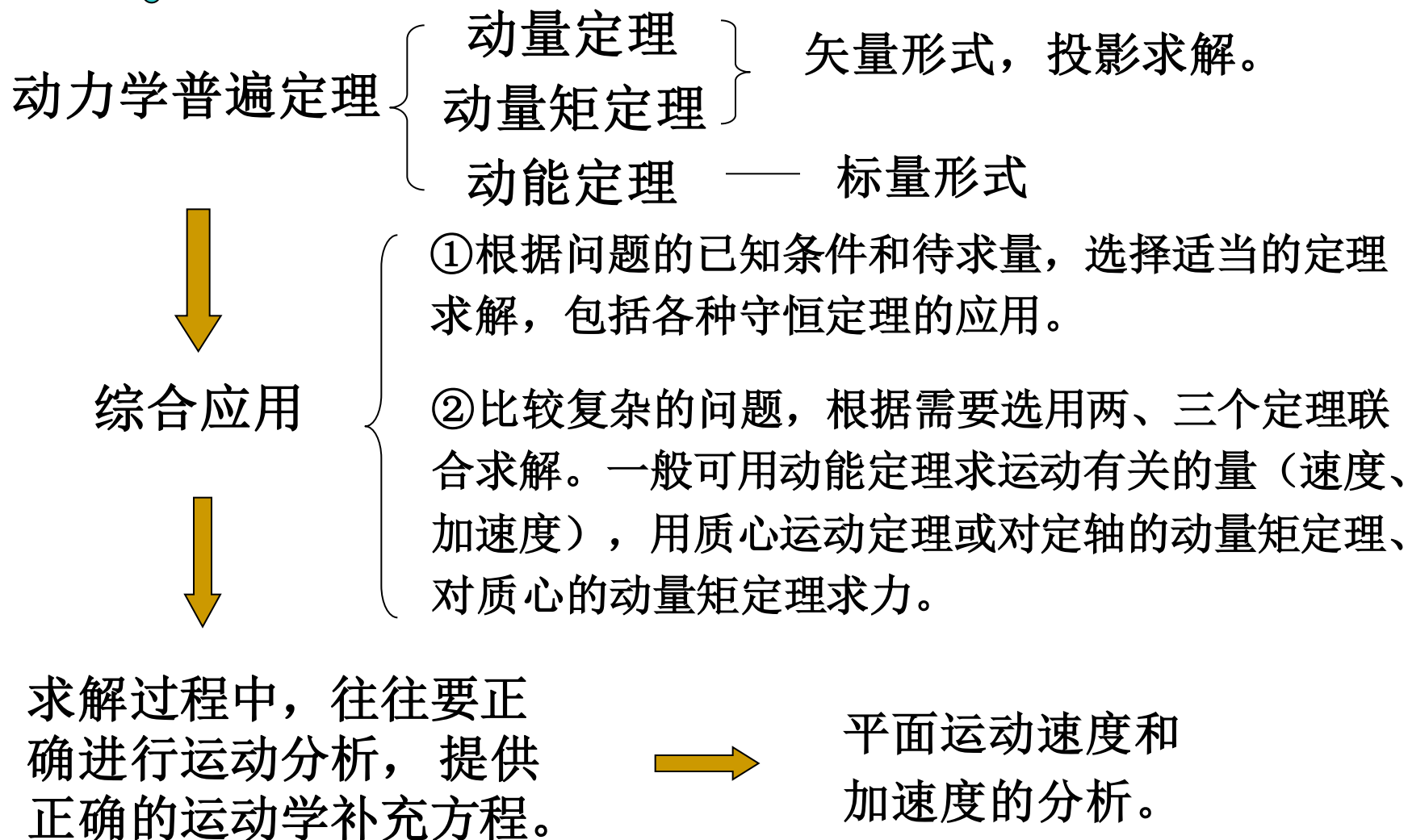
由机械能守恒定律：  $0 + mg \frac{l}{2} = \frac{1}{24} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + mg \left( \frac{l}{2} - y \right)$

将  $\dot{\theta} = -\frac{2\dot{y}}{l \cos \theta}$  代入上式，化简后得

$$\dot{y} = \sqrt{\frac{6g \cos^2 \theta}{1 + 3 \cos^2 \theta} \cdot \frac{(1 - \sin \theta)}{2}} l = \sqrt{\frac{6g \cos^2 \theta}{1 + 3 \cos^2 \theta}} y$$



## § 12-6 动力学普遍定理及综合应用



## 动力学普遍定理的综合应用

[例]置于光滑水平面上的两均质杆AC和BC各重为 $P$ ，长为 $l$ ，在C处光滑铰接，初始静止，C点高度为 $h$ ，求铰C到达地面时的速度。

解：整体分析受力如图。因为  $\sum F_x^{(e)} = 0$ ，  
且初始静止，所以水平方向质心位置守恒。

$$T_1 = 0 \quad T_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \frac{P}{g} l^2 \omega^2 \times 2 = \frac{1}{3} \frac{P}{g} l^2 \omega^2$$

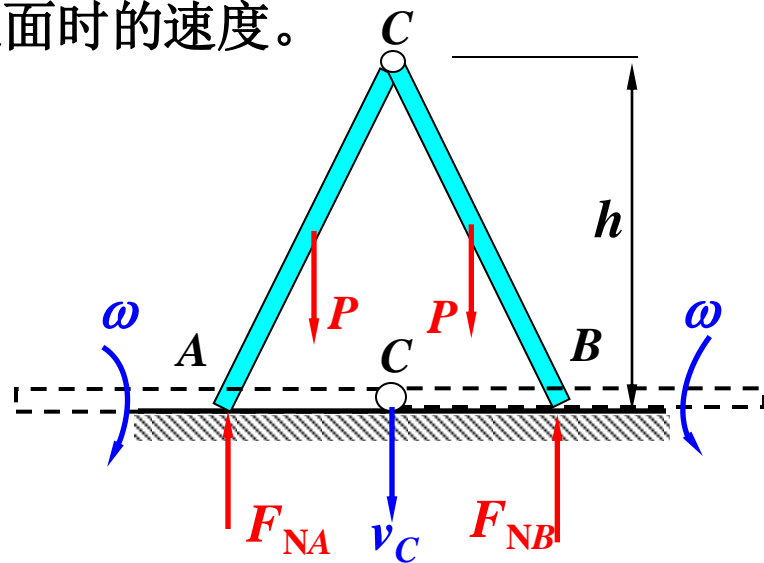
$$v_C = l\omega \quad \therefore T_2 = \frac{1}{3} \frac{P}{g} v_C^2$$

$$\sum W_{12} = P \cdot \frac{h}{2} \times 2 = Ph$$

$$\text{代入动能定理: } \frac{1}{3} \frac{P}{g} v_C^2 - 0 = Ph \quad \therefore v_C = \sqrt{3gh}$$

动量守恒定理+动能定理求解。

计算动能时，利用平面运动的运动学关系。



[例]重 $P_1=60\text{N}$ 、长 $24\text{cm}$ 的均质杆 $AB$ 与重 $P_2=150\text{N}$ 的均质圆盘在 $B$ 处用铰链连接。系统由图示位置无初速地释放。求系统经过最低位置时 $B$ 的速度及支座 $A$ 处的约束力。

解：（1）取圆盘在任意位置为研究对象

$$\sum M_B(F) = 0; \quad J_B \alpha_B = 0 \quad \therefore \alpha_B = 0$$

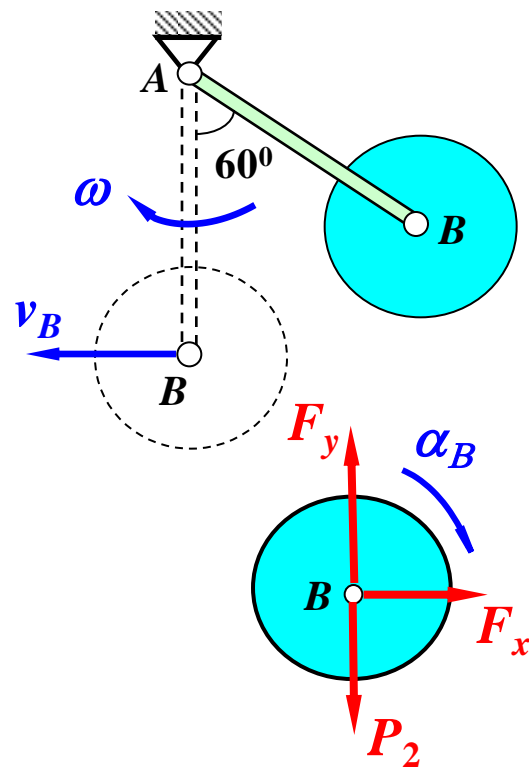
$$\omega_B = \omega_0 = 0 \quad \text{圆盘运动始终为平移!}$$

（2）用动能定理求速度。

取系统研究。初始时 $T_1=0$ ，最低位置时：

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} J_A \omega^2 + \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} v_B^2 \quad \boxed{l\omega = v_B} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \frac{P_1}{g} v_B^2 + \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} v_B^2 = \frac{P_1 + 3P_2}{6g} v_B^2 \end{aligned}$$

$$\sum W_{12} = P_1 \left( \frac{l}{2} - \frac{l}{2} \cos 60^\circ \right) + P_2 (l - l \cos 60^\circ) = \left( \frac{P_1}{2} + P_2 \right) (l - l \cos 60^\circ)$$



$$T_2 - T_1 = \sum W_{12} \quad \frac{P_1 + 3P_2}{6g} v_B^2 - 0 = \left(\frac{P_1}{2} + P_2\right)(l - l \cos 60^\circ)$$

代入数据，得  $v_B = 1.58 \text{ m/s}$

(3) 用动量矩定理求杆的角加速度  $\alpha$ 。

系统到达最低位置时受力如图

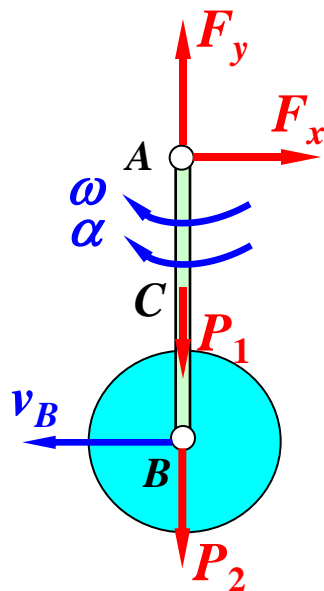
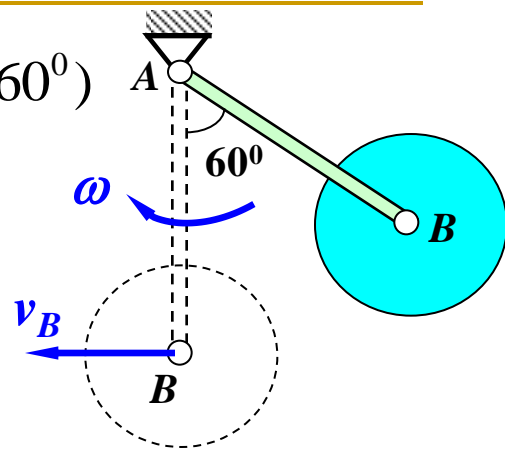
$$L_A = \frac{1}{3} \frac{P_1}{g} l^2 \omega + \frac{P_2}{g} v_B l = \left(\frac{1}{3} \frac{P_1}{g} l^2 + \frac{P_2}{g} l^2\right) \omega$$

由于  $\frac{dL_A}{dt} = \sum M_A(F^{(e)}) = 0$  所以  $\alpha = 0$ 。

杆质心  $C$  的加速度:  $a_C = a_C^n = \frac{l}{2} \omega^2 \uparrow$  ( $a_C^t = 0$ )

盘质心加速度:  $a_B = a_B^n = l \omega^2 \uparrow$  ( $a_B^t = 0$ )

$$\omega = \frac{v_B}{l} = \frac{1.58}{0.24} = 6.58 \text{ rad/s}$$



(4) 由质心运动定理求支座约束力。

研究整个系统，受力图如图。

由刚体系的质心运动定理，列方程

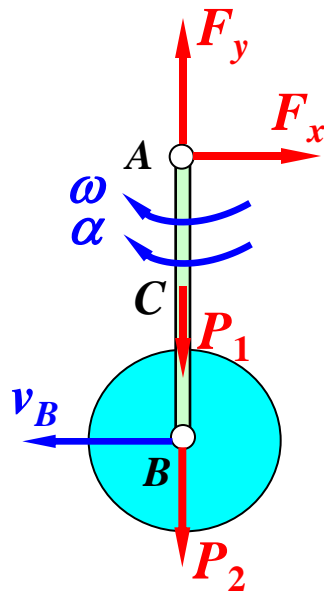
$$\sum m_i a_{ix} = \frac{P_1}{g} a_C^t + \frac{P_2}{g} a_B^t = 0 = F_{Ax}$$

$$\sum m_i a_{iy} = \frac{P_1}{g} a_C^n + \frac{P_2}{g} a_B^n = \frac{P_1}{g} \frac{l}{2} \omega^2 + \frac{P_2}{g} l \omega^2 = F_{Ay} - P_1 - P_2$$

$$\text{得} \quad F_{Ax} = 0, \quad F_{Ay} = 401\text{N}$$

所用定理有相对质心的动量矩守恒定理；动能定理；  
动量矩定理；质心运动定理。

注意：如果用对积分形式的动能定理求导计算角加速度 $\alpha$ ，  
则必须取杆 $AB$ 在一般位置进行分析。



[例] 质量为 $m$ 的板置于两个半径为 $r$ ，质量为 $\frac{m}{2}$ 的均质圆柱上，如在板上作用水平力 $F$ ，求板的加速度。设接触处都有摩擦，而无相对滑动。

解：用功率方程求解

设任一瞬时板的速度为 $v$ ，则圆柱体质心速度为 $v/2$ ，角速度 $\omega = v/2r$ 。

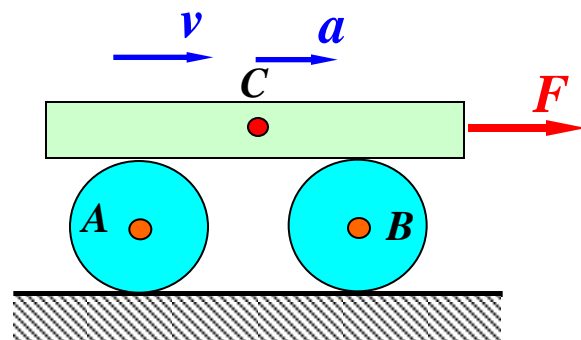
系统的动能

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + 2\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{m}{2} \left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{m}{2} r^2\right) \left(\frac{v}{2r}\right)^2\right] = \frac{11}{16}mv^2$$

主动力的功率之和  $\sum P = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv$

由功率方程：  $\frac{dT}{dt} = \sum P \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{11}{16}mv^2 \right) = Fv$

$$\therefore a = \frac{8F}{11m}$$



此题单求加速度，最简单的方法是动能定理。在十三章达朗贝尔原理作为习题出现，**P347.13-17**。用其它方法较麻烦。

[例] 均质杆质量为 $m$ ，长为 $l$ ，可绕距端点 $l/3$ 的转轴 $O$ 转动，求杆由水平位置静止开始转动到任一位置时的角速度、角加速度以及轴承 $O$ 的约束力。

解法1：用动能定理求运动

以杆为研究对象。由于杆由水平位置静止开始运动，故开始的动能为零，即 $T_1=0$

杆作定轴转动，转动到任一位置时的动能为

$$T_2 = \frac{1}{2} J_O \omega^2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{12} ml^2 + m \left( \frac{l}{2} - \frac{l}{3} \right)^2 \right] = \frac{1}{18} ml^2 \omega^2$$

在此过程中所有的力所作的功为  $\sum W_{12} = mgh = \frac{1}{6} mgl \sin \varphi$

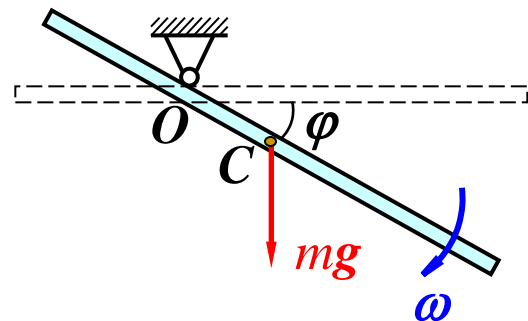
由  $T_2 - T_1 = \sum W_{12}$  得  $\frac{1}{18} ml^2 \omega^2 - 0 = \frac{1}{6} mgl \sin \varphi$

$$\omega^2 = \frac{3g}{l} \sin \varphi \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{l} \sin \varphi}$$



求导

$$\alpha = \frac{3g}{2l} \cos \varphi$$





## 解法2：用定轴转动微分方程求运动

由定轴转动微分方程  $J_O \alpha = \sum M_O(F)$

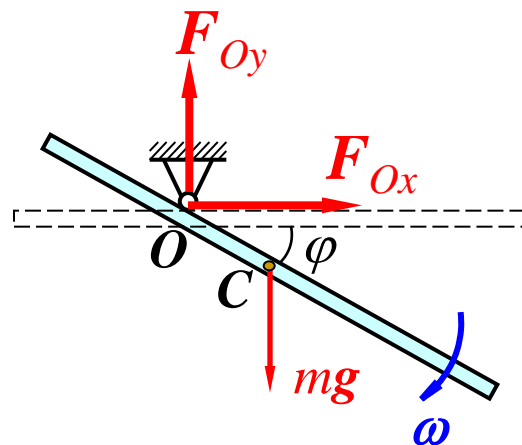
$$\text{得} \quad \frac{1}{9} m l^2 \alpha = m g \frac{l}{6} \cos \varphi$$

$$\text{即} \quad \alpha = \frac{3g}{2l} \cos \varphi$$

$$\text{又} \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\varphi} \quad \text{所以} \quad \omega \frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{3g}{2l} \cos \varphi$$

$$\int_0^\omega \omega d\omega = \int_0^\varphi \frac{3g}{2l} \cos \varphi d\varphi$$

$$\text{即} \quad \frac{1}{2} \omega^2 \Big|_0^\omega = \frac{3g}{2l} \sin \varphi \Big|_0^\varphi \quad \text{所以} \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{l} \sin \varphi}$$



求质心加速度进而求约束力。

质心加速度有切向和法向分量：

$$a_C^t = OC \cdot \alpha = \frac{l}{6} \cdot \frac{3g}{2l} \cos \varphi = \frac{g}{4} \cos \varphi$$

$$a_C^n = OC \cdot \omega^2 = \frac{l}{6} \cdot \frac{3g}{l} \sin \varphi = \frac{g}{2} \sin \varphi$$

将其向直角坐标轴上投影得

$$a_{Cx} = -a_C^t \sin \varphi - a_C^n \cos \varphi = -\frac{3g}{4} \sin \varphi \cos \varphi$$

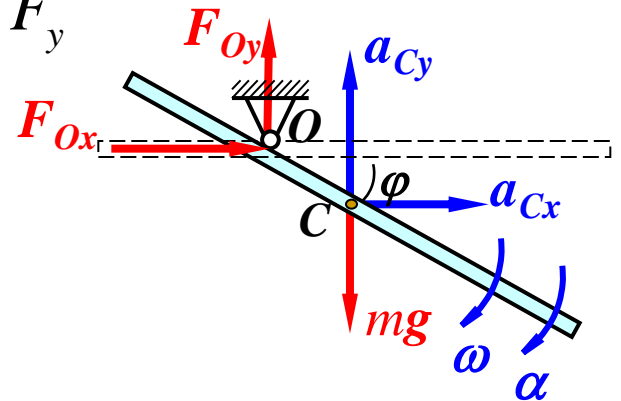
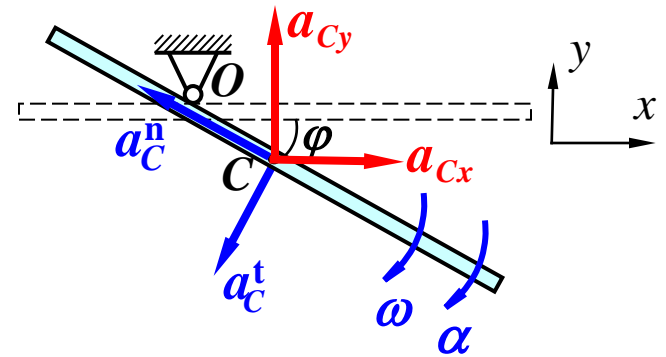
$$a_{Cy} = -a_C^t \cos \varphi + a_C^n \sin \varphi = -\frac{3g}{4} (1 - 3 \sin^2 \varphi)$$

由质心运动定理  $ma_{Cx} = \sum F_x$ ,  $ma_{Cy} = \sum F_y$

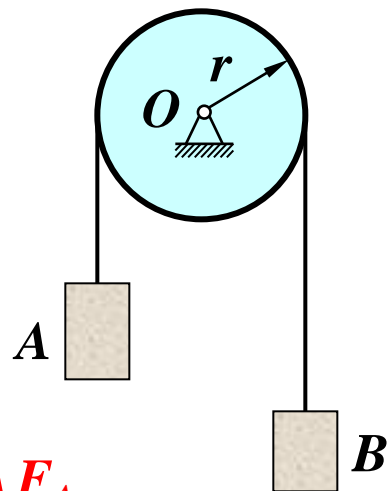
$$\text{得: } -\frac{3mg}{4} \sin \varphi \cos \varphi = F_{Ox}$$

$$-\frac{3mg}{4} (1 - 3 \sin^2 \varphi) = F_{Oy} - mg$$

$$\text{解得: } F_{Ox} = -\frac{3mg}{8} \sin 2\varphi \quad F_{Oy} = \frac{mg}{4} (1 + 9 \sin^2 \varphi)$$



[例] 物块A和B的质量分别为 $m_1$ 、 $m_2$ ，且  $m_1 > m_2$ ，分别系在绳索的两端，绳跨过一定滑轮，如图。滑轮的质量为 $m$ ，并可看成是半径为 $r$ 的均质圆盘。假设不计绳的质量和轴承摩擦，绳与滑轮之间无相对滑动，试求物块A的加速度和轴承O的约束力。



解1：取单个物体为研究对象。

分别以物块A、B和滑轮为研究对象，受力如图。  
由质心运动定理和定轴转动的微分方程，得

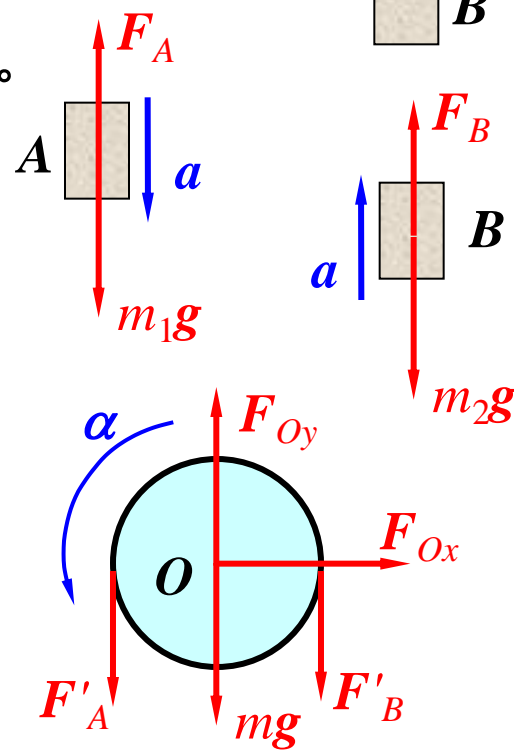
$$m_1 a = m_1 g - F_A \quad (1)$$

$$m_2 a = F_B - m_2 g \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} m r^2 \cdot \alpha = (F'_A - F'_B) r \quad (3)$$

$$0 = F_{Ox} \quad (4)$$

$$0 = F_{Oy} - F'_A - F'_B - mg \quad (5)$$



注意到  $a = r\alpha$  由以上方程联立求解得:  $a = \frac{2(m_1 - m_2)}{m + 2(m_1 + m_2)} g$

$$F_{Ox} = 0 \quad F_{Oy} = (m + m_1 + m_2)g - \frac{2(m_1 - m_2)^2}{m + 2(m_1 + m_2)} g$$

解2: 用动能定理和质心运动定理。以整个系统为研究对象, 受力如图, 运动分析如图。系统动能为

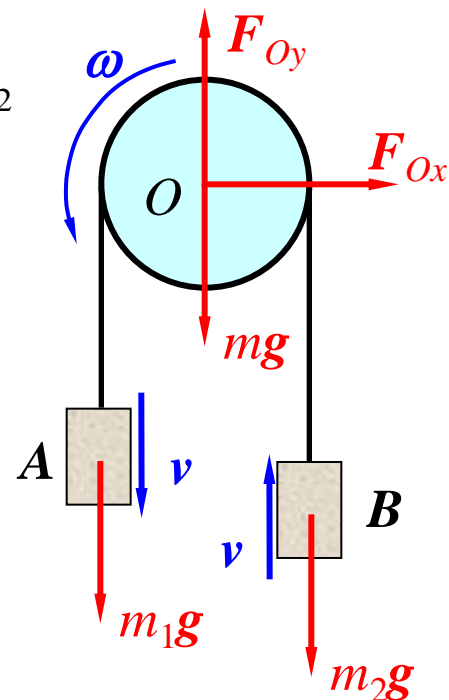
$$T = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} m r^2 \right) \left( \frac{v}{r} \right)^2 = \frac{1}{4} (m + 2m_1 + 2m_2) v^2$$

$$dT = \frac{1}{2} (m + 2m_1 + 2m_2) v dv$$

所有力的元功为  $\sum \delta W_i = (m_1 - m_2) g ds = (m_1 - m_2) g v dt$

由微分形式  
的动能定理得  $\frac{1}{2} (m + 2m_1 + 2m_2) v dv = (m_1 - m_2) g v dt$

于是可得 
$$a = \frac{2(m_1 - m_2)}{m + 2(m_1 + m_2)} g$$



考虑刚体系统的质心运动定理

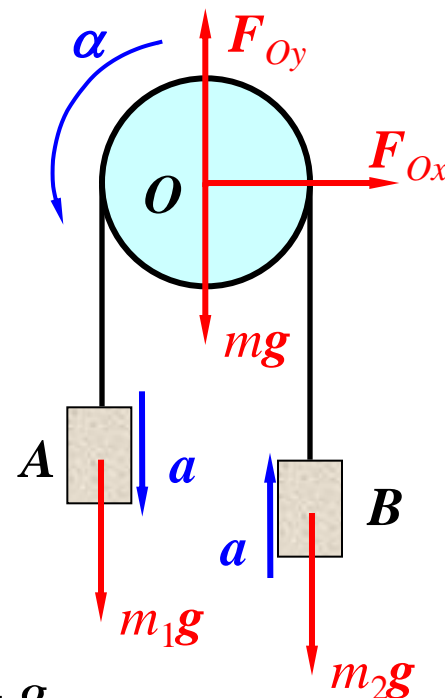
$$\sum m_i a_{Cix} = \sum F_x^{(e)}$$

$$\sum m_i a_{Ciy} = \sum F_y^{(e)}$$

得  $F_{Ox} = 0$

$$m_2 a - m_1 a = F_{Oy} - (m + m_1 + m_2)g$$

于是可得 
$$F_{Oy} = (m + m_1 + m_2)g - \frac{2(m_1 - m_2)^2}{m + 2(m_1 + m_2)}g$$



解3：用动量矩定理和质心运动定理

解：以整个系统为研究对象，受力如图，运动分析如图。系统对定轴的动量矩为

$$L_O = m_1 vr + m_2 vr + \left(\frac{1}{2} mr^2\right) \omega$$

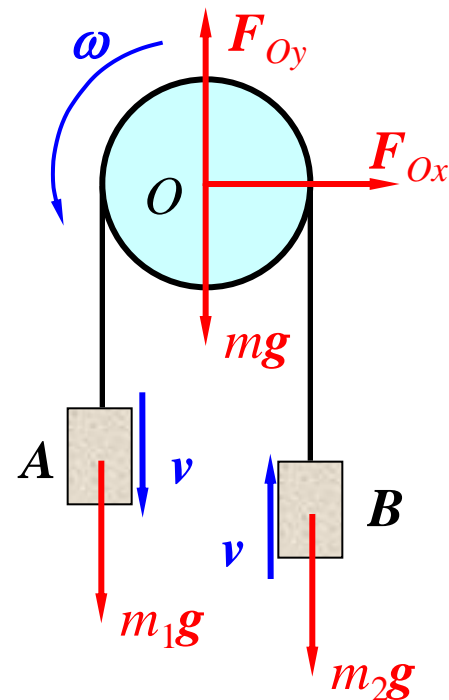
$$= \frac{1}{2} (m + 2m_1 + 2m_2) vr$$

由  $\frac{d}{dt} L_O = \sum M_O(F^{(e)})$  得

$$\frac{1}{2} (m + 2m_1 + 2m_2) r \frac{dv}{dt} = (m_1 - m_2) gr$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{2(m_1 - m_2)}{m + 2(m_1 + m_2)} g$$

然后按解2的方法即可求得轴承O的约束力。



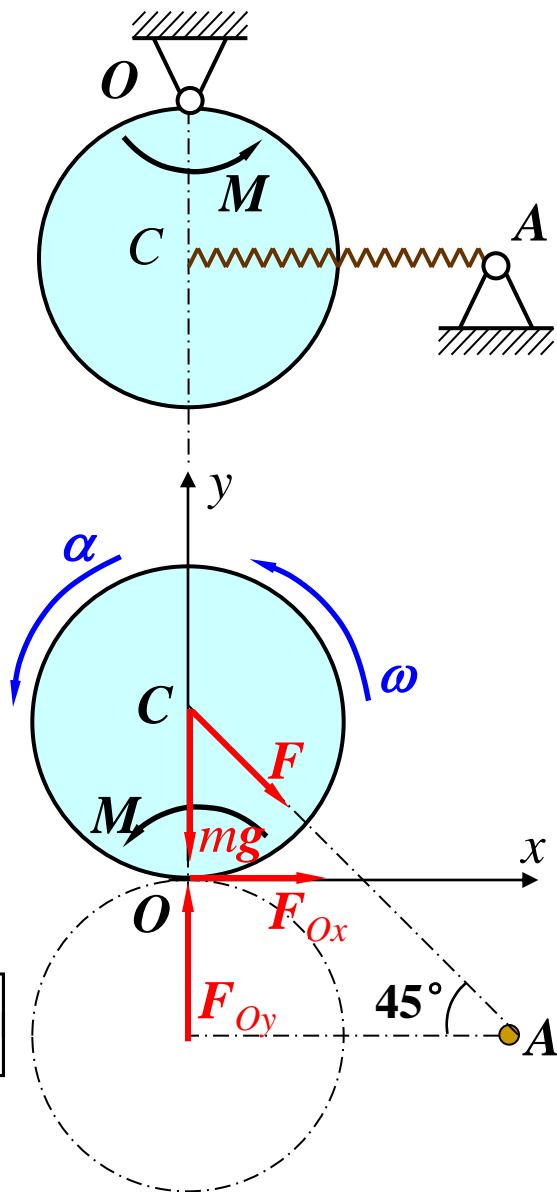
[例]如图所示，均质圆盘可绕 $O$ 轴在铅垂面内转动，圆盘的质量为 $m$ ，半径为 $R$ 。在圆盘的质心 $C$ 上连结一刚性系数为 $k$ 的水平弹簧，弹簧的另一端固定在 $A$ 点， $CA=2R$ 为弹簧的原长，圆盘在常力偶矩 $M$ 的作用下，由最低位置无初速地绕 $O$ 轴向上转。试求圆盘到达最高位置时，轴承 $O$ 的约束力。

解：以圆盘为研究对象，受力如图。

$$J_O = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

$$T_1 = 0 \quad T_2 = \frac{1}{2}J_O\omega^2 = \frac{3}{4}mR^2\omega^2$$

$$\begin{aligned} \Sigma W_{12} &= M\pi - 2mgR + \frac{k}{2} \left[ 0 - (2\sqrt{2}R - 2R)^2 \right] \\ &= M\pi - 2mgR - 0.3431kR^2 \end{aligned}$$



由  $T_2 - T_1 = \sum W_{12}$  得

$$\frac{3}{4}mR^2\omega^2 = M\pi - 2mgR - 0.3431kR^2$$

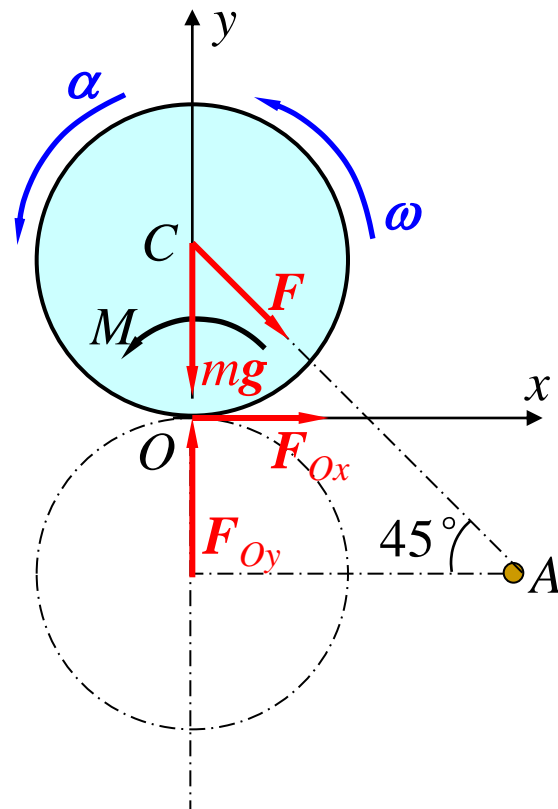
解得

$$\omega = \sqrt{\frac{4}{3mR^2} (M\pi - 2mgR - 0.3431kR^2)}$$

再由定轴转动微分方程得

$$\frac{3}{2}mR^2\alpha = M - k(2\sqrt{2}R - 2R)R\frac{\sqrt{2}}{2}$$

解得 
$$\alpha = \frac{2(M - 0.5859kR^2)}{3mR^2}$$





$$a_{Cx} = -R\alpha = -\frac{2(M - 0.5859 kR^2)}{3mR}$$

$$a_{Cy} = -R\omega^2 = -\frac{4}{3mR}(M\pi - 2mgR - 0.3431kR^2)$$

由质心运动微分方程得

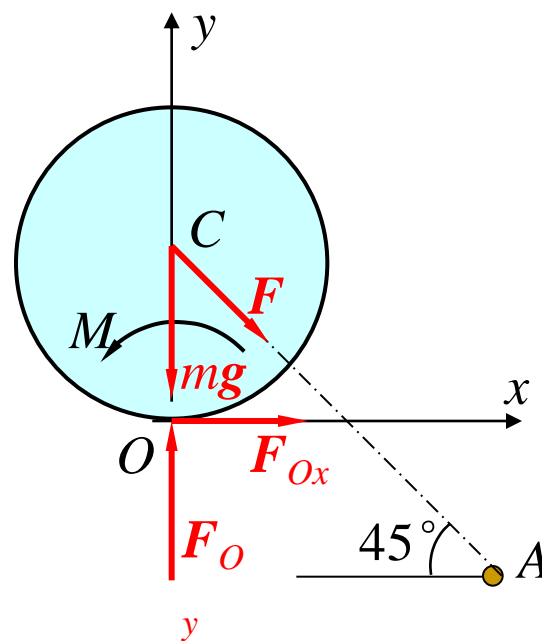
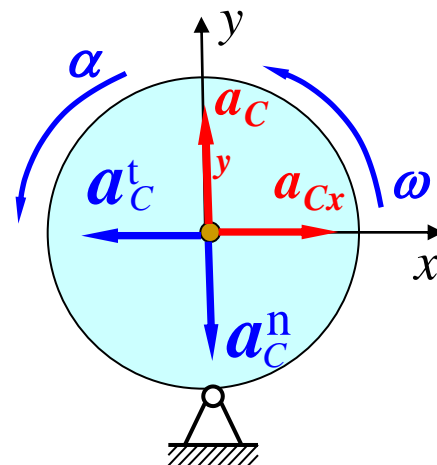
$$ma_{Cx} = F_{Ox} + F \cos 45^\circ$$

$$ma_{Cy} = F_{Oy} - mg - F \sin 45^\circ$$

代入加速度解得

$$F_{Ox} = -\frac{2M}{3R} - 0.1953 kR$$

$$F_{Oy} = 3.667 mg + 1.043 kR - 4.189 \frac{M}{R}$$



[例]均质细杆长为 $l$ ，质量为 $m$ ，静止直立于光滑水平面上。当杆受微小干扰而倒下时，求杆刚刚到达地面时的角速度和地面的约束力。

解：由于地面光滑，直杆沿水平方向不受力，倒下过程中质心将铅直下落。杆运动到任一位置(与水平方向夹角为 $\theta$ )时的角速度为

$$\omega = \frac{v_C}{CP} = \frac{2v_C}{l \cos \theta}$$

此时杆的动能为

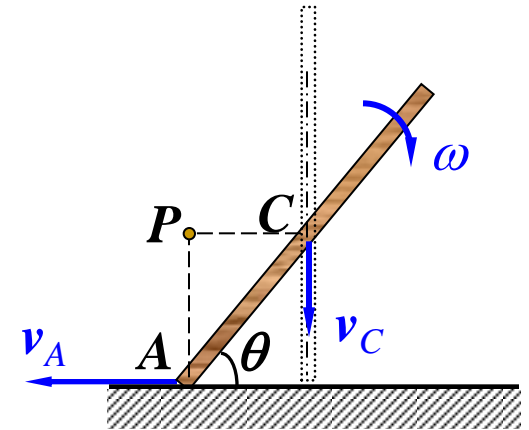
$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2 = \frac{1}{2} m \left( 1 + \frac{1}{3 \cos^2 \theta} \right) v_C^2$$

初动能为零，此过程只有重力做功，由

$$T_2 - T_1 = \sum W_{12}$$

$$\frac{1}{2} m \left( 1 + \frac{1}{3 \cos^2 \theta} \right) v_C^2 = mg \frac{l}{2} (1 - \sin \theta)$$

$$\text{当 } \theta=0^\circ \text{ 时解出 } v_C = \frac{1}{2} \sqrt{3gl} \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

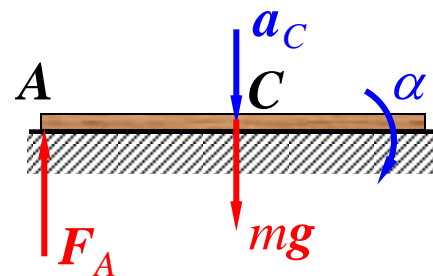


杆刚刚达到地面时受力及加速度如图所示。

由刚体平面运动微分方程，得

$$mg - F_A = ma_C \quad (1)$$

$$F_A \frac{l}{2} = J_C \alpha = \frac{1}{12} ml^2 \alpha \quad (2)$$

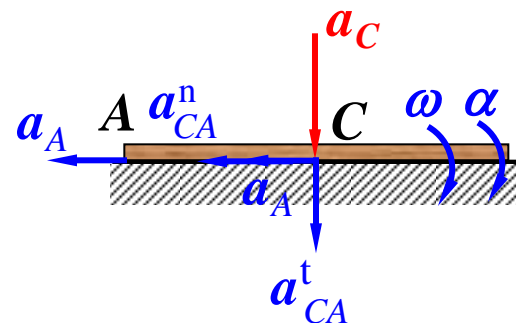


杆作平面运动，以A为基点，则C点的加速度为

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{CA}^t + \mathbf{a}_{CA}^n$$

沿铅垂向下方向投影，得

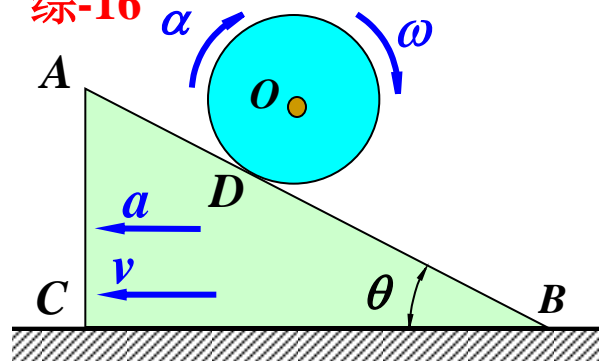
$$a_C = a_{CA}^t = \frac{l}{2} \alpha \quad (3)$$



联立求解方程(1)~(3)，得  $F_A = \frac{1}{4} mg$

[例]图示三棱柱体 $ABC$ 的质量为 $m_1$ ，放在光滑的水平面上，可以无摩擦地滑动。质量为 $m_2$ 的均质圆柱体 $O$ 由静止沿斜面 $AB$ 向下滚动而不滑动。如斜面的倾角为 $\theta$ ，求三棱柱体的加速度。 **P326, 综-16**

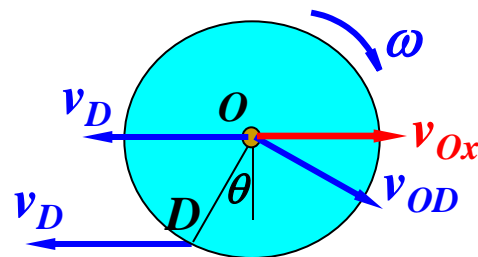
解：整体系统在水平方向上受力为零，所以系统的动量在水平方向上守恒。设某瞬时三棱柱的速度和加速度分别为 $v$ 和 $a$ ，圆柱体的角速度是和角加速度分别为 $\omega$ 和 $\alpha$ 。（求圆柱体的动量需要用 $O$ 点的绝对速度）



基点法：取圆柱体与三棱柱的接触点 $D$ 为基点，分析圆柱体中心 $O$ 点的速度，如图所示

$$\vec{v}_O = \vec{v}_D + \vec{v}_{OD}, \quad v_D = v, \quad v_{OD} = r\omega$$

$$v_{Ox} = -v + r\omega \cos \theta$$



系统动量的水平分量：

$$P_{x0} = 0, \quad P_{x1} = -m_1 v + m_2 v_{Ox} = -m_1 v + m_2 (-v + r\omega \cos \theta)$$

由动量守恒定理：

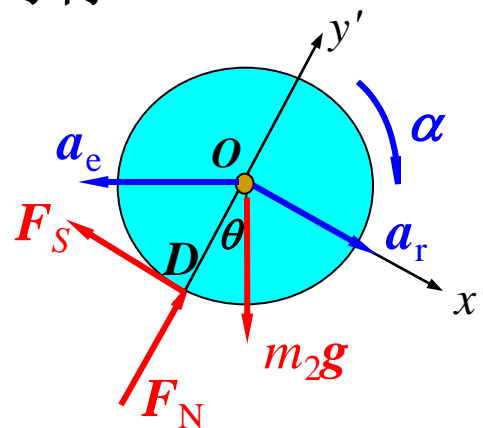
$$P_{x1} = P_{x0} = -m_1 v + m_2 (-v + r\omega \cos \theta) = 0$$

$$-m_1 v + m_2(-v + r\omega \cos \theta) = 0 \quad \text{两边对时间} t \text{求导得}$$

$$-(m_1 + m_2)a + m_2 r \alpha \cos \theta = 0 \quad (*)$$

此式实质就是质心运动定理在水平线上的投影式

刚体系统  $\longrightarrow \sum m_i a_{C\,ix} = \sum F_{ix}^{(e)}$



欲求  $a$  需先求出  $\alpha$ ，取圆柱体分析如图所示，由平面运动微分方程得

$$J_O \alpha = \Sigma M_O(F) \quad \frac{1}{2} m_2 r^2 \alpha = F_S r$$

$$m_2 a_{Ox'} = \Sigma F_{x'} \quad m_2 (r\alpha - a \cos \theta) = m_2 g \sin \theta - F_S$$

从中解出  $\alpha = \frac{2a \cos \theta + 2g \sin \theta}{3r}$

代入(\*)式得  $a = \frac{m_2 g \sin 2\theta}{3m_1 + m_2 + 2m_2 \sin^2 \theta}$

$$\begin{aligned} a_{Ox} &= a_r - a_e \cos \theta \\ &= r\alpha - a \cos \theta \end{aligned}$$

动能定理建立方程较麻烦。

[例]均质直杆AB长为 $2l$ ，质量为 $m$ ，A端被约束在一光滑水平滑道内。开始时直杆位于水平位置，由静止释放后，该杆受重力作用而运动。求A端的约束力。**P328，综-28**

解：系统受力如图，水平方向无外力作用。质心C初始静止，因此质心C在水平方向守恒，其轨迹为铅直线。图示为质心的加速度和杆的角加速度。由平面运动微分方程有

$$ma_C = mg - F_N \quad (1)$$

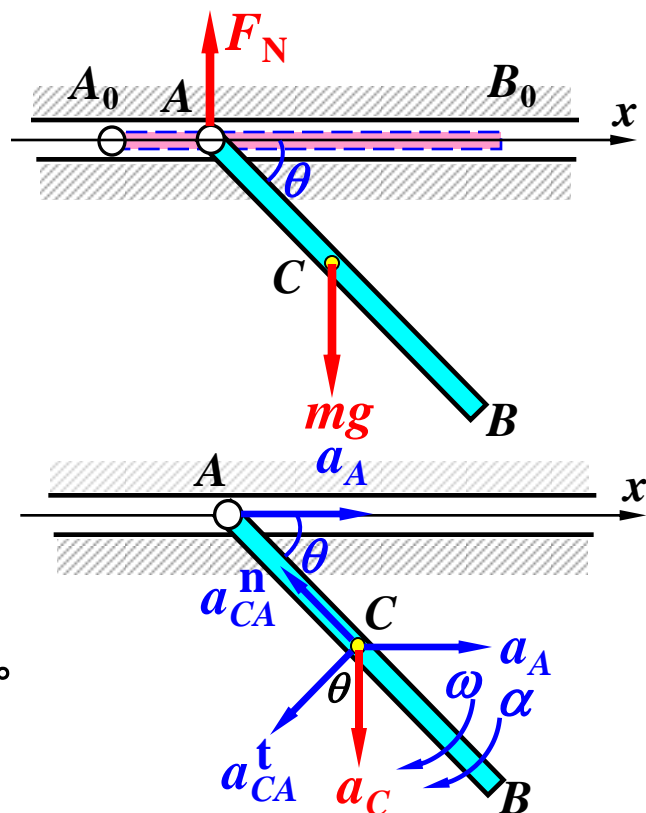
$$\frac{1}{12} m(2l)^2 \alpha = F_N l \cos \theta \quad (2)$$

2个方程3个未知数，必须补充运动学关系。

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA}^t + \vec{a}_{CA}^n$$

方程两边在铅垂轴投影得

$$a_C = a_{CA}^t \cos \theta - a_{CA}^n \sin \theta = l\alpha \cos \theta - l\omega^2 \sin \theta \quad (3)$$



由动能定理  $T_2 - T_1 = \Sigma W_{12}$  有

$$\frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2 = mgl \sin \theta \quad (4)$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{CA}$$

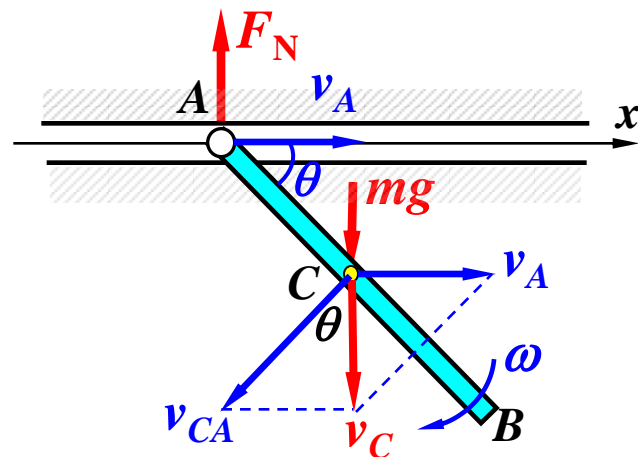
由此可知  $v_C = v_{CA} \cos \theta = l\omega \cos \theta$

$$v_C \text{ 代入 (4) 并化简得 } l\omega^2 = \frac{6g \sin \theta}{1 + 3\cos^2 \theta} \quad (5)$$

$$\text{由 (2) 求得 } l\alpha = \frac{3\cos \theta}{m} F_N \quad (6)$$

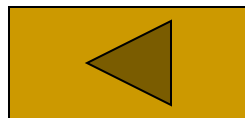
$$(5)、(6) \text{ 代入 (3) 后再代入 (1) 求得 } F_N = \frac{4 + 3\sin^2 \theta}{(1 + 3\cos^2 \theta)^2} mg$$

$$\text{或: (5) 式两边对时间求导得 } l\alpha = \frac{3\cos \theta(4 + 3\sin^2 \theta)}{(1 + 3\cos^2 \theta)^2} g \quad \text{联立 (6) 求解}$$



通过速度瞬心列动能可直接得到(5)式

# 本章结束





# 理论力学

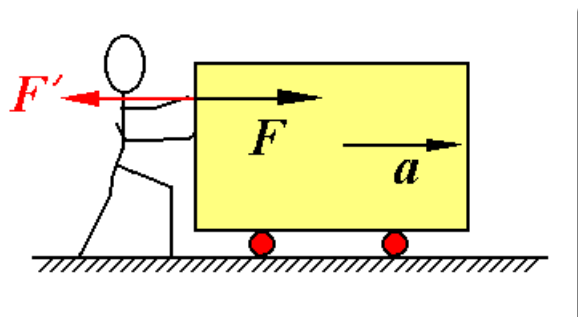
## 第十三章 达兰贝尔原理

前面介绍的动力学普遍定理，为解决质点系动力学问题提供了一种普遍的方法。达兰贝尔原理为解决非自由质点系动力学问题提供了另一种普遍的方法。这种方法的特点是：用静力学研究平衡问题的方法来研究动力学的不平衡问题，因此这种方法又叫动静法。由于静力学研究平衡问题的方法比较简单，也容易掌握，因此动静法在工程中被广泛使用。

## § 13-1 达兰贝尔原理

### 一、惯性力的概念

人用手推车  $\bar{F}' = -\bar{F} = -m\bar{a}$



力 $\bar{F}'$ 是由于小车具有惯性，力图保持原来的运动状态，对于施力物体(人手)产生的反抗力。称为小车的**惯性力**。

定义：质点惯性力  $\bar{F}_g = -m\bar{a}$

加速运动的质点，对迫使其产生加速运动的物体的惯性反抗的总和。

[注] 质点惯性力不是作用在质点上的真实力，它是质点对施力体反作用力的合力。

## 二、质点的达兰贝尔原理

非自由质点 $M$ ，质量 $m$ ，受主动力 $F$ ，约束力 $F_N$ 作用，由牛顿第二定律有：

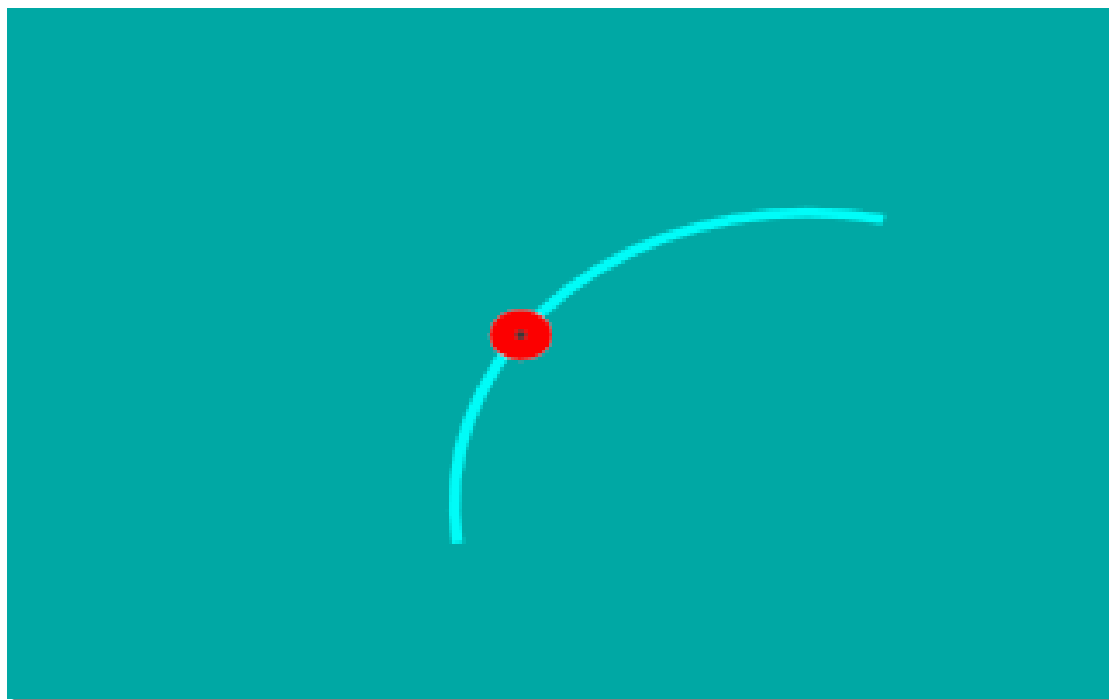
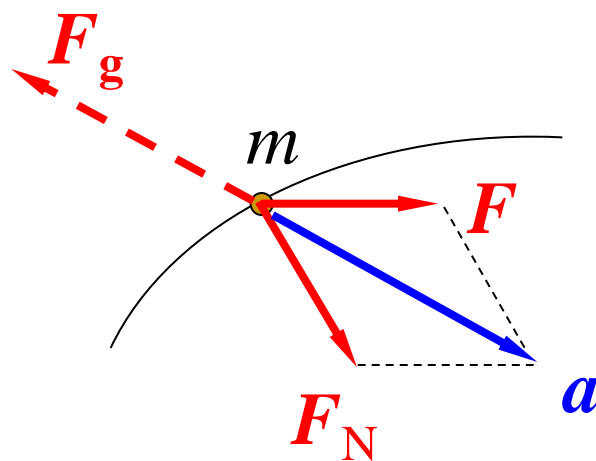
$$\bar{F} + \bar{F}_N = m\bar{a}$$

移项得

$$\bar{F} + \bar{F}_N + (-m\bar{a}) = 0$$

$$\text{即 } \bar{F} + \bar{F}_N + \bar{F}_g = 0$$

质点的达兰贝尔原理

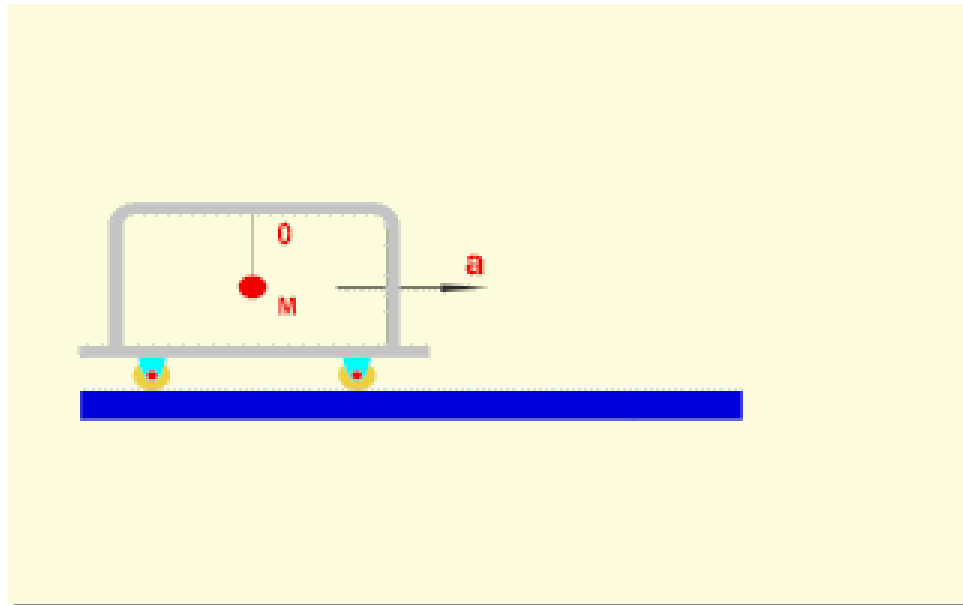


$$\bar{F} + \bar{F}_N + \bar{F}_g = 0$$

即：在质点运动的任一瞬时，作用于质点上的主动力、约束力和假想加在质点上的惯性力构成形式上的平衡力系。这就是质点的达兰贝尔原理。

该方程对动力学问题来说只是形式上的平衡，并没有改变动力学问题的实质。采用动静法解决动力学问题的最大优点，可以利用静力学提供的解题方法，给动力学问题一种统一的解题格式。

[例1] 列车在水平轨道上行驶，车厢内悬挂一单摆，当车厢向右作匀加速运动时，单摆左偏角度 $\alpha$ ，相对于车厢静止。求车厢的加速度 $\bar{a}$ 。



解： 选单摆的摆锤为研究对象  
虚加惯性力

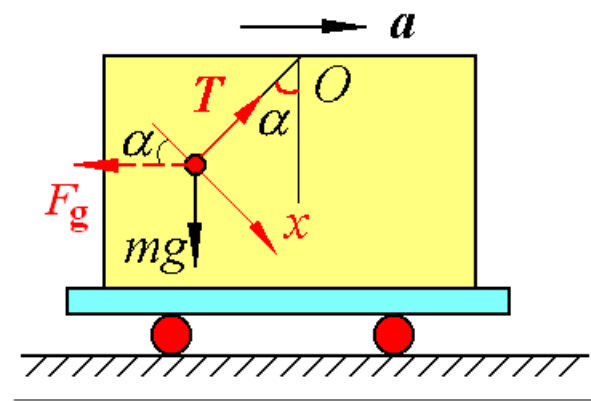
$$\bar{F}_g = -m\bar{a} \quad (F_g = ma)$$

由动静法,有

$$\sum F_x = 0, \quad mg \cdot \sin \alpha - F_g \cos \alpha = 0$$

解得  $a = g \cdot \tan \alpha$

$\alpha$ 角随着加速度 $\bar{a}$ 的变化而变化, 当 $\bar{a}$ 不变时,  $\alpha$ 角也不变。只要测出 $\alpha$ 角, 就能知道列车的加速度 $\bar{a}$ 。摆式加速计的原理。



[例2] 球磨机的滚筒以匀角速度 $\omega$ 绕水平轴 $O$ 转动，内装钢球和需要粉碎的物料，钢球被筒壁带到一定高度脱离筒壁，然后沿抛物线轨迹自由落下，从而击碎物料，如图。设滚筒内壁半径为 $r$ ，试求钢球的脱离角 $\alpha$ 。

解：以某一尚未脱离筒壁的钢球为研究对象，受力如图。钢球未脱离筒壁前，作圆周运动，其加速度为

$$a_{\tau} = 0 \quad a_n = r\omega^2$$

惯性力 $F_g$ 的大小为  $F_g = mr\omega^2$

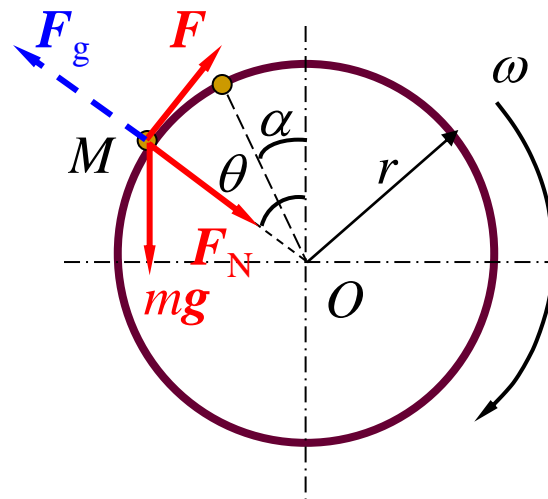
假想地加上惯性力，由达兰贝尔原理

$$\sum F_n = 0: F_N + mg \cos \theta - F_g = 0$$

$$F_N = mg \left( \frac{r\omega^2}{g} - \cos \theta \right)$$

这就是钢球在任一位置 $\theta$ 时所受的法向约束力，显然当钢球脱离筒壁时， $F_N = 0$ ，由此可求出其脱离角 $\alpha$ 为

$$\alpha = \arccos\left(\frac{r\omega^2}{g}\right)$$





### 三、质点系的达兰贝尔原理

设有一质点系由 $n$ 个质点组成，对每一个质点，有

$$\bar{F}_i + \bar{F}_{Ni} + \bar{F}_{gi} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

质点系中每个质点上真实作用的主动力、约束力和虚加的惯性力形式上构成平衡力系。这就是质点系的达兰贝尔原理。

对整个质点系而言，主动力系、约束力系、惯性力系形式上也构成平衡力系。其主矢和对任一点的主矩也等于零。可用方程表示为：

$$\begin{cases} \sum \bar{F}_i + \sum \bar{F}_{Ni} + \sum \bar{F}_{gi} = 0 \\ \sum \bar{M}_O(\bar{F}_i) + \sum \bar{M}_O(\bar{F}_{Ni}) + \sum \bar{M}_O(\bar{F}_{gi}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum \bar{F}_i + \sum \bar{F}_{Ni} + \sum \bar{F}_{gi} = 0 \\ \sum \bar{M}_O(\bar{F}_i) + \sum \bar{M}_O(\bar{F}_{Ni}) + \sum \bar{M}_O(\bar{F}_{gi}) = 0 \end{cases}$$

式中的约束力既有质点系外的约束力(外力), 亦有质点系内部各质点间相互的约束力(内力), 将质点系真实的受力按内力和外力划分, 并注意到有:

$$\sum \bar{F}_i^{(i)} = 0, \sum \bar{M}_O(\bar{F}_i^{(i)}) = 0$$

方程简化为

$$\begin{cases} \sum \bar{F}_i^{(e)} + \sum \bar{F}_{gi} = 0 \\ \sum \bar{M}_O(\bar{F}_i^{(e)}) + \sum \bar{M}_O(\bar{F}_{gi}) = 0 \end{cases}$$

对整个质点系来说, 动静法给出的平衡方程, 只是质点系的惯性力系与其外力的平衡, 而与内力无关。

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \bar{F}_i^{(e)} + \sum \bar{F}_{gi} = 0 \\ \sum \bar{M}_O(\bar{F}_i^{(e)}) + \sum \bar{M}_O(\bar{F}_{gi}) = 0 \end{array} \right.$$

即：作用在质点系上的所有外力与虚加在每个质点上的惯性力在形式上组成平衡力系。这是质点系达兰贝尔原理的又一表述。

称 $\sum \bar{F}_{gi}$ 为惯性力系的主矢， $\sum \bar{M}_O(\bar{F}_{gi})$ 为惯性力系的主矩。

实际应用时，同静力学一样任意选取研究对象，将方程投影到任意坐标轴上，列平衡方程求解。

[例3] 重 $P$ 长 $l$ 的等截面均质细杆 $AB$ , 其 $A$ 端铰接于铅直轴 $AC$ 上, 并以匀角速度 $\omega$ 绕该轴转动, 如图。求角速度 $\omega$ 与角 $\theta$ 的关系。

解：以杆 $AB$ 为研究对象, 受力如图。

杆 $AB$ 匀速转动, 杆上距 $A$ 点 $\xi$  的微元段 $d\xi$  的加速度的大小为

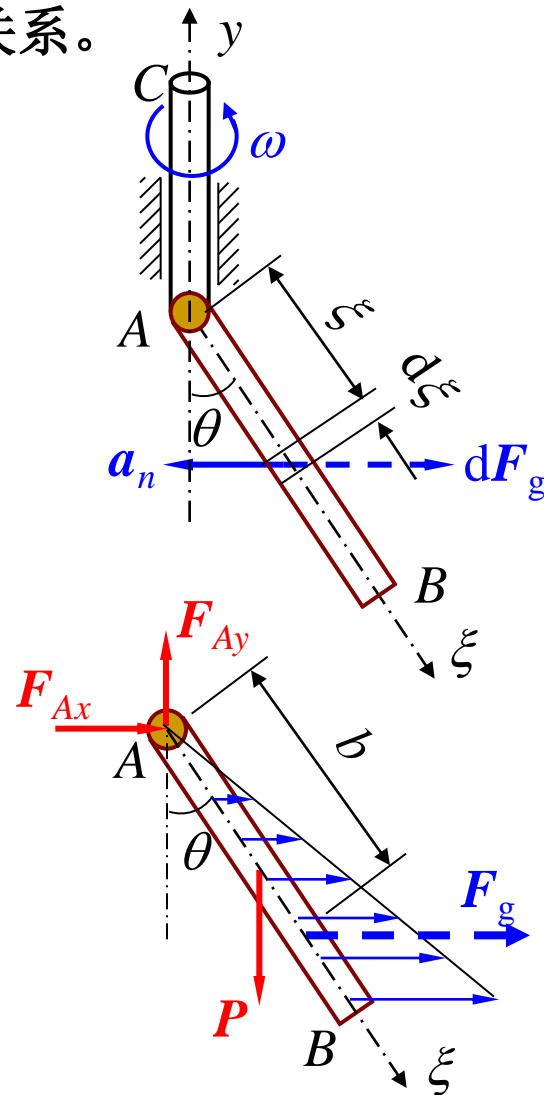
$$a_n = (\xi \sin \theta) \omega^2$$

微元段的质量 $dm = P d\xi / gl$ 。在该微元段虚加惯性力 $dF_g$ , 它的大小为

$$dF_g = dm \cdot a_n = \frac{P \omega^2}{gl} \sin \theta \cdot \xi d\xi$$

于是整个杆的惯性力的合力的大小为

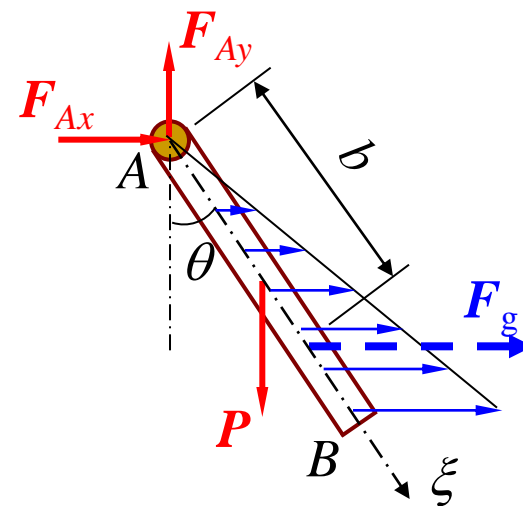
$$F_g = \int_0^l \frac{P \omega^2}{gl} \sin \theta \cdot \xi d\xi = \frac{P}{2g} l \omega^2 \sin \theta$$



设力 $F_g$ 的作用点到点A的距离为 $d$ ,由合力矩定理,有

$$F_g \cdot (b \cos \theta) = \int_0^l (\xi \cos \theta) dF_g$$

$$\text{即 } b = \frac{\int_0^l \frac{P\omega^2}{gl} \sin \theta \cdot \xi^2 d\xi}{\frac{P}{2g} l \omega^2 \sin \theta} = \frac{2}{3} l$$



假想地加上惯性力,由质点系的达兰贝尔原理

$$\sum M_A(F) = 0: \quad F_g b \cos \theta - P \frac{l}{2} \sin \theta = 0$$

$$\text{代入 } F_g \text{ 的数值,有 } \frac{Pl}{2} \sin \theta \left( \frac{2l}{3g} \omega^2 \cos \theta - 1 \right) = 0$$

$$\text{故有 } \theta = 0 \quad \text{或} \quad \theta = \arccos\left(\frac{3g}{2l\omega^2}\right)$$

[例4] 已知： $m$ ， $R$ ， $\omega$ 。

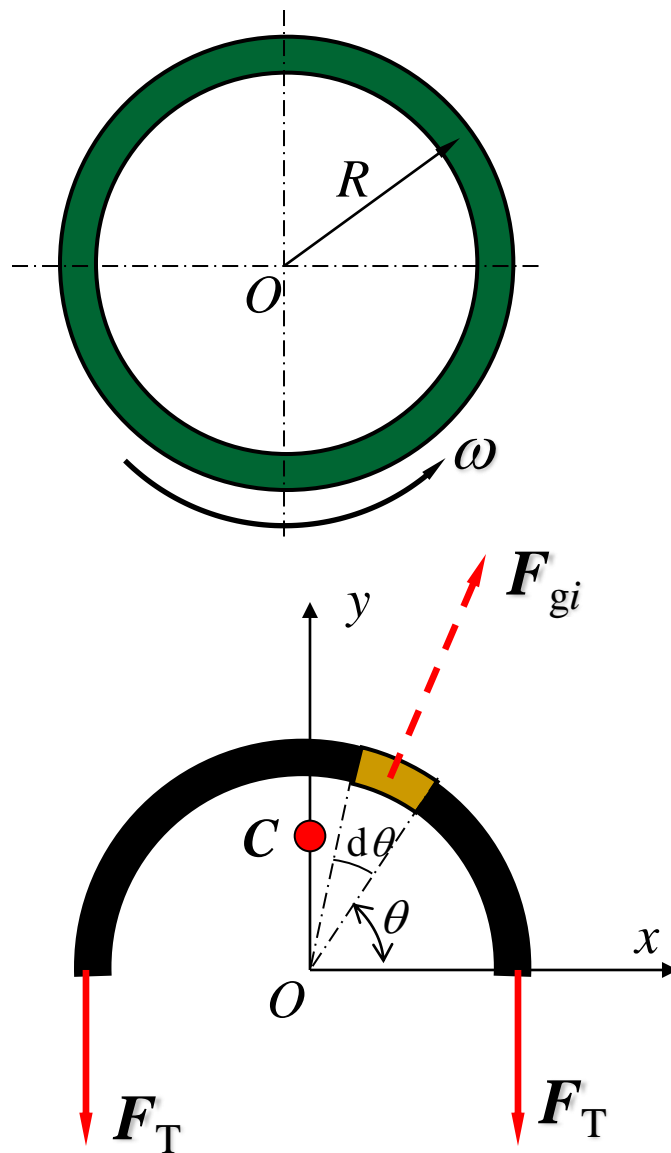
求：轮缘横截面的张力。

解：取上半部分轮缘为研究对象

$$F_{gi} = \frac{m}{2\pi R} R d\theta \cdot R\omega^2 = \frac{mR\omega^2}{2\pi} d\theta$$

$$\sum F_y = 0 \quad \sum F_{gi} \sin \theta - 2F_T = 0$$

$$F_T = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{m}{2\pi} R\omega^2 \sin \theta d\theta$$
$$= \frac{mR\omega^2}{2\pi} \quad \text{半圆弧 } y_c = \frac{2R}{\pi}$$



## § 13-2 刚体惯性力系的简化

用质点系的达兰贝尔原理求解质点系的动力学问题，需要对质点内每个质点加上各自的惯性力，这些惯性力也形成一个力系，称为惯性力系。下面用静力学力系简化理论，求出惯性力系的主矢和主矩。

以 $\bar{F}_{gR}$ 表示惯性力系的主矢。由质心运动定理得：

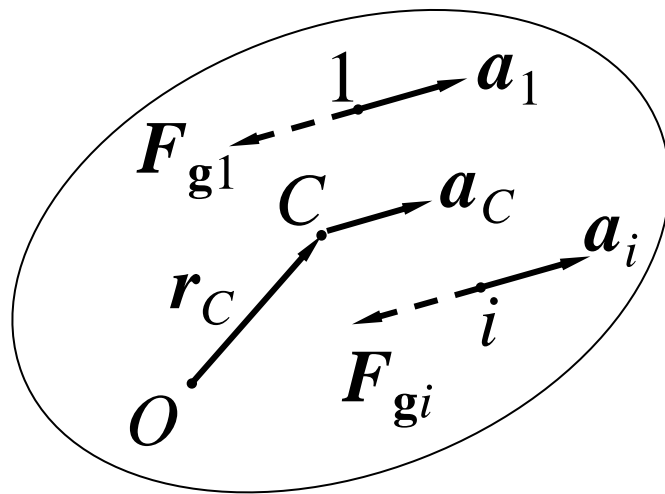
$$\bar{F}_{gR} = \sum \bar{F}_{gi} = \sum (-m_i \bar{a}_i) = -m \bar{a}_C$$

**无论刚体作什么运动，惯性力系主矢都等于刚体质量与质心加速度的乘积，方向与质心加速度的方向相反。**

由力系简化理论知，主矢的大小和方向与简化中心的位置无关，主矩一般与简化中心的位置有关。下面就刚体平移、定轴转动和平面运动讨论惯性力系的简化结果。

## 一、刚体作平移

刚体平移时，刚体内任一质点 $i$ 的加速度 $a_i$ 与质心的加速度 $a_C$ 相同，有 $a_i = a_C$ ，任选一点 $O$ 为简化中心，主矩用 $M_{gO}$ 表示，有



$$\bar{M}_{gO} = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_{gi}) = \sum \bar{r}_i \times (-m_i \bar{a}_C) = -\sum m_i \bar{r}_i \times \bar{a}_C = -m \bar{r}_C \times \bar{a}_C = \bar{r}_C \times \bar{F}_{gR}$$

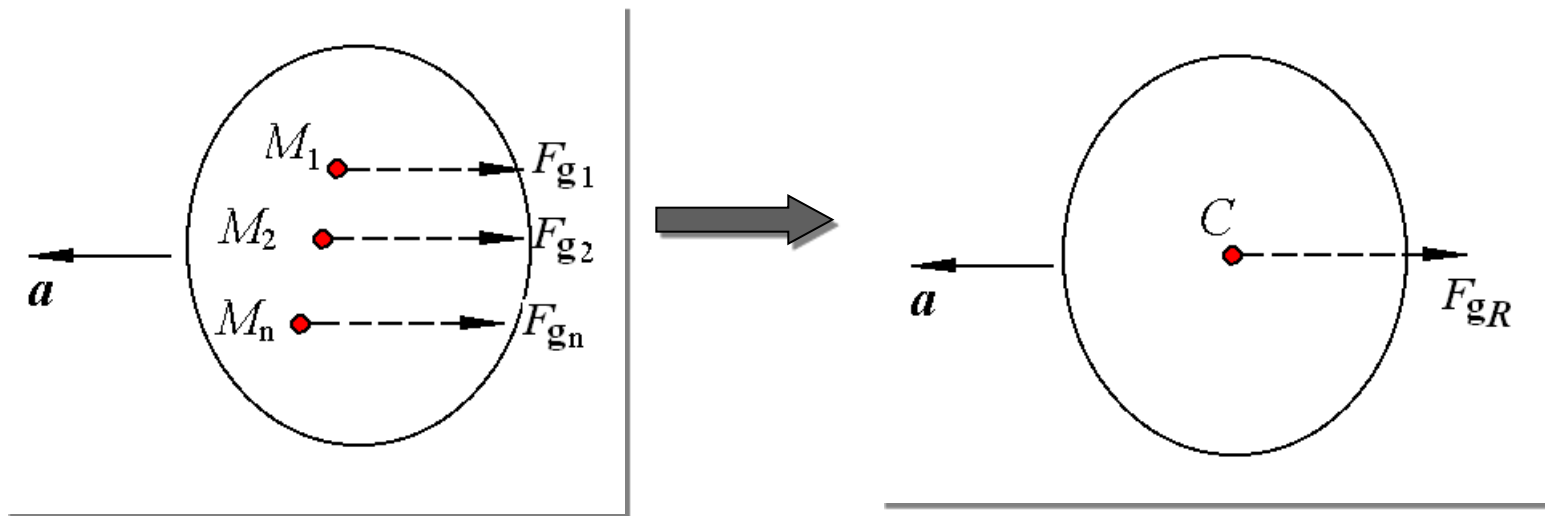
式中， $r_C$ 为简化中心 $O$ 到质心 $C$ 的矢径。若选质心 $C$ 为简化中心，则 $r_C=0$ ，主矩以 $M_{gC}$ 表示，有

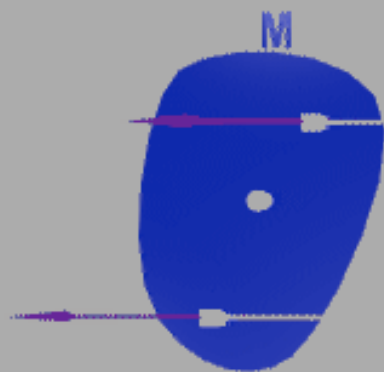


向质心 $C$ 简化:

$$\bar{M}_{gC} = \sum \bar{M}_C(\bar{F}_{gi}) = \sum \bar{r}_i \times (-m_i \bar{a}_C) = -\sum m_i \bar{r}_i \times \bar{a}_C = 0$$

综上可得结论：平移刚体的惯性力系可以简化为通过质心的合力，其大小等于刚体的质量与加速度的乘积，合力的方向与加速度方向相反。





## 二、刚体作定轴转动

如图所示，具有质量对称面且绕垂直于质量对称面的轴转动的刚体。其上任一点的惯性力的分量的大小为

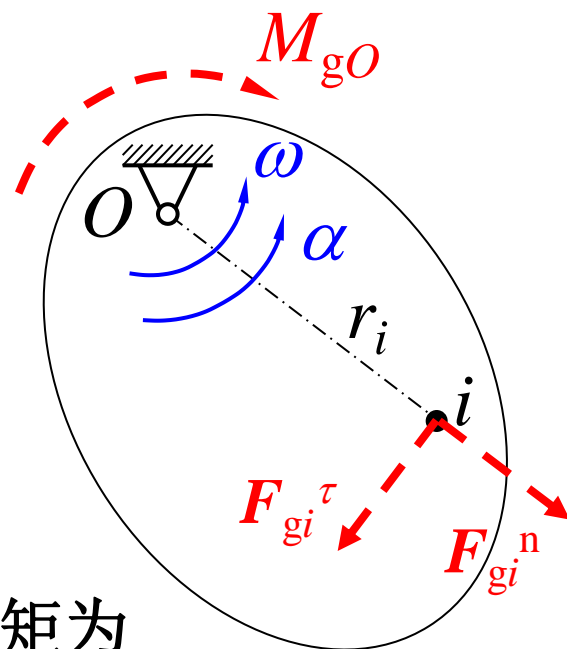
$$F_{gi}^{\tau} = m_i a_i^{\tau} = m_i r_i \alpha$$

$$F_{gi}^n = m_i a_i^n = m_i r_i \omega^2$$

方向如图所示。该惯性力系对转轴 $O$ 的主矩为

$$M_{gO} = \sum M_O(F_{gi}^n) + \sum M_O(F_{gi}^{\tau})$$

由于 $F_{gi}^n$ 通过 $O$ 点，则有 $\sum M_O(F_{gi}^n) = 0$ ，所以



$$M_{gO} = \sum M_O(\mathbf{F}_{gi}^\tau) = -\sum \mathbf{F}_{gi}^\tau \cdot \mathbf{r}_i = -\sum (m_i r_i \alpha) r_i = -\sum (m_i r_i^2) \alpha$$

即

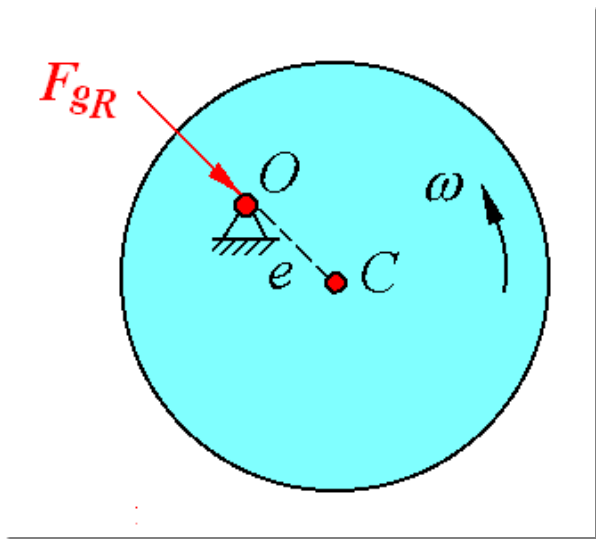
$$M_{gO} = -J_O \alpha$$

综上可得结论：定轴转动刚体的惯性力系，可以简化为通过转轴 $O$ 的一个惯性力 $F_{gR}$ 和一个惯性力偶 $M_{gO}$ 。力 $F_{gR}$ 的大小等于刚体的质量与其质心加速度大小的乘积，方向与质心加速度的方向相反，作用线通过转轴；力偶 $M_{gO}$ 的矩等于刚体对转轴的转动惯量与其角加速度大小的乘积，转向与角加速度的转向相反。

若惯性力系向质心 $C$ 简化，主矩等于什么？

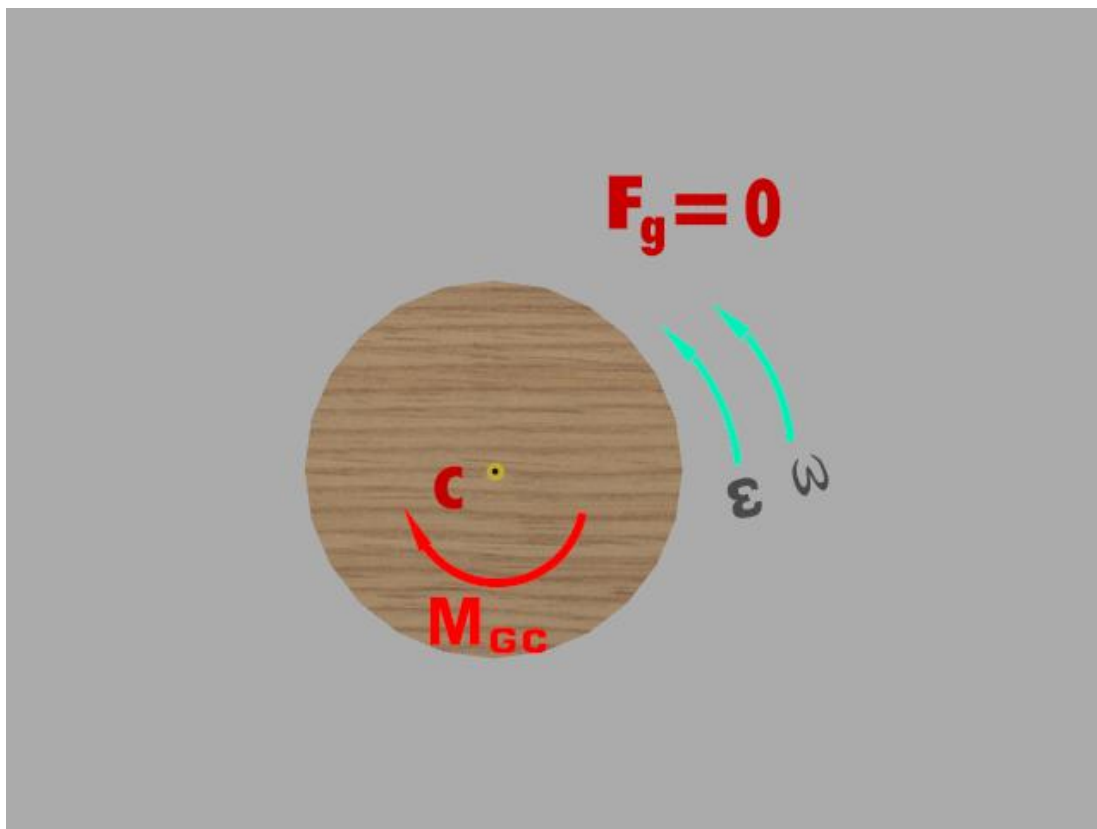
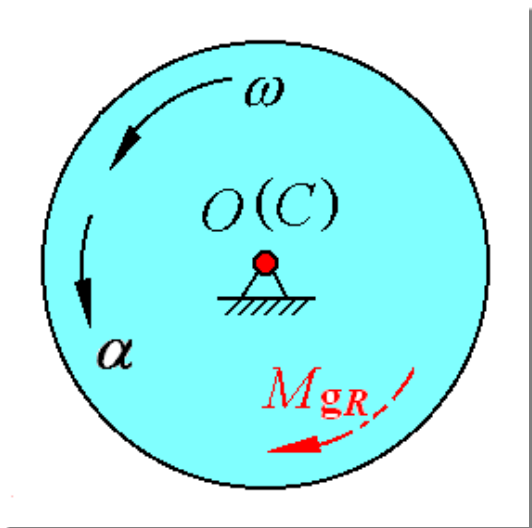
## 讨论:

①刚体作匀速转动，转轴不通过质点 $C$ 。 $F_{gR} = me\omega^2$



刚体作匀速转动时， $\alpha=0$ ，若转轴不过质心，惯性力系简化为一惯性力  $F_{gR} = -ma_C$ ，同时力的作用线通过转轴 $O$ 。

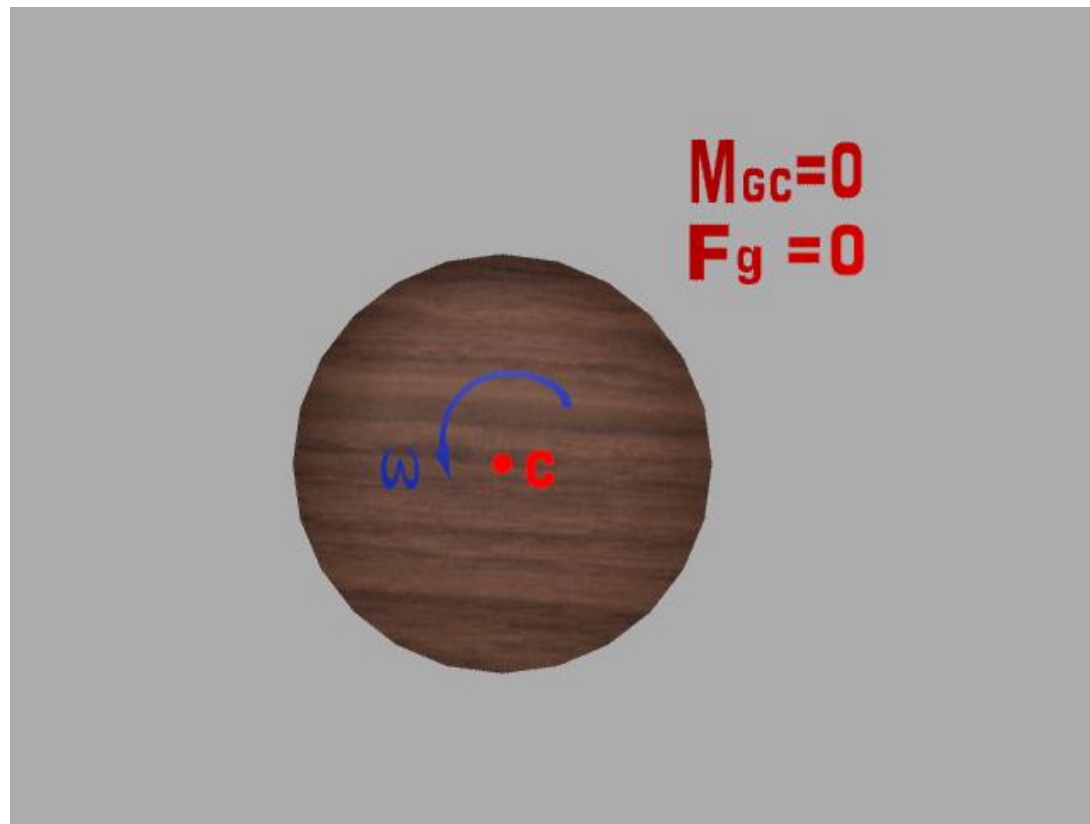
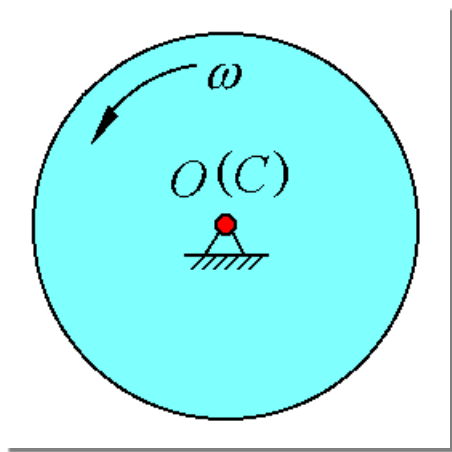
②转轴过质点 $C$ ，但 $\alpha \neq 0$ ，惯性力偶  $M_{gC} = -J_C \alpha$ （与 $\alpha$ 反向）



转轴通过质心 $C$ 时,  $a_C = 0$ ,  $F_{gR} = 0$ ,  $M_{gC} = -J_C \alpha$ 。此时惯性力系简化为一惯性力偶。

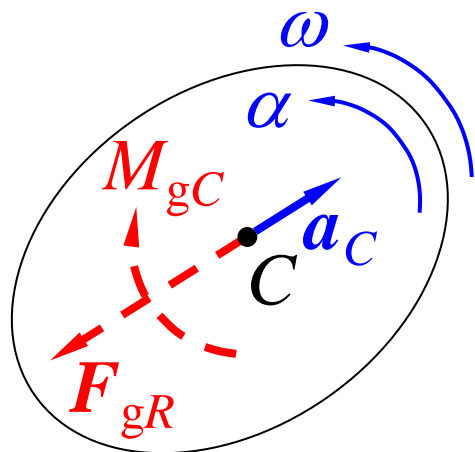
③刚体作匀速转动，且转轴过质心，则  $F_{gR} = 0$  ,  $M_{gC} = 0$

（主矢、主矩均为零）



### 三、刚体作平面运动（平行于质量对称面）

工程中作平面运动的刚体常有质量对称平面，且平行于此平面作平面运动。于是其上各质点的惯性力组成的空间力系，可简化为在质量对称平面内的平面力系。



刚体平面运动可分解为①随质心 $C$ 的平移  
②绕通过质心轴的转动

惯性力系向质心简化得到作用于质心的一个力和一个力偶。

$$\bar{F}_{gR} = -m\bar{a}_C$$

$$M_{gC} = -J_C\alpha$$

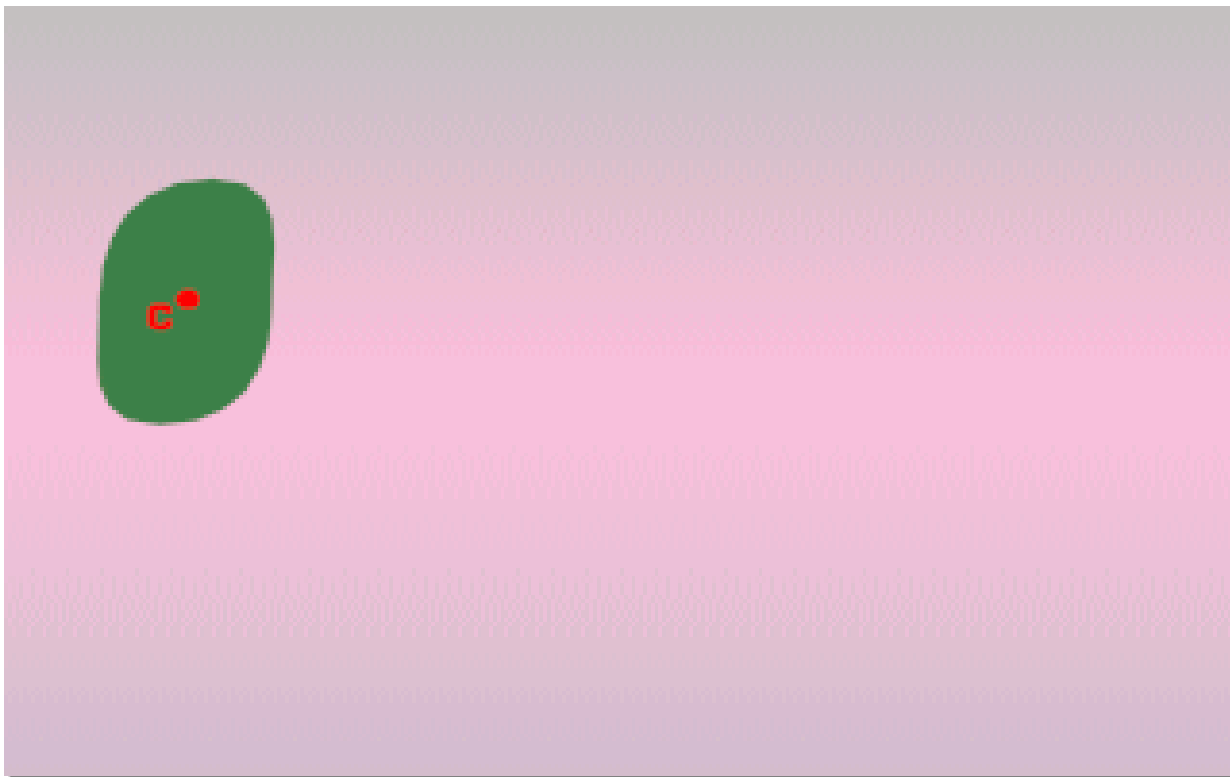


惯性力系向质心简化得到作用于质心的一个力和一个力偶。

$$\bar{F}_{gR} = -m\bar{a}_C$$

$$M_{gC} = -J_C\alpha$$

综上可得结论：有质量对称平面的刚体，平行于此平面运动时，刚体的惯性力系简化为在此平面内的一个力和一个力偶。这个力通过质心，其大小等于刚体的质量与质心加速度的乘积，其方向与质心加速度的方向相反；这个力偶的矩等于刚体对过质心且垂直于质量对称面的轴的转动惯量与角加速度的乘积，转向与角加速度相反。



对于平面运动刚体：由动静法可列出如下三个方程：

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 & , & \sum F_x^{(e)} + (-ma_{Cx}) = 0 \\ \sum F_y = 0 & , & \sum F_y^{(e)} + (-ma_{Cy}) = 0 \\ \sum M_C(\bar{F}) = 0 & , & \sum M_C(\bar{F}^{(e)}) + (-J_C\alpha) = 0 \end{cases}$$

实质上：

$$m \frac{d^2 x_C}{dt^2} = \sum F_x^{(e)} , \quad m \frac{d^2 y_C}{dt^2} = \sum F_y^{(e)} , \quad J_C \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \sum M_C(\bar{F}^{(e)})$$

按以上方程，动静法体现不出优点，但是虚加惯性力和惯性力偶后，动静法**可以对任意点取矩（二矩式、三矩式）**  
这正是体现动静法优越性的地方。

[例5] 均质杆长 $l$ , 质量 $m$ , 与水平面铰接, 杆由与平面成 $\varphi_0$ 角位置静止落下。求刚开始落下时杆 $AB$ 的角加速度及 $A$ 支座的约束力。

解：选杆 $AB$ 为研究对象， 虚加惯性力系：

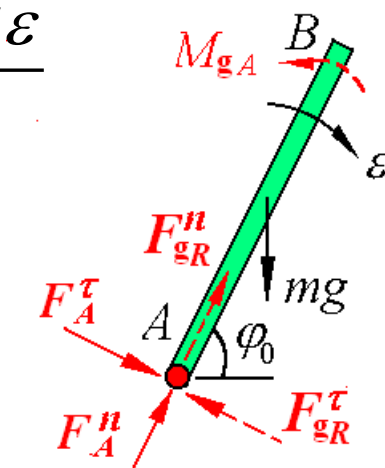
$$F_{gR}^{\tau} = \frac{ml\varepsilon}{2} \quad F_{gR}^n = ma_n = 0 \quad M_{gA} = J_A \varepsilon = \frac{ml^2 \varepsilon}{3}$$

根据动静法，有

$$\sum F_{\tau} = 0, \quad F_A^{\tau} + mg \cos \varphi_0 - F_{gR}^{\tau} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_n = 0, \quad F_A^n - mg \sin \varphi_0 + F_{gR}^n = 0 \quad (2)$$

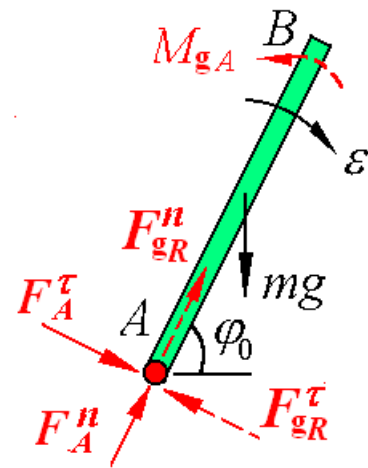
$$\sum M_A(\bar{F}) = 0, \quad mg \cos \varphi_0 \cdot l/2 - M_{gA} = 0 \quad (3)$$



方程(1)、(2)实质就是质心运动定理，方程(3)为定轴转动微分方程。

解方程得： $\varepsilon = \frac{3g}{2l} \cos \varphi_0$

$$F_A^n = mg \sin \varphi_0, F_A^\tau = -\frac{mg}{4} \cos \varphi_0$$



单个物体的动力学问题，用动静法或动力学普遍方程求解区别不大。但是**物体系统的动力学问题，用动静法求解比用动力学普遍方程求解简单得多。**

**特别注意：**在画虚加的惯性力系的主矢和主矩时，必须按照和质心加速度的方向相反以及与角加速度转向相反(考虑负号)的原则画出。在方程中只需按其数值的大小代入，不能再带负号！

## 达兰贝尔原理的应用

根据达兰贝尔原理，以静力学平衡方程的形式来建立动力学方程的方法，称为动静法。应用动静法既可求运动，例如加速度、角加速度；也可以求力，并且多用于已知运动，求质点系运动时的动约束力。

应用动静法可以利用静力学建立平衡方程的一切形式上的便利。例如，矩心可以任意选取，“平衡方程”可以采用二矩式、三矩式等。因此当问题中有多个约束力时，应用动静法求解它们时就方便得多。

## 应用动静法求动力学问题的步骤及要点：

- ①选取研究对象：原则与静力学相同。
- ②受力分析：画出全部主动力和外约束力。
- ③运动分析：主要是刚体质心加速度，刚体角加速度，  
标出方向或转向。
- ④虚加惯性力：在受力图上画上惯性力和惯性力偶，一定要在正确进行运动分析的基础上，熟记刚体惯性力系的简化结果。

⑤列动静法方程：选取适当的矩心和投影轴。

⑥建立补充方程：运动学补充方程（运动量之间的关系）。

⑦求解求知量。

[特别注意]  $\bar{F}_g$ ,  $M_g$  的方向及转向在受力图中必须按与质心加速的方向、角加速度的转向相反的原则画出。

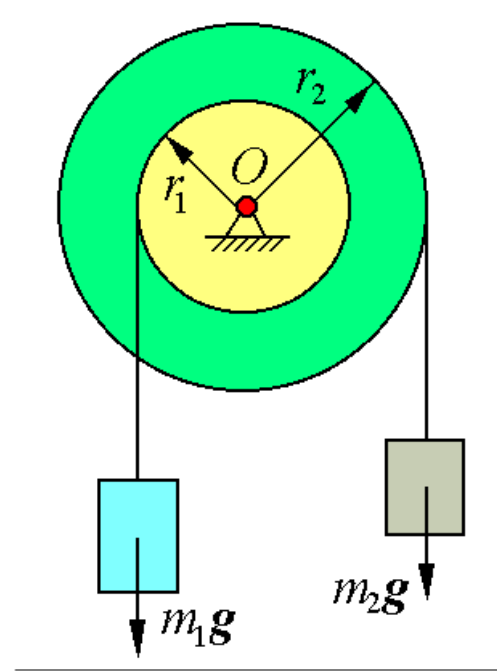
在建立方程时，只需按  $F_g = ma_C$ ,  $M_{gC} = J_C \varepsilon$  数值的大小代入即可，不再考虑负号。



[例6] 质量为 $m_1$ 和 $m_2$ 的两重物，分别挂在两条绳子上，绳又分别绕在半径为 $r_1$ 和 $r_2$ 并装在同一轴的两鼓轮上，已知两鼓轮对于转轴 $O$ 的转动惯量为 $J$ ，系统在重力作用下发生运动，求鼓轮的角加速度。

解：方法1 用达兰贝尔原理求解

取系统为研究对象



## 虚加惯性和惯性力偶：

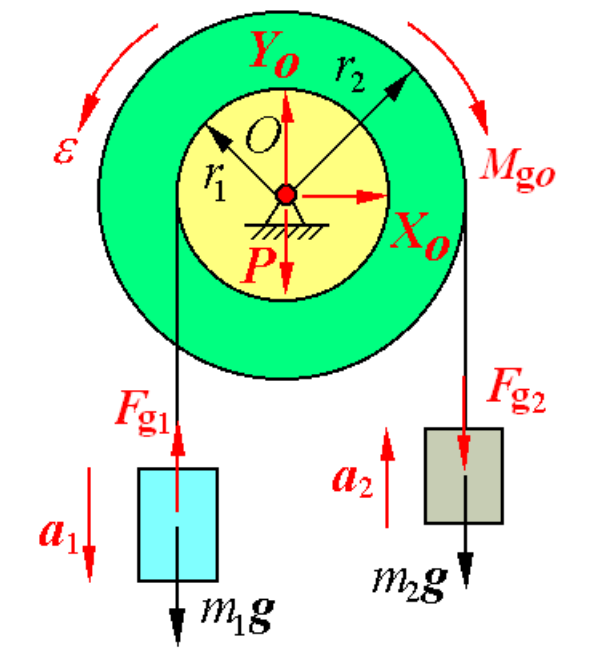
$$F_{g1} = m_1 a_1, \quad F_{g2} = m_2 a_2, \quad M_{gO} = J_O \varepsilon = J \varepsilon$$

由质点系的达兰贝尔原理：

$$\sum M_O(\bar{F}) = 0,$$

$$m_1 g r_1 - m_2 g r_2 - F_{g1} r_1 - F_{g2} r_2 - M_{gO} = 0$$

$$m_1 g r_1 - m_2 g r_2 - m_1 a_1 r_1 - m_2 a_2 r_2 - J \varepsilon = 0$$



代入

列补充方程：  $a_1 = r_1 \varepsilon$  ,  $a_2 = r_2 \varepsilon$

上式

得：

$$\varepsilon = \frac{m_1 r_1 - m_2 r_2}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + J} g$$

## 方法2 用动量矩定理求解

取系统为研究对象

$$L_O = m_1 v_1 r_1 + m_2 v_2 r_2 + J \omega$$

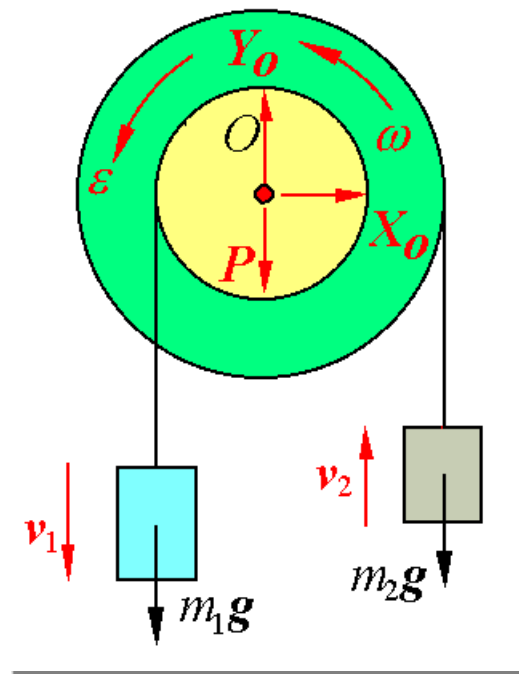
$$= (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + J) \omega$$

$$\sum M_O(\bar{F}^{(e)}) = m_1 g r_1 - m_2 g r_2$$

根据动量矩定理：

$$\frac{d}{dt} [(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + J) \omega] = m_1 g r_1 - m_2 g r_2$$

$$\therefore \quad \varepsilon = \frac{m_1 r_1 - m_2 r_2}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + J} g$$



### 方法3 用动能定理求解

取系统为研究对象，任一瞬时系统的

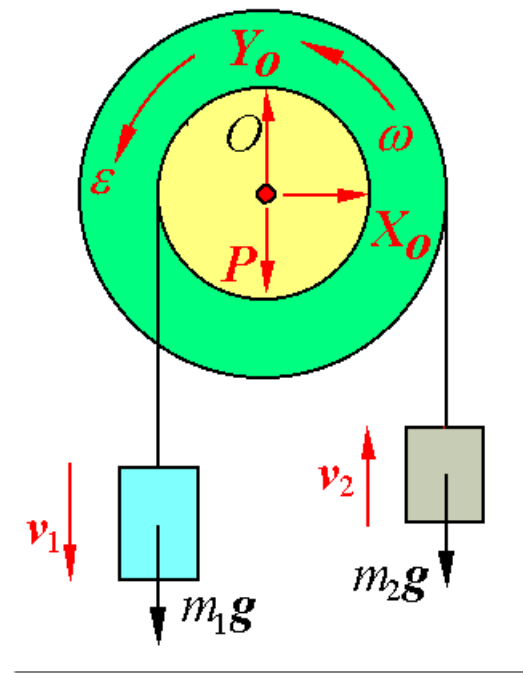
$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$$

$$= \frac{\omega^2}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + J)$$

$$\begin{aligned} \text{元功 } \sum \delta W &= m_1 g ds_1 - m_2 g ds_2 \\ &= m_1 g r_1 d\varphi - m_2 g r_2 d\varphi \\ &= (m_1 r_1 - m_2 r_2) g d\varphi \end{aligned}$$

由  $dT = \sum \delta W$  得  $d[\frac{\omega^2}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + J)] = (m_1 r_1 - m_2 r_2) g d\varphi$   
两边除以 $dt$ ，并求导数，得

$$\varepsilon = \frac{m_1 r_1 - m_2 r_2}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + J} g$$



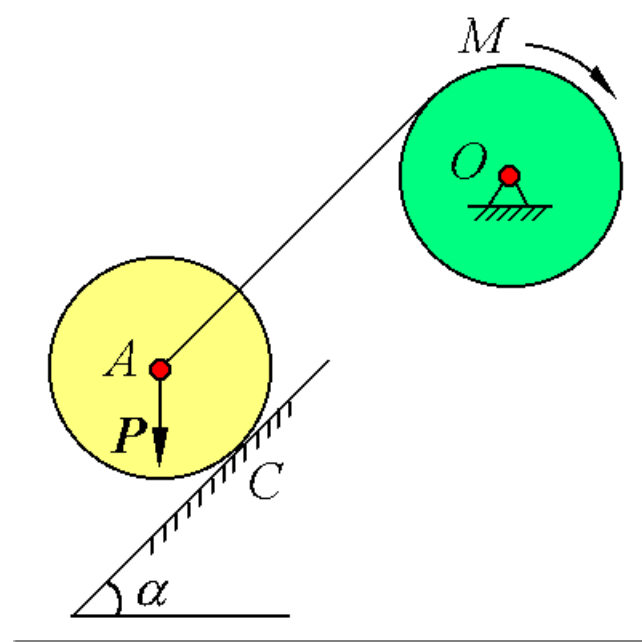
[例7] 在图示机构中，沿斜面向上作纯滚动的圆柱体和鼓轮 $O$ 均为均质物体，各重为 $P$ 和 $Q$ ，半径均为 $R$ ，绳子不可伸长，其质量不计，斜面倾角 $\alpha$ ，如在鼓轮上作用一常力偶矩 $M$ ，

试求：(1)鼓轮的角加速度？

(2)绳子的拉力？

(3)轴承 $O$ 处的约束力？

(4)圆柱体与斜面间的摩擦力  
(不计滚动摩擦)？



解：方法1 用达兰贝尔原理求解  
取轮O为研究对象，虚加惯性力偶

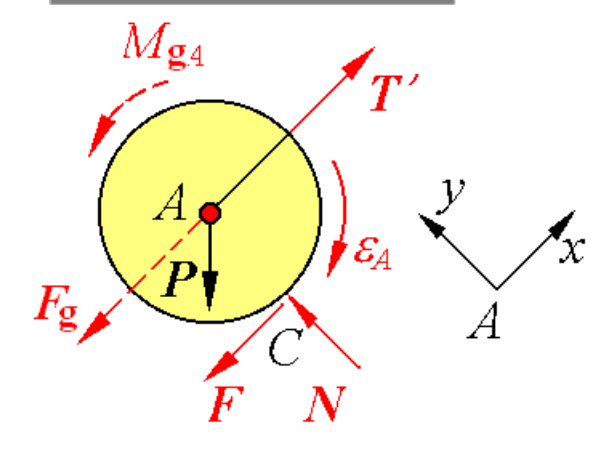
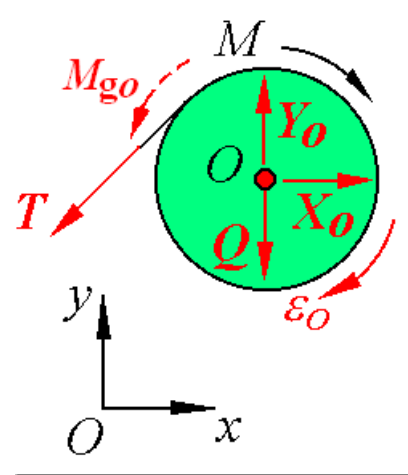
$$M_{gO} = J_O \varepsilon_O = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} R^2 \varepsilon_O$$

列出动静方程：

$$\Sigma M_O(\bar{F}) = 0, \quad TR + M_Q - M = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_x = 0, \quad X_O - T \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma F_y = 0, \quad Y_O - Q - T \sin \alpha = 0 \quad (3)$$



取轮A为研究对象，虚加惯性力 $F_g$ 和惯性力偶 $M_{gA}$ 如图示。

$$F_g = \frac{P}{g} a_A, \quad M_{gA} = \frac{1}{2} \frac{P}{g} R^2 \varepsilon_A$$

列出动静法方程：  $\sum M_C(\bar{F}) = 0$  ,  $P \sin \alpha R + F_g R - T' R + M_{gA} = 0$  (4)

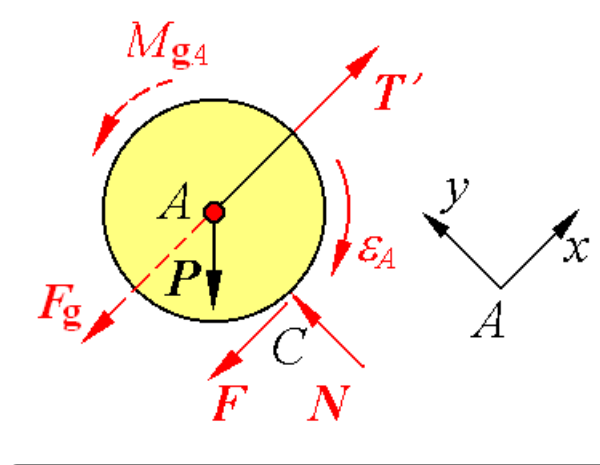
$\sum F_x = 0$  ,  $T' - F_g - F - P \sin \alpha = 0$  (5)

运动学关系：  $a_A = R \varepsilon_A = R \varepsilon_O$  ,  $\varepsilon_A = \varepsilon_O$

将  $M_{gO}$ ,  $F_g$ ,  $M_{gA}$  及运动学关系代入到(1)和(4)式并联立求解得：

$$\varepsilon_O = \frac{2(M - P \sin \alpha R)}{(Q + 3P)R^2} g$$

$$T = \frac{P(3M + QR \sin \alpha)}{(Q + 3P)R}$$



代入(2)、(3)、(5)式，得：

$$X_o = \frac{P(3M + QR \sin \alpha)}{(Q + 3P)R} \cdot \cos \alpha$$

$$Y_o = \frac{P(3M + QR \sin \alpha)}{(Q + 3P)R} \cdot \sin \alpha + Q$$

$$F = \frac{P(M - PR \sin \alpha)}{(Q + 3P)R}$$



## 方法2 用动力学普遍定理求解

### (1) 用动能定理求鼓轮角加速度。

取系统为研究对象

$$\begin{aligned}\sum W_{12} &= M\varphi - PR\varphi \sin \alpha \\ &= (M - PR \sin \alpha)\varphi\end{aligned}$$

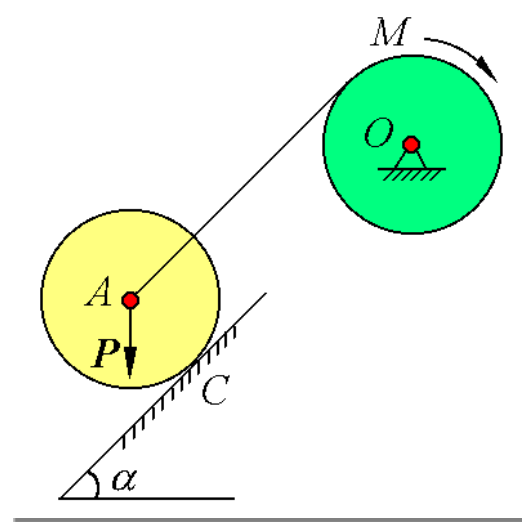
$$T_1 = C \text{ (常量)} \quad (v = R\omega_O = R\omega_A)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{2g} R^2 \cdot \omega_O^2 + \frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{2g} R^2 \cdot \omega_A^2 = \frac{\omega_O^2}{4g} (Q + 3P) R^2$$

由  $T_2 - T_1 = \sum W_{12}$  , 得  $\frac{\omega_O^2}{4g} (Q + 3P) R^2 - C = (M - PR \sin \alpha)\varphi$

两边对  $t$  求导数:  $\frac{1}{4g} (Q + 3P) R^2 \cdot 2\omega_O \cdot \varepsilon_O = (M - PR \sin \alpha)\omega_O$

$$\varepsilon_O = \frac{2(M - PR \sin \alpha)}{(Q + 3P) R^2} g$$

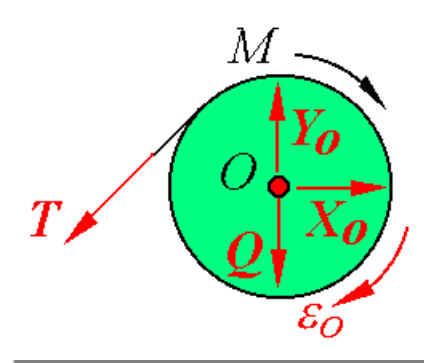


## (2) 用动量矩定理求绳子拉力

(定轴转动微分方程)

取轮 $O$ 为研究对象, 由动量矩定理得

$$\frac{Q}{2g} R^2 \varepsilon_O = M - TR \quad T = \frac{P(3M + QR \sin \alpha)}{(Q + 3P)R}$$



## (3) 用质心运动定理求解轴承 $O$ 处约束力

取轮 $O$ 为研究对象, 根据质心运动定理:

$$ma_{Cx} = \sum F_x^{(e)} \quad , \quad 0 = X_O - T \cos \alpha$$

$$ma_{Cy} = \sum F_y^{(e)} \quad , \quad 0 = Y_O - Q - T \sin \alpha$$

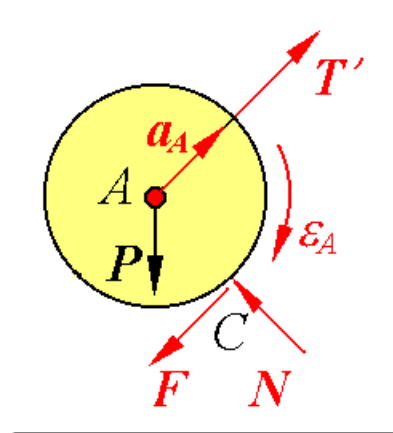
$$X_O = \frac{P(3M + QR \sin \alpha)}{(Q + 3P)R} \cdot \cos \alpha \quad , \quad Y_O = \frac{P(3M + QR \sin \alpha)}{(Q + 3P)R} \cdot \sin \alpha + Q$$

#### (4) 用刚体平面运动微分方程求摩擦力

取圆柱体A为研究对象，

根据刚体平面运动微分方程

$$J_A \varepsilon_A = FR \quad (\varepsilon_A = \varepsilon_O)$$



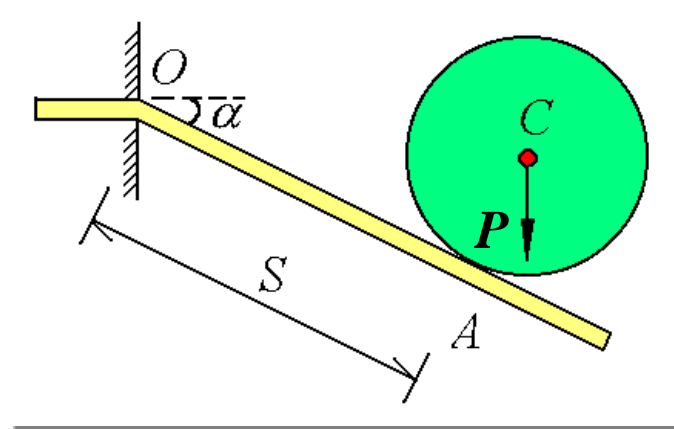
$$F = \frac{J_A \varepsilon_A}{R} = \frac{1}{R} \frac{P}{2g} R^2 \cdot \frac{2(M - PR \sin \alpha)}{(Q + 3P)R^2} g = \frac{P(M - PR \sin \alpha)}{(Q + 3P)R}$$

方法3：用动能定理求鼓轮的角加速度

用达兰贝尔原理求其他力（绳子拉力、轴承O处约束力和摩擦力）。

[例8] 均质圆柱体重为 $P$ ，半径为 $R$ ，无滑动地沿倾斜平板由静止自 $O$ 点开始滚动。平板对水平线的倾角为 $\alpha$ ，试求 $OA=S$ 时平板在 $O$ 点的约束力。板的重力略去不计。

解：(1) 用动能定理求速度，加速度  
圆柱体作平面运动。初始位置时处于静止状态，故 $T_1=0$ ；在末位置时，设角速度为 $\omega$ ，则 $v_C=R\omega$ ，动能为：



$$T_2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} v_C^2 + \frac{1}{2} \frac{P}{2g} R^2 \omega^2 = \frac{3P}{4g} v_C^2$$

主动力的功：  $\Sigma W_{12}^{(F)} = PS \cdot \sin \alpha$

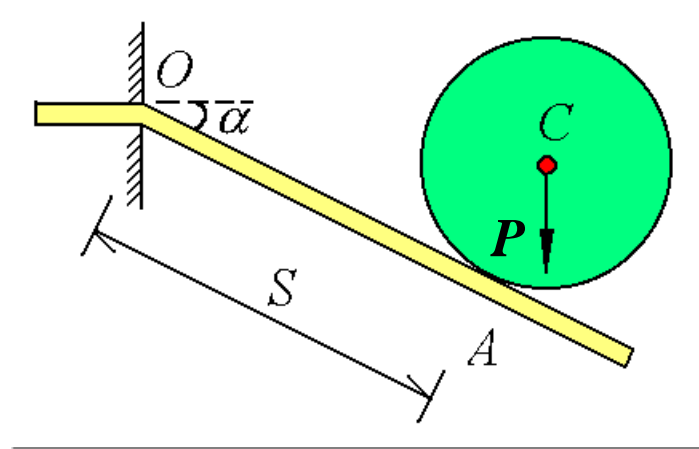
由动能定理  $T_2 - T_1 = \Sigma W_{12}^{(F)}$  得

$$\frac{3P}{4g} v_C^2 - 0 = PS \cdot \sin \alpha \Rightarrow v_C^2 = \frac{4}{3} g S \cdot \sin \alpha$$

对  $t$  求导数，则：  $a_C = \frac{2}{3} g \sin \alpha$  ,  $\varepsilon = \frac{2g}{3R} \sin \alpha$

(2) 用达兰贝尔原理求约束力

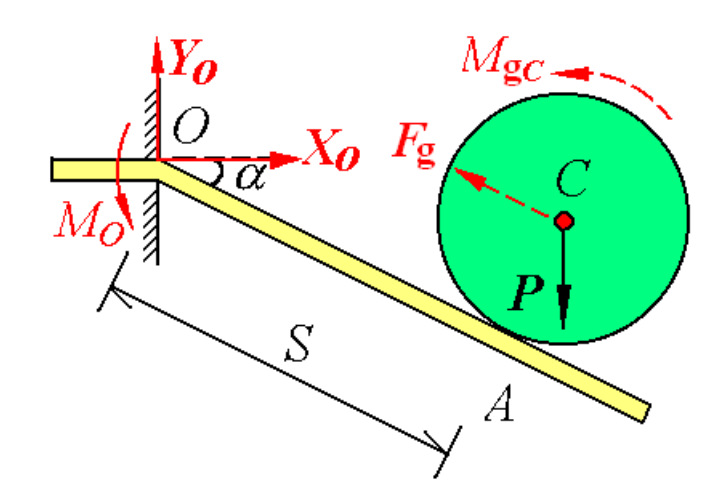
取系统为研究对象，虚加惯性力  $F_g$  和惯性力偶  $M_{gC}$



$$F_g = \frac{P}{g} a_C = \frac{2P}{3} \sin \alpha ,$$

$$M_{gC} = \frac{1}{2} \frac{P}{g} R^2 \frac{2g}{3R} \sin \alpha = \frac{PR}{3} \sin \alpha$$

列出动静法方程:



$$\sum F_x = 0 , \quad X_O - \left( \frac{2P}{3} \sin \alpha \right) \cos \alpha = 0 , \quad \Rightarrow \quad X_O = \frac{P}{3} \sin 2\alpha$$

$$\sum F_y = 0 , \quad Y_O - P + \left( \frac{2P}{3} \sin \alpha \right) \sin \alpha = 0 , \quad \Rightarrow \quad Y_O = P \left( 1 - \frac{2}{3} \sin^2 \alpha \right)$$

$$\sum M_O(\bar{F}) = 0 , \quad M_O + \frac{PR}{3} \sin \alpha + \left( \frac{2P}{3} \sin \alpha \right) \cdot R - P \cos \alpha \cdot R - \sin \alpha \cdot R = 0$$

$$\Rightarrow \quad M_O = P \cos \alpha \cdot S$$

[例9] 牵引车的主动轮质量为 $m$ ，半径为 $R$ ，沿水平直线轨道滚动，设车轮所受的主动力可简化为作用于质心的两个力 $S$ 、 $T$ 及驱动力偶矩 $M$ ，车轮对于通过质心 $C$ 并垂直于轮盘的轴的的回转半径为 $\rho$ ，轮与轨道间摩擦系数为 $f$ ，试求在车轮滚动而不滑动的条件下，驱动力偶矩 $M$ 之最大值。

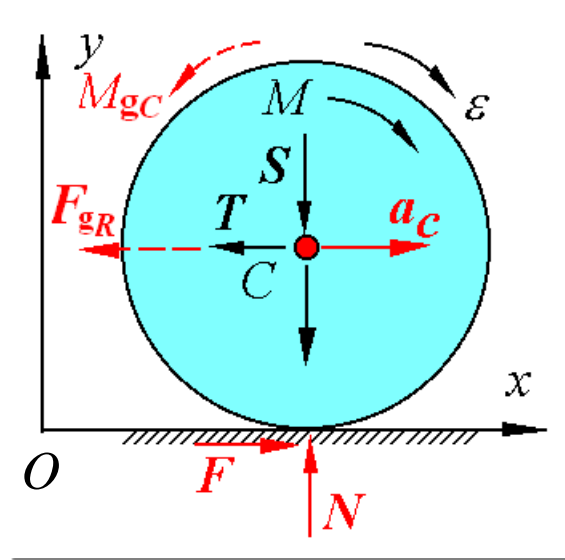
解：取轮为研究对象，虚加惯性力系。

主矢和主矩的大小分别为：

$$F_{gR} = ma_C = mR\varepsilon$$

$$M_{gC} = J_C\varepsilon = m\rho^2\varepsilon$$

主矢和主矩按照与质心加速度及角加速度转向相反的原则画出，不再考虑负号。



由动静法，得：

$$\sum F_x = 0, \quad F - T - F_{gR} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0, \quad N - P - S = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_C(\bar{F}) = 0, \quad -M + FR + M_{gC} = 0 \quad (3)$$

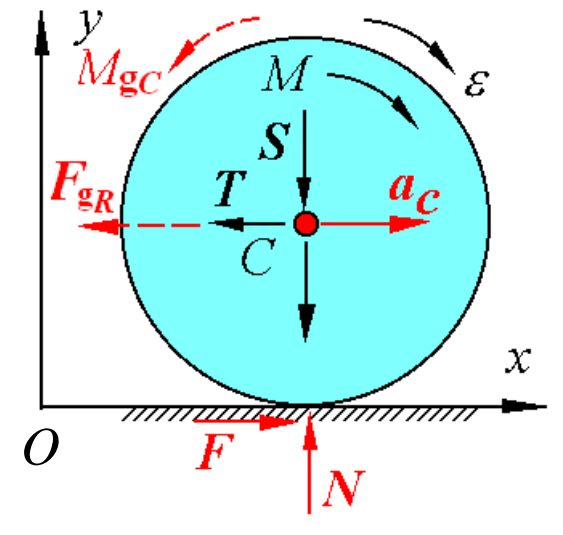
由(1)得  $F_{gR} = mR\varepsilon = F - T$

所以  $\varepsilon = \frac{F - T}{mR}$  代入(3)得

$$\begin{aligned} M &= FR + M_{gC} = FR + m\rho^2 \frac{F - T}{mR} \\ &= F\left(\frac{\rho^2}{R} + R\right) - T \frac{\rho^2}{R} \quad (4) \end{aligned}$$

由(2)得  $N = P + S$ ，要保证车轮不滑动，必须  $F < fN = f(P + S)$  (5)

把(5)代入(4)得：  $M < f(P + S)\left(\frac{\rho^2}{R} + R\right) - T \frac{\rho^2}{R}$



可见， $f$ 越大越不易滑动。

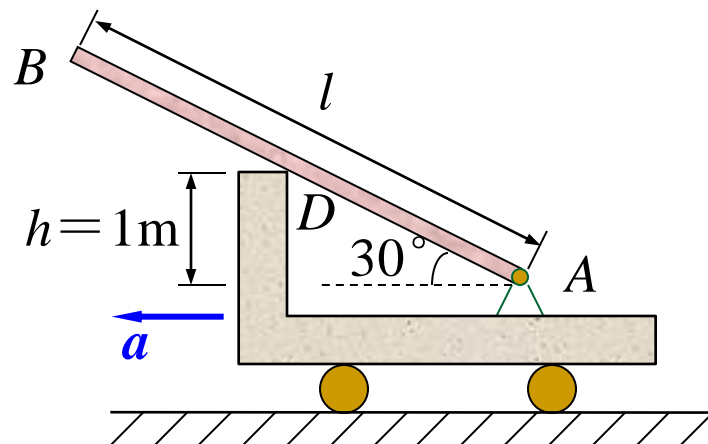
$M_{\max}$ 的值为上式右端的值。



[例10] 如图所示, 均质杆 $AB$ 的质量 $m=40\text{ kg}$ , 长 $l=4\text{ m}$ ,  $A$ 点以铰链连接于小车上。不计摩擦, 当小车以加速度 $a=15\text{ m/s}^2$ 向左运动时, 求 $D$ 处和铰 $A$ 处的约束力。

解: 以杆为研究对象, 受力如图。

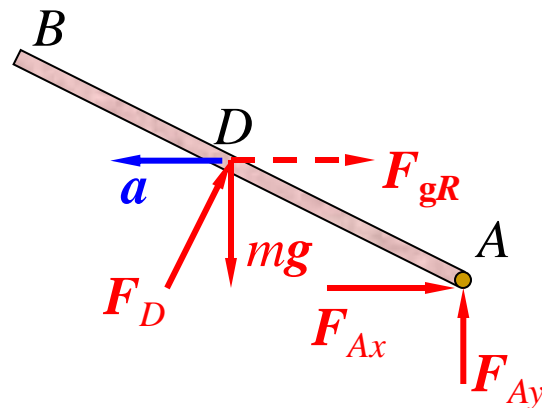
杆作平移, 惯性力的大小为  
 $F_{gR}=ma$ 。假想地加上惯性力系,  
 则由质点系的达兰贝尔原理



$$\sum M_A(F) = 0$$

$$mg \frac{l}{2} \cos 30^\circ - F_D \frac{l}{2} - F_{gR} \frac{l}{2} \sin 30^\circ = 0$$

于是得  $F_D = m(g \cos 30^\circ - a \sin 30^\circ)$



$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} + F_{gR} + F_D \sin 30^\circ = 0$$

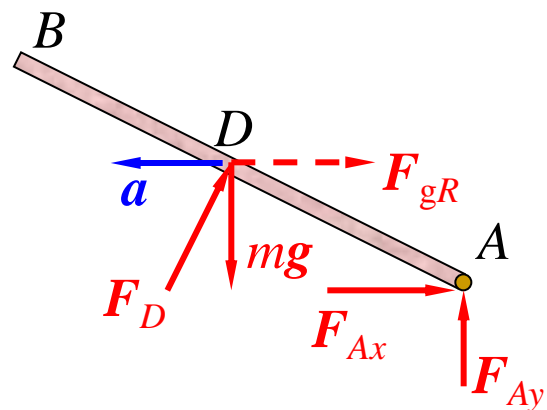
$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} + F_D \cos 30^\circ - mg = 0$$

代入数据,解之得:

$$F_{Ax} = -617.9N$$

$$F_{Ay} = 357.82N$$

$$F_D = 39.47N$$



[例11] 均质杆 $AB$ 长 $l$ , 重 $W$ ,  $B$ 端与重 $G$ 、半径为 $r$ 的均质圆轮铰接。在圆轮上作用一矩为 $M$ 的力偶, 借助于细绳提升重为 $P$ 的重物 $C$ 。试求固定端 $A$ 的约束力。

解: 先以轮和重物为研究对象, 受力如图。  
假想地加上惯性力系

$$F_{gC} = \frac{P}{g} a$$

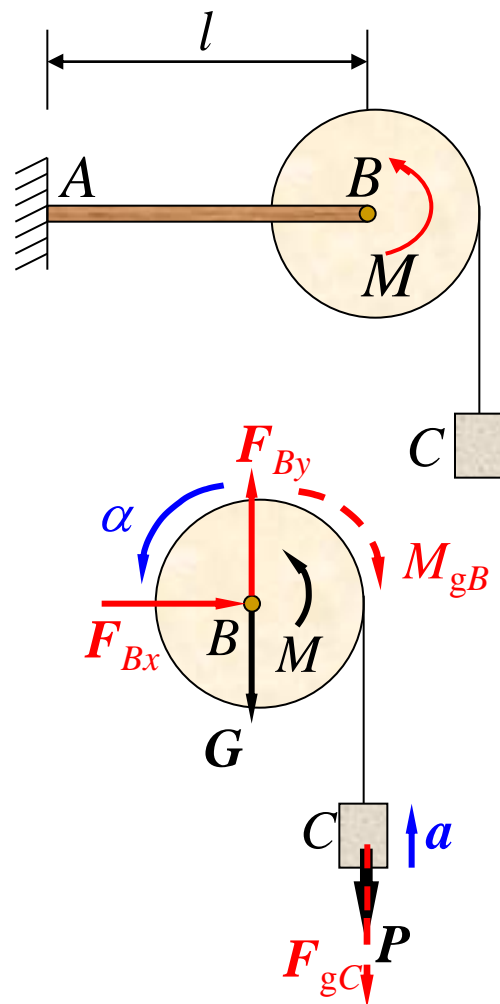
$$M_{gB} = J_B \alpha = \frac{1}{2} \frac{G}{g} r^2 \frac{a}{r} = \frac{Gr}{2g} a$$

由质点系的达兰贝尔原理

$$\sum M_B(F) = 0 \quad M - M_{gB} - r(P + F_{gC}) = 0$$

代入 $F_{gC}$ 和 $M_{gB}$ 得

$$a = \frac{2(M - rP)}{r(G + 2P)} g$$



再以整体为研究对象，受力如图，假想地加上惯性力系

由质点系的达兰贝尔原理

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} - W - G - P - F_{gC} = 0$$

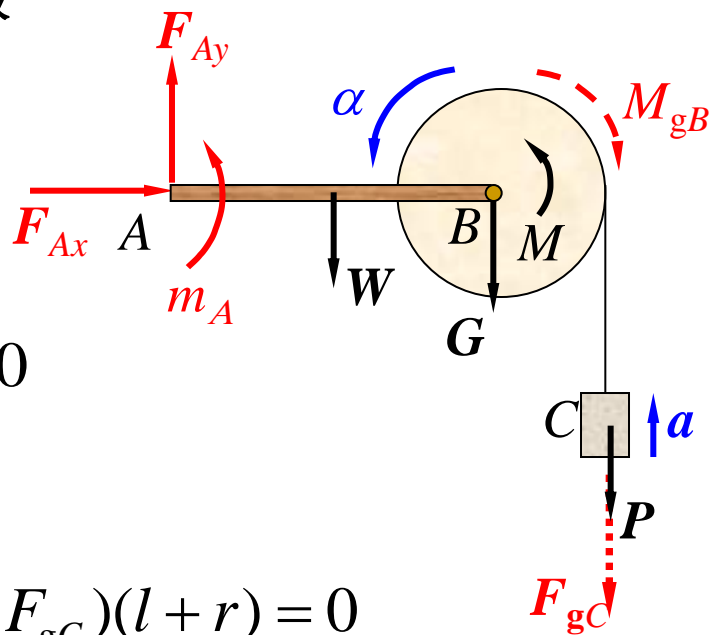
$$\sum M_A(F) = 0$$

$$m_A - W \frac{l}{2} - Gl + M - M_{gB} - (P + F_{gC})(l + r) = 0$$

代入  $F_{gC}$  和  $M_{gB}$  解得  $F_{Ax} = 0$

$$F_{Ay} = W + G + P + \frac{2(M - rP)}{r(G + 2P)} P$$

$$m_A = l\left(\frac{W}{2} + G\right) - M + \frac{(M - rP)}{(G + 2P)} G + (l + r) \frac{rG + 2M}{r(G + 2P)} P$$



[例12] 质量为 $m$ , 长为 $l$ 的均质直杆 $AB$ 的一端 $A$ 焊接于半径为 $r$ 的圆盘边缘上, 如图。今圆盘以角加速度 $\alpha$  绕其中心 $O$ 转动。求圆盘开始转动时, $AB$ 杆上焊接点 $A$ 处的约束力。

解：以杆 $AB$ 为研究对象, 受力如图。

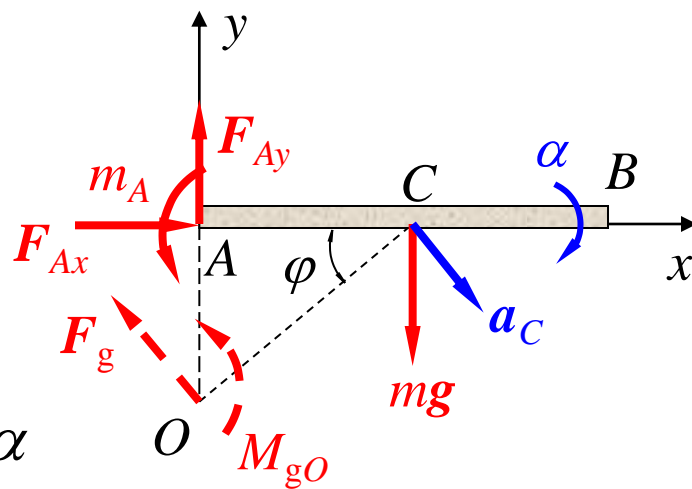
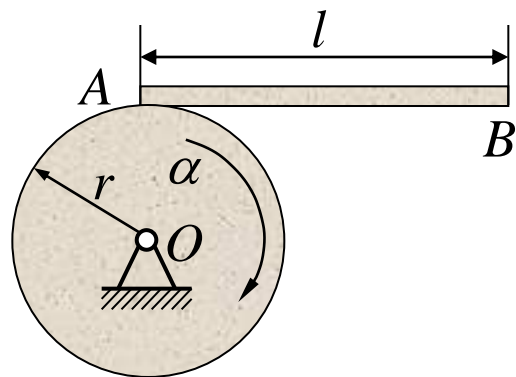
$$a_C = a_C^\tau = OC \cdot \alpha = \sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} \cdot \alpha$$

将惯性力系向转轴简化, 得主矢和主矩的大小分别为

$$F_g = ma_C^\tau = m\sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} \cdot \alpha$$

$$M_{gO} = J_O \alpha = (J_C + m \cdot OC^2) \alpha =$$

$$\left[ \frac{1}{12} ml^2 + m\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right) \right] \alpha = \left( \frac{1}{3} ml^2 + mr^2 \right) \alpha$$



由质点系的达兰贝尔原理

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} - F_g \sin \varphi = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} + F_g \cos \varphi - mg = 0$$

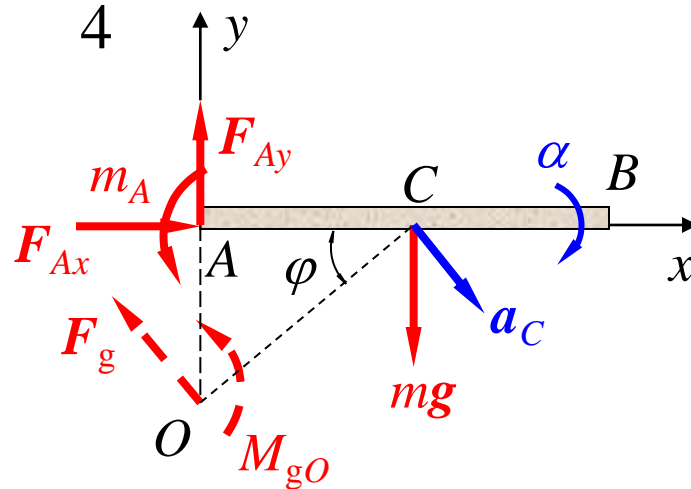
$$\sum M_A(F) = 0 \quad m_A + M_{gO} - mg \frac{l}{2} - F_g \sin \varphi \cdot r = 0$$

$$\sin \varphi = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}} \quad \cos \varphi = \frac{l}{2\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}}$$

将已知数值代入以上三式,解之得

$$F_{Ax} = mr\alpha \quad F_{Ay} = mg - \frac{l}{2}m\alpha$$

$$m_A = \frac{1}{2}mgl - \frac{1}{3}ml^2\alpha$$



[例13] 重 $P$ 、半径为 $r$ 的均质圆轮沿倾角为 $\theta$ 的斜面向下滚动。求轮心 $C$ 的加速度, 并求圆轮不滑动的最小摩擦系数。

解: 以圆轮为研究对象, 受力如图, 建立如图坐标。

圆轮作平面运动, 轮心作直线运动, 则

$$a_C = r\alpha$$

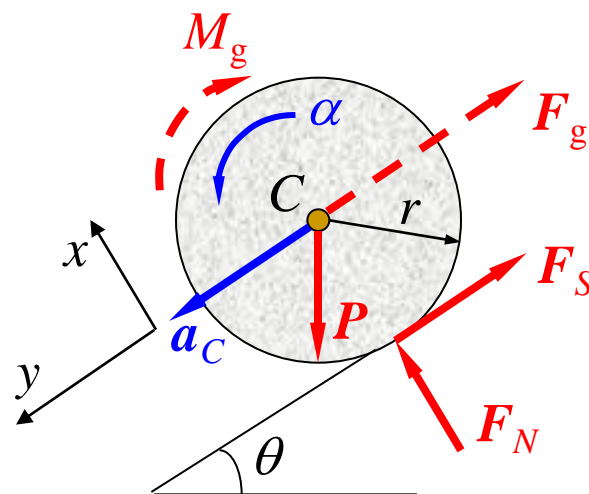
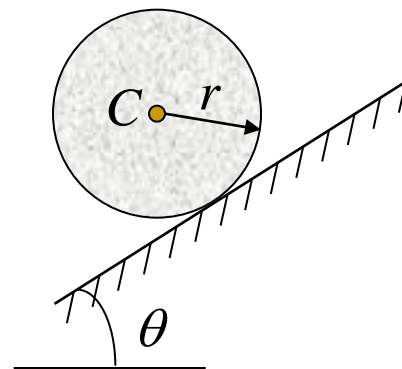
将惯性力系向质心简化, 惯性力和惯性力偶矩的大小为

$$F_g = \frac{P}{g} r\alpha \quad M_g = \frac{P}{2g} r^2 \alpha$$

则由质点系的达兰贝尔原理

$$\sum F_x = 0 \quad F_N - P \cos \theta = 0$$

$$F_N = P \cos \theta$$



$$\sum F_y = 0 \quad P \sin \theta - F_S - F_g = 0$$

$$\sum M_C(F) = 0 \quad F_S r - M_g = 0$$

解之得

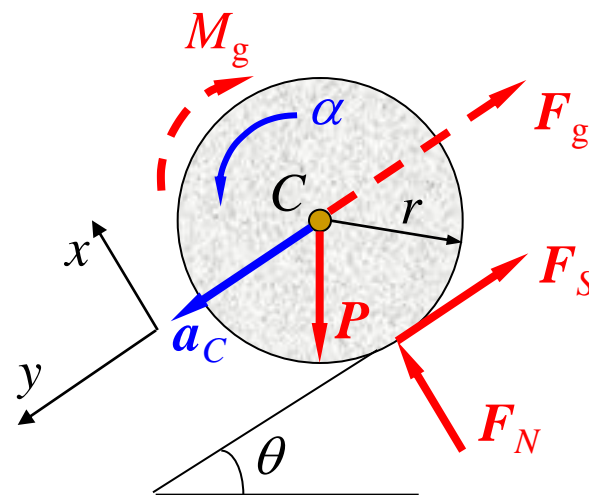
$$a_c = \frac{2}{3} g \sin \theta \quad F_S = \frac{P}{3} \sin \theta$$

由于圆轮没有滑动, 则  $F \leq fN$ , 即

$$\frac{P}{3} \sin \theta \leq f \cdot P \cos \theta$$

由此得  $f \geq \frac{1}{3} \tan \theta$

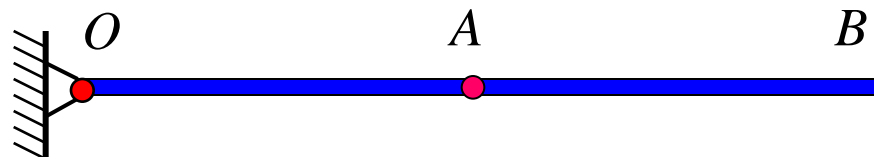
所以, 圆轮不滑动时, 最小摩擦系数  $f_{\min} = \frac{1}{3} \tan \theta$





[例14] 已知两均质直杆自水平位置无初速地释放。求两杆的角加速度和O、A处的约束力。

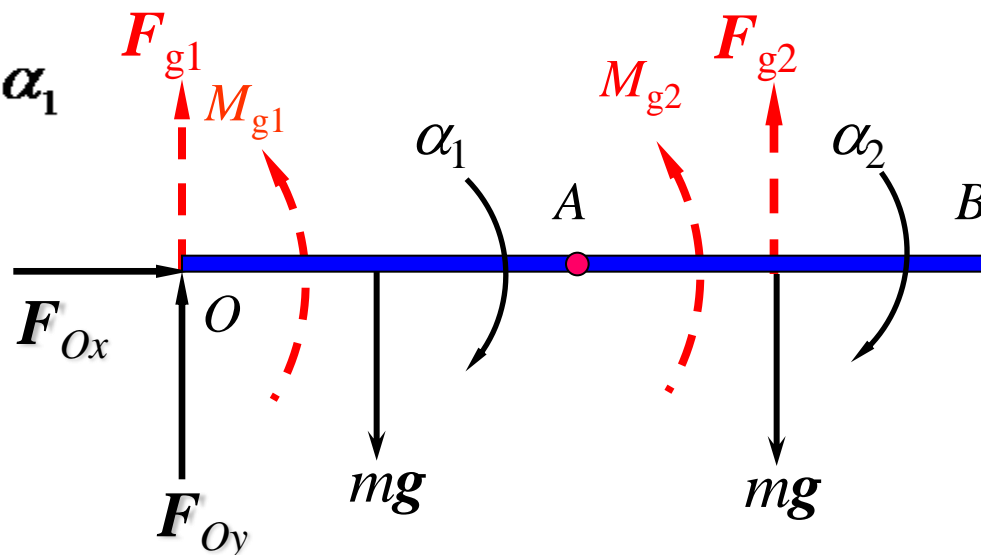
解: (1) 取系统为研究对象



$$F_{g1} = m \frac{l}{2} \alpha_1 \quad M_{g1} = \frac{1}{3} m l^2 \alpha_1$$

$$F_{g2} = m(l\alpha_1 + \frac{l}{2}\alpha_2)$$

$$M_{g2} = \frac{1}{12} m l^2 \alpha_2$$



则由质点系的达兰贝尔原理

$$\sum M_O(F) = 0 \quad M_{g1} + M_{g2} - mg \frac{l}{2} - mg \frac{3l}{2} + F_{g2} \frac{3l}{2} = 0$$

方程化简为  $\longrightarrow 11\alpha_1 + 5\alpha_2 = \frac{12g}{l}$

(2) 取AB 杆为研究对象

$$\sum M_A(F) = 0 \quad M_{g2} - mg \frac{l}{2} + F_{g2} \frac{l}{2} = 0$$

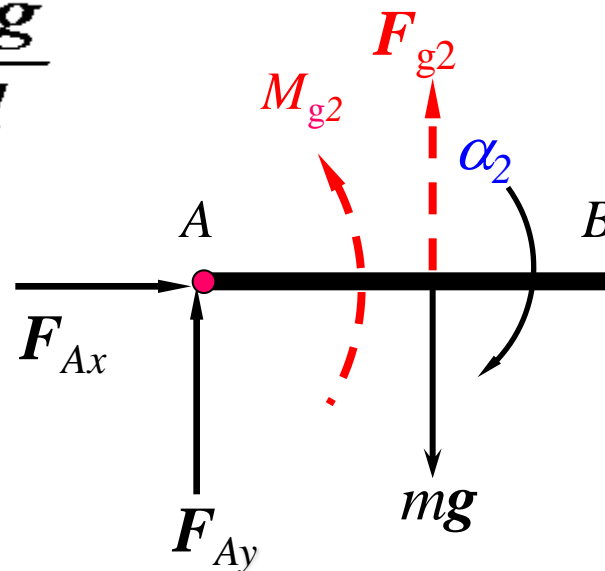
$\longrightarrow 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = \frac{3g}{l}$

$$\alpha_1 = \frac{9g}{7l}, \quad \alpha_2 = -\frac{3g}{7l}$$

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} - mg + F_{g2} = 0$$

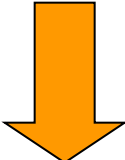
$\longrightarrow F_{Ax} = 0, \quad F_{Ay} = -\frac{1}{14}mg$



### (3) 取系统为研究对象

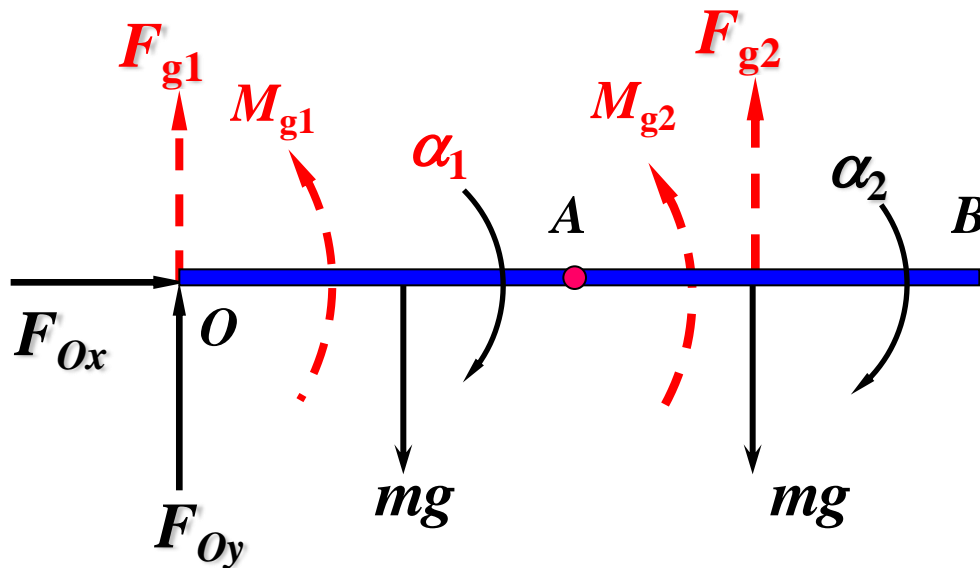
$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ox} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Oy} - mg - mg + F_{I1} + F_{I2} = 0$$



$$F_{Ox} = 0$$

$$F_{Oy} = \frac{2}{7} mg$$



[例15] 均质杆的质量为 $m$ , 长为 $2l$ , 一端放在光滑地面上, 并用两软绳支持, 如图所示。求当 $BD$ 绳切断的瞬间,  $B$ 点的加速度、 $AE$ 绳的拉力及地面的约束力。

解: 以 $AB$ 杆为研究对象, 杆 $AB$ 作平面运动, 如图, 以 $B$ 点为基点, 则 $C$ 点的加速度为

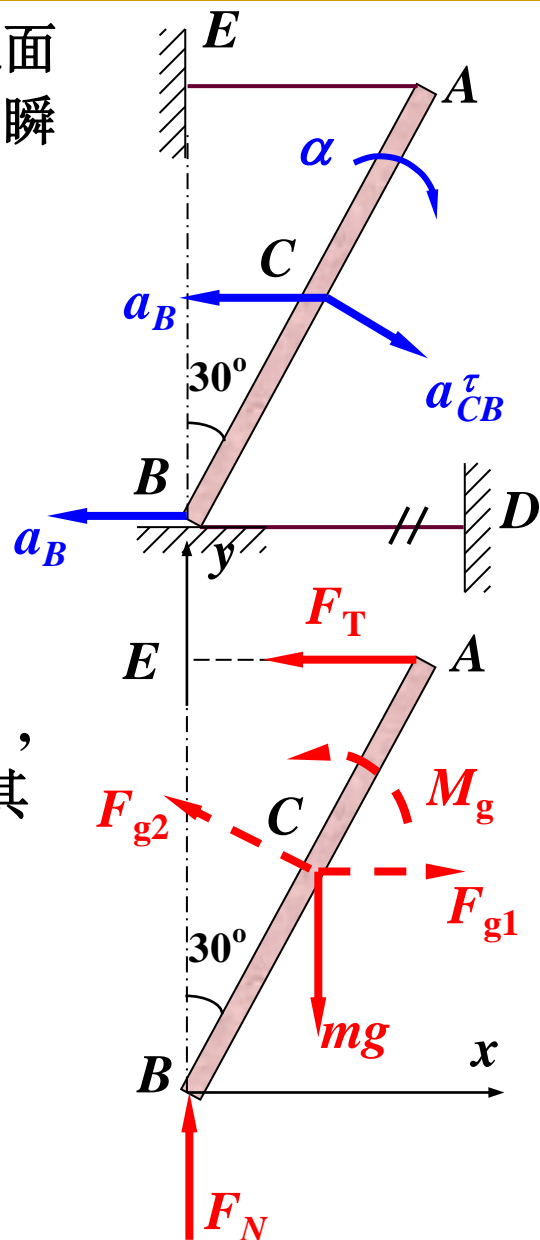
$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{CB}^{\tau} + \mathbf{a}_{CB}^n$$

$$\text{其中 } a_{CB}^{\tau} = l\alpha \quad a_{CB}^n = l\omega^2 = 0$$

将惯性力系向质心 $C$ 简化, 得惯性力 $F_g = F_{g1} + F_{g2}$ , 其中 $F_{g1} = ma_B$ ,  $F_{g2} = ma_{CB}^{\tau} = ml\alpha$  和惯性力偶, 其力偶的矩为

$$M_g = J_C \alpha = \frac{1}{12} m(2l)^2 \alpha = \frac{1}{3} ml^2 \alpha$$

在 $BD$ 绳切断的瞬间, 受力如图, 建立如图坐标。



由质点系的达兰贝尔原理

$$\sum F_x = 0 \quad -F_T + F_{g1} - F_{g2} \cos 30^\circ = 0$$

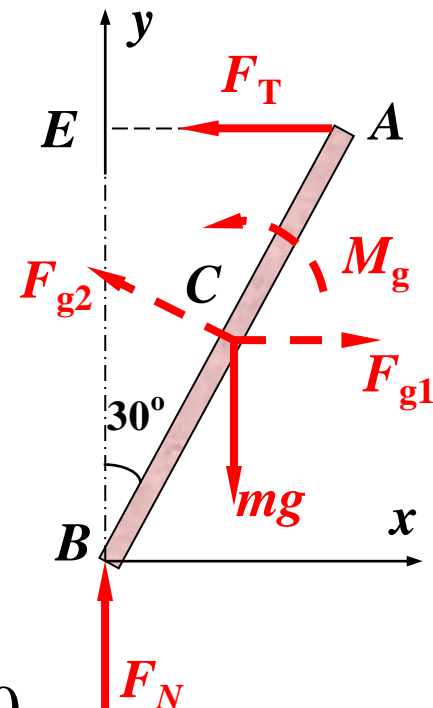
$$-F_T + ma_B - ml\alpha \cos 30^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_N + F_{g2} \sin 30^\circ - mg = 0$$

$$F_N + ml\alpha \sin 30^\circ - mg = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_C(F) = 0 \quad F_T l \cos 30^\circ - F_N l \sin 30^\circ + M_g = 0$$

$$F_T l \cos 30^\circ - F_N l \sin 30^\circ + \frac{1}{3} ml^2 \alpha = 0 \quad (3)$$



以B为基点,则A点的加速度为

$$\mathbf{a}_A^\tau + \mathbf{a}_A^n = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{AB}^\tau + \mathbf{a}_{AB}^n$$

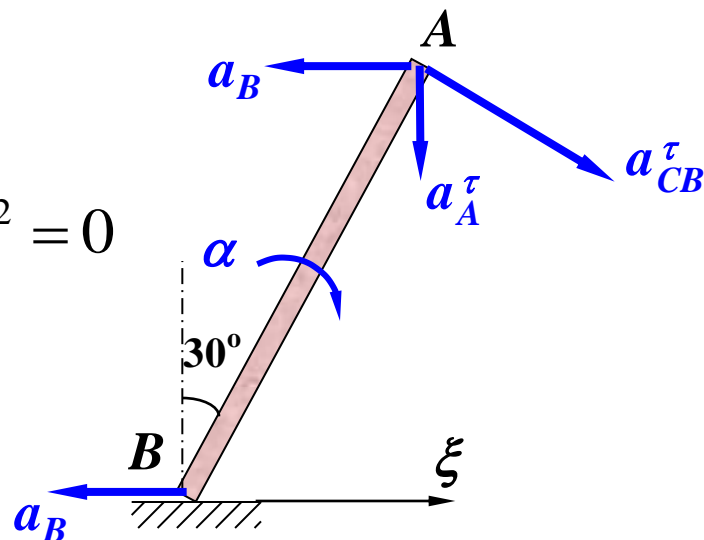
$$\text{其中 } a_A^n = v_A^2 / AE = 0 \quad a_{AB}^n = 2l\omega^2 = 0$$

将上式投影到 $\xi$ 轴上得

$$0 = -a_B + a_{AB}^\tau \cos 30^\circ$$

$$a_B = 2l\alpha \cos 30^\circ$$

(4)



联立求解 (1) ~ (4) 式,得

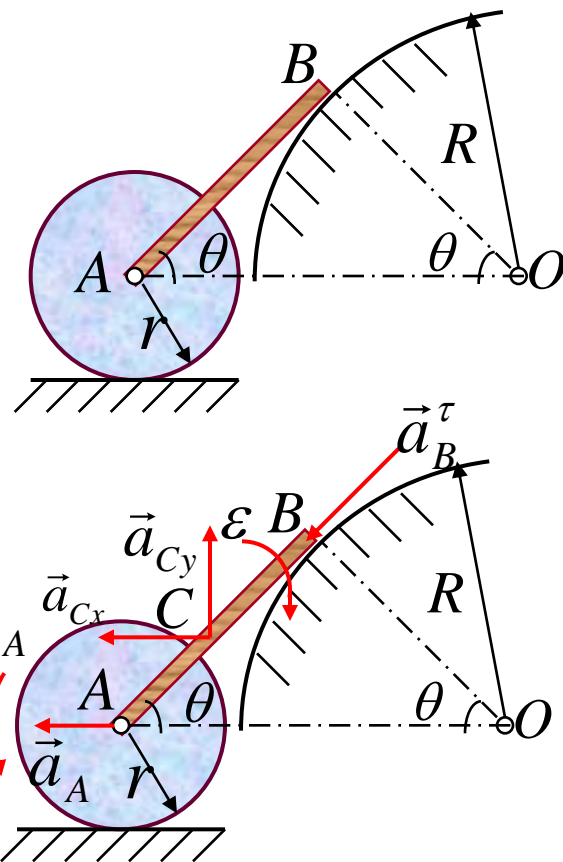
$$a_B = \frac{3}{4} g \sin 2 \cdot 30^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{8} g \quad \alpha = \frac{a_B}{2l \cos 30^\circ} = \frac{3g}{8l}$$

$$F_T = \frac{1}{2} m a_B = \frac{3\sqrt{3}}{16} mg \quad F_N = mg - \frac{1}{2} m a_B \tan 30^\circ = \frac{13}{16} mg$$

[例16] 如图所示，均质杆 $AB$ 长为 $l$ ，重为 $Q$ ，上端 $B$ 靠在半径为 $R$ 的光滑圆弧上（ $R=l$ ），下端 $A$ 以铰链和均质圆轮中心 $A$ 相连，圆轮重 $P$ ，半径为 $r$ ，放在粗糙的地面上，由静止开始滚动而不滑动。若运动开始瞬时杆与水平线所成夹角 $\theta=45^\circ$ ，求此瞬时 $A$ 点的加速度。

解：设系统运动的初瞬时，圆轮中心的加速度为 $\vec{a}_A$ ，角加速度为 $\varepsilon_A$ ； $AB$ 杆的角加速度为 $\varepsilon$ ，质心 $C$ 的加速度为 $\vec{a}_{Cx}$ 、 $\vec{a}_{Cy}$ 。如图。

$$\varepsilon_A = a_A / r$$

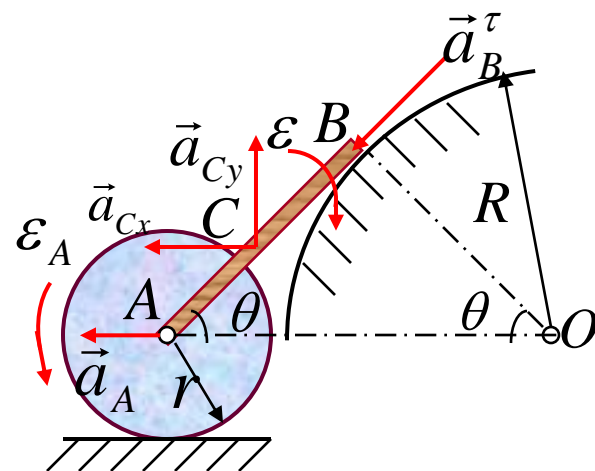


轮和杆均作平面运动，将惯性力系分别向质心简化，则惯性力和惯性力偶的矩的大小分别为

$$F_{gA} = \frac{P}{g} a_A \quad M_{gA} = \frac{1}{2} \frac{P}{g} r^2 \frac{a_A}{r}$$

$$F_{gCx} = \frac{Q}{g} a_{Cx} \quad F_{gCy} = \frac{Q}{g} a_{Cy}$$

$$M_{gC} = \frac{1}{12} \frac{Q}{g} l^2 \varepsilon$$



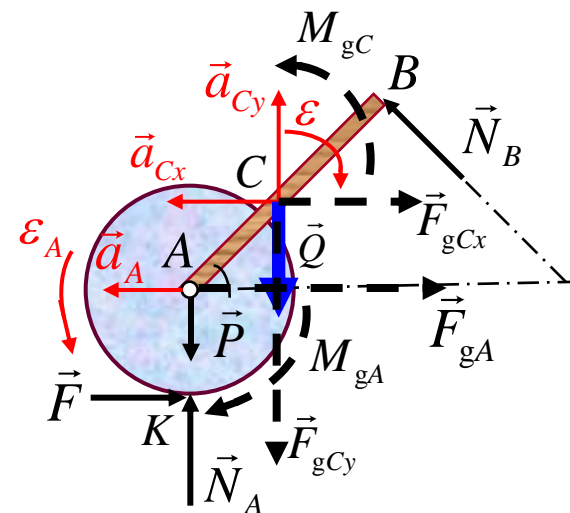
先以整体为研究对象, 受力如图。假想地加上惯性力和惯性力偶, 则由质点系的达兰贝尔原理

$$\sum m_K (\vec{F}) = 0$$

$$N_B (l + r \sin \theta) - F_{gCy} \frac{l}{2} \cos \theta$$

$$- Q \frac{l}{2} \cos \theta - F_{gCx} (r + \frac{l}{2} \sin \theta)$$

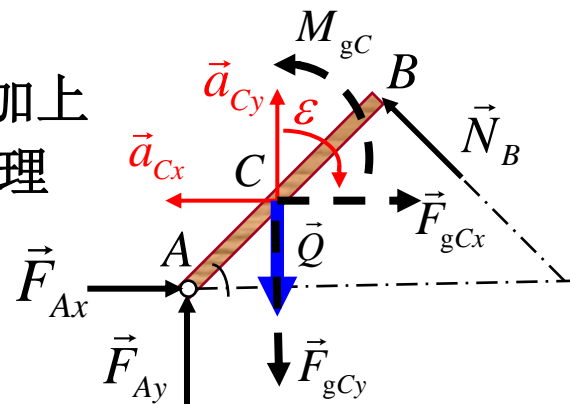
$$+ M_{gC} - F_{gA} r - M_{gA} = 0 \quad (1)$$





再以 $AB$ 为研究对象, 受力如图。假想地加上惯性力和惯性力偶, 则由质点系的达兰贝尔原理

$$\sum m_A(\vec{F}) = 0$$



$$N_B l - Q \frac{l}{2} \cos \theta - F_{gCy} \frac{l}{2} \cos \theta - F_{gCx} \frac{l}{2} \sin \theta + M_{gC} = 0 \quad (2)$$

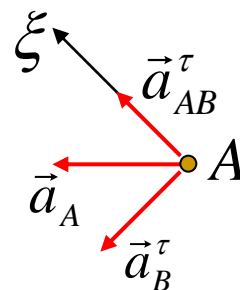
$AB$ 杆作平面运动, 先以 $B$ 点为基点, 则 $A$ 点的加速度为

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B^\tau + \vec{a}_B^n + \vec{a}_{AB}^\tau + \vec{a}_{AB}^n$$

其中  $a_B^n = \frac{v_B^2}{R} = 0$   $a_{AB}^n = l\omega^2 = 0$   $a_{AB}^\tau = l\varepsilon$

其加速度合成矢量图如图所示。将其投影于 $\xi$ 轴, 得

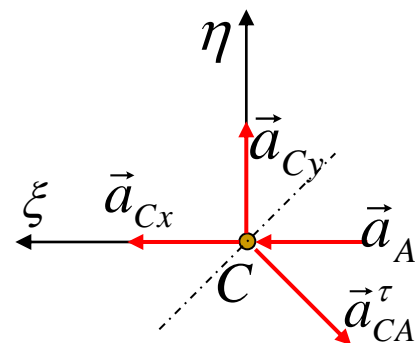
$$a_A \cos \theta = a_{AB}^\tau = l\varepsilon \quad (3)$$



再以A为基点,则C点的加速度为

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA}^{\tau}$$

其中  $a_{CA}^{\tau} = \frac{l}{2} \varepsilon$ , 加速度合成矢量图如图。



将其投影于 $\xi$ 、 $\eta$ 轴,得

$$a_{Cx} = a_A - a_{CA}^{\tau} \cos \theta = a_A - \frac{l}{2} \varepsilon \cos \theta \quad (4)$$

$$a_{Cy} = -a_{CA}^{\tau} \sin \theta = -\frac{l}{2} \varepsilon \sin \theta \quad (5)$$

由式 (3)、(4)、(5) 可将  $\varepsilon$ 、 $a_{Cx}$ 、 $a_{Cy}$  都化为  $a_A$  的函数,即

$$\varepsilon = \frac{a_A}{l} \cos \theta$$

$$a_{Cx} = a_A \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta\right)$$

$$a_{Cy} = -\frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta \cdot a_A$$

将其代入式（1）、（2），并取 $\theta = 45^\circ$ ，联立该两方程可解得

$$a_A = \frac{3Q}{2(4Q + 9P)} g$$

## § 13-3 定轴转动刚体的轴承动反力 静平衡与动平衡的概念

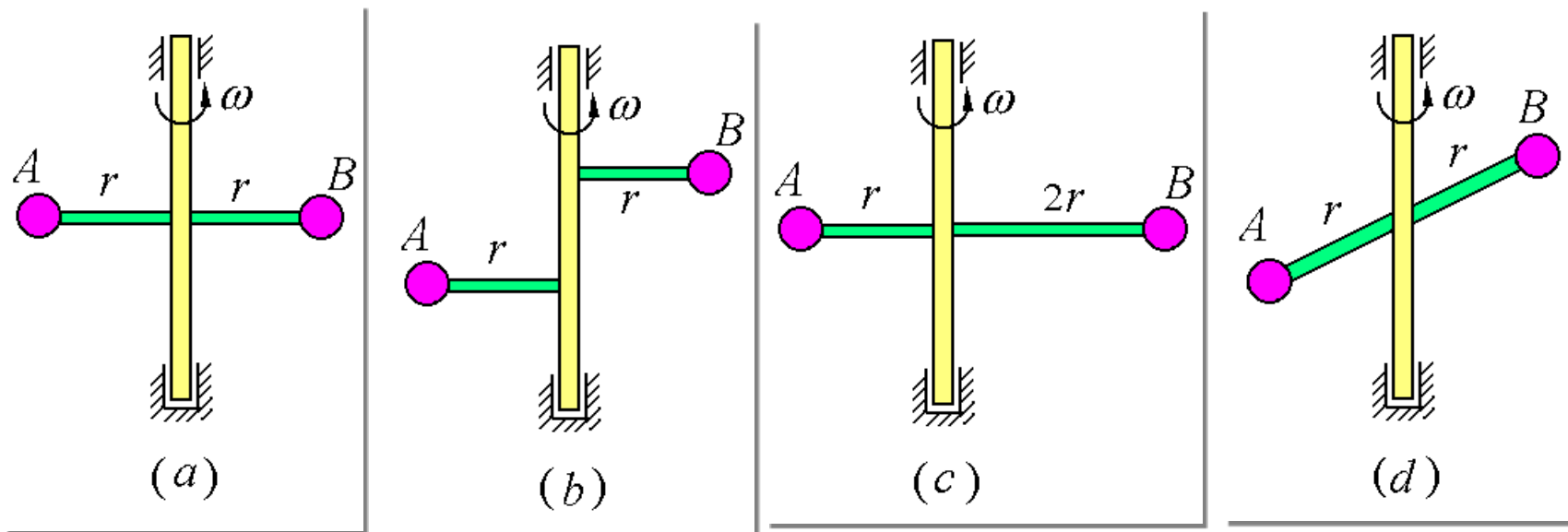
### 二、静平衡与动平衡的概念

**静平衡：**刚体转轴过质心，则刚体在仅受重力而不受其它主动力时，不论位置如何，总能平衡。

**动平衡：**转轴为中心惯性主轴时，转动时不产生附加动约束力。

动平衡的刚体，一定是静平衡的；反过来，静平衡的刚体，不一定是动平衡的。

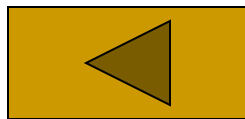
[例] 质量不计的刚轴以角速度 $\omega$ 匀速转动，其上固结着两个质量均为 $m$ 的小球A和B。指出在图示各种情况下，哪些是静平衡的？哪些是动平衡的？



动平衡：(a)

静平衡：(b)、(d)

# 第十三章结束



# 理论力学

## 第十四章 虚位移原理

在第一篇静力学中，我们从静力学公理出发，通过力系的简化，得出刚体的平衡条件，用来研究刚体及刚体系统的平衡问题。在这一章里，我们将介绍普遍适用于研究任意质点系的平衡问题的一个原理，它从位移和功的概念出发，得出任意质点系的平衡条件。该原理叫做**虚位移原理**。它是研究平衡问题的最一般的原理，不仅如此，将它与达兰贝尔原理相结合，就可得到一个解答动力学问题的动力学普遍方程。



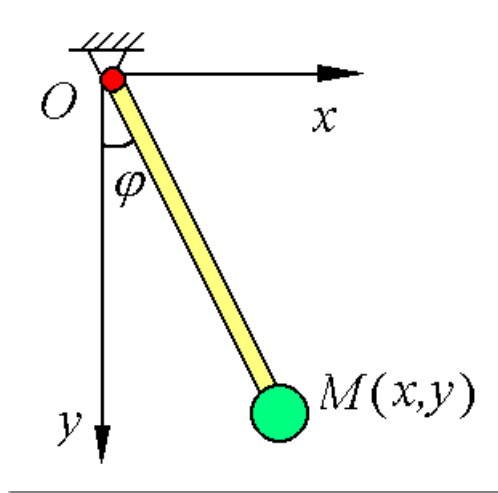
## § 14-1 约束及其分类

### 一、约束及约束方程

限制质点或质点系运动的各种条件称为约束。

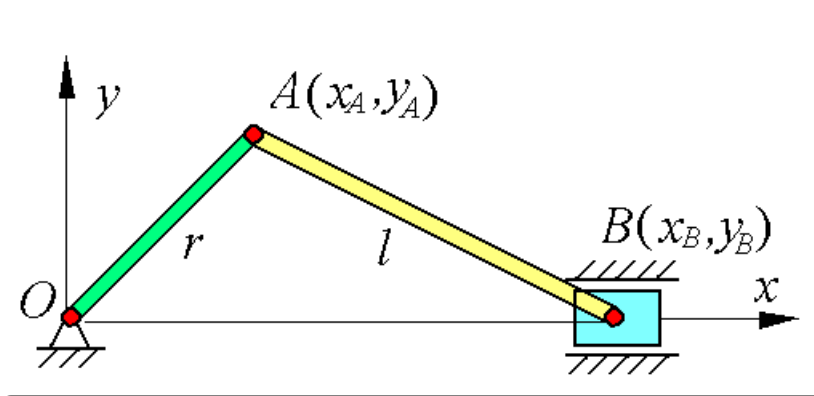
将约束的限制条件以数学方程来表示，则称为约束方程。

例如：



平面单摆

$$x^2 + y^2 = l^2$$



曲柄连杆机构

$$x_A^2 + y_A^2 = r^2$$

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l^2, \quad y_B = 0$$

## 二、约束的分类

根据约束的形式和性质，可将约束划分为不同的类型，通常按如下分类：

### 1. 几何约束和运动约束

限制质点系在空间几何位置的条件称为**几何约束**。如前述的平面单摆和曲柄连杆机构例子中的限制条件都是几何约束。几何约束方程的一般形式为

$$f_r(x_1, y_1, z_1, \cdots, x_n, y_n, z_n) = 0$$

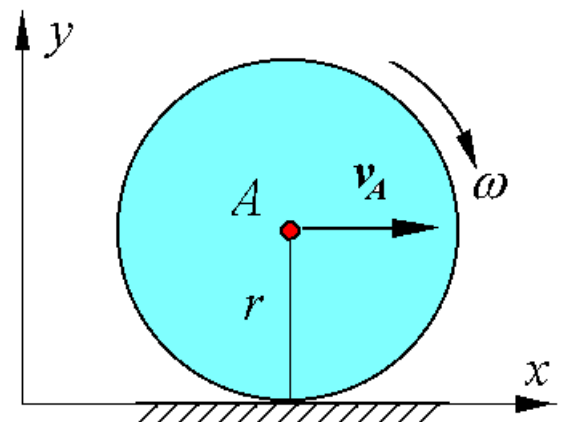
当约束对质点系的运动情况进行限制时，这种约束条件称为**运动约束**。运动约束方程的一般形式为

$$f_r(x_1, y_1, z_1, \cdots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \cdots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n) = 0$$

例如：车轮沿直线轨道作纯滚动时。

几何约束： $y_A = r$

运动约束： $v_A - r\omega = 0$  ( $\dot{x}_A - r\dot{\phi} = 0$ )

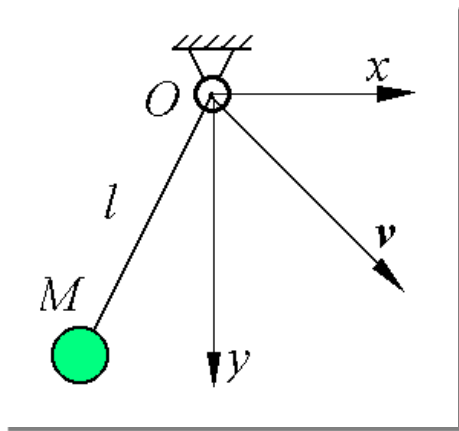


## 2. 定常约束和非定常约束

约束条件不随时间改变的约束为**定常约束**。

当约束条件与时间有关，并随时间变化时称为**非定常约束**。

前面的例子中约束条件皆不随时间变化，它们都是定常约束。

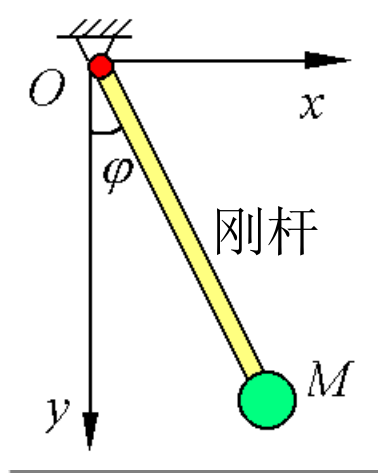


例如：重物  $M$  由一条穿过固定圆环的细绳系住。初始时摆长  $l_0$ ，匀速  $v$  拉动绳子。  
 $x^2 + y^2 = (l_0 - vt)^2$  约束方程中显含时间  $t$

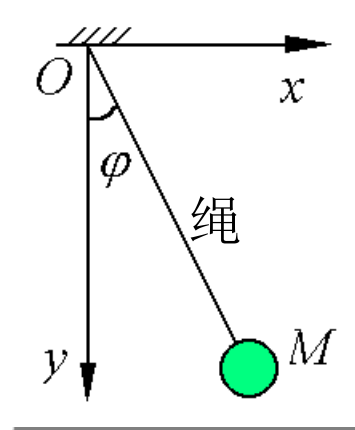
### 3. 双面约束和单面约束

在两个相对的方向上同时对质点系限制的约束称为**双面约束**。双面约束的约束方程为等式。

只能限制质点系单一方向的约束称为**单面约束**。单面约束的约束方程为不等式。



$$x^2 + y^2 = l^2$$



$$x^2 + y^2 \leq l^2$$

## 4. 完整约束和非完整约束

几何约束或约束方程能够积分的运动约束称为**完整约束**

例如：车轮沿直线轨道作纯滚动， $\dot{x}_A - r\dot{\varphi} = 0$  是微分方程，但经过积分可得到  $x_A - r\varphi = C$ ，该约束仍为完整约束。

如果在约束方程中显含坐标对时间的导数，并且不可以积分，这种约束称为**非完整约束**。

本章只讨论质点系受定常、双面、完整约束的情况，其约束方程的一般形式为（ $s$ 为质点系所受的约束数目， $n$ 为质点系的质点个数）

$$f_r(x_1, y_1, z_1; \cdots \cdots; x_n, y_n, z_n) = 0$$
$$(r = 1, 2, \cdots, s)$$

### 三、自由度和广义坐标

自由质点在空间的位置：  $(x, y, z)$           3个

自由质点系在空间的位置：  $(x_i, y_i, z_i)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )     $3n$ 个

对非自由质点系，受 $s$ 个完整约束，  $(3n-s)$ 个独立坐标。

其自由度为  $k=3n-s$  。

确定一个受完整约束质点系的位置所需的独立参数的数目，称为该质点系的自由度的数目，简称为自由度。

前述曲柄连杆机构例子中,确定曲柄连杆机构位置的四个坐标 $x_A$ 、 $y_A$ 、 $x_B$ 、 $y_B$ 须满足三个约束方程,因此有一个自由度。

一般受到 $s$ 个约束、由 $n$ 个质点组成的质点系，其自由度为

$$k = 3n - s$$

通常， $n$ 与 $s$ 很大而 $k$ 很小。为了确定质点系的位置，用适当选择的 $k$ 个参数（相互独立），要比用 $3n$ 个直角坐标和 $s$ 个约束方程方便得多。

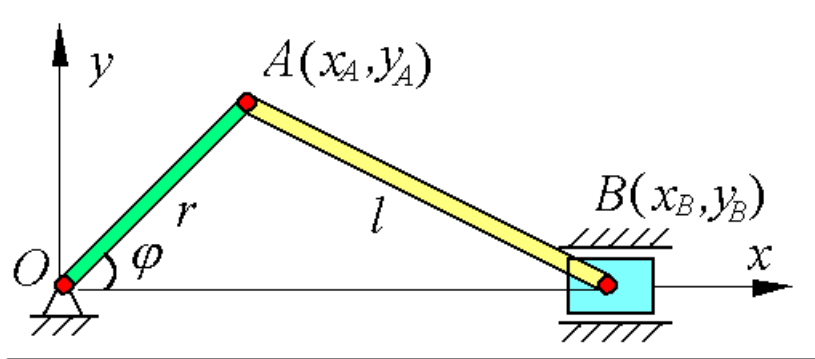
用来确定质点系位置的独立参数，称为**广义坐标**。

广义坐标的选择不是唯一的。广义坐标可以取线位移（ $x, y, z, s$ 等）也可以取角位移（如 $\alpha, \beta, \gamma, \varphi$ 等）。**在完整约束情况下，广义坐标的数目就等于自由度数目。**

例如：曲柄连杆机构中，可取曲柄 $OA$ 的转角 $\varphi$ 为广义坐标，则：

$$x_A = r \cos \varphi \quad , \quad y_A = r \sin \varphi$$

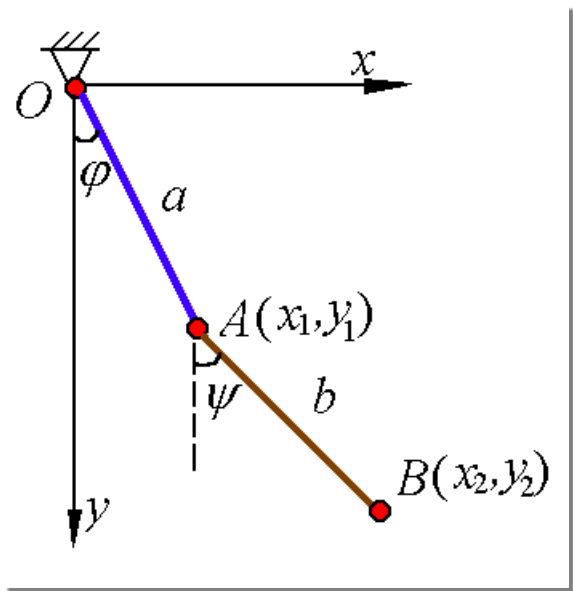
$$x_B = r \cos \varphi + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi} \quad , \quad y_B = 0$$



广义坐标选定后，  
质点系中每一质点的直  
角坐标都可表示为广义  
坐标的函数。



例如：双锤摆。设只在铅直平面内摆动。



$$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$$

$$x_1^2 + y_1^2 = a^2$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = b^2$$

两个自由度

取广义坐标  $\varphi, \psi$

$$x_1 = a \sin \varphi, \quad y_1 = a \cos \varphi$$

$$x_2 = a \sin \varphi + b \sin \psi, \quad y_2 = a \cos \varphi + b \cos \psi$$

一般地，设有由 $n$ 个质点组成的质点系，具有 $k$ 个自由度，取 $q_1$ 、 $q_2$ 、.....、 $q_k$ 为其广义坐标，质点系内各质点的坐标及矢径可表为广义坐标的函数。

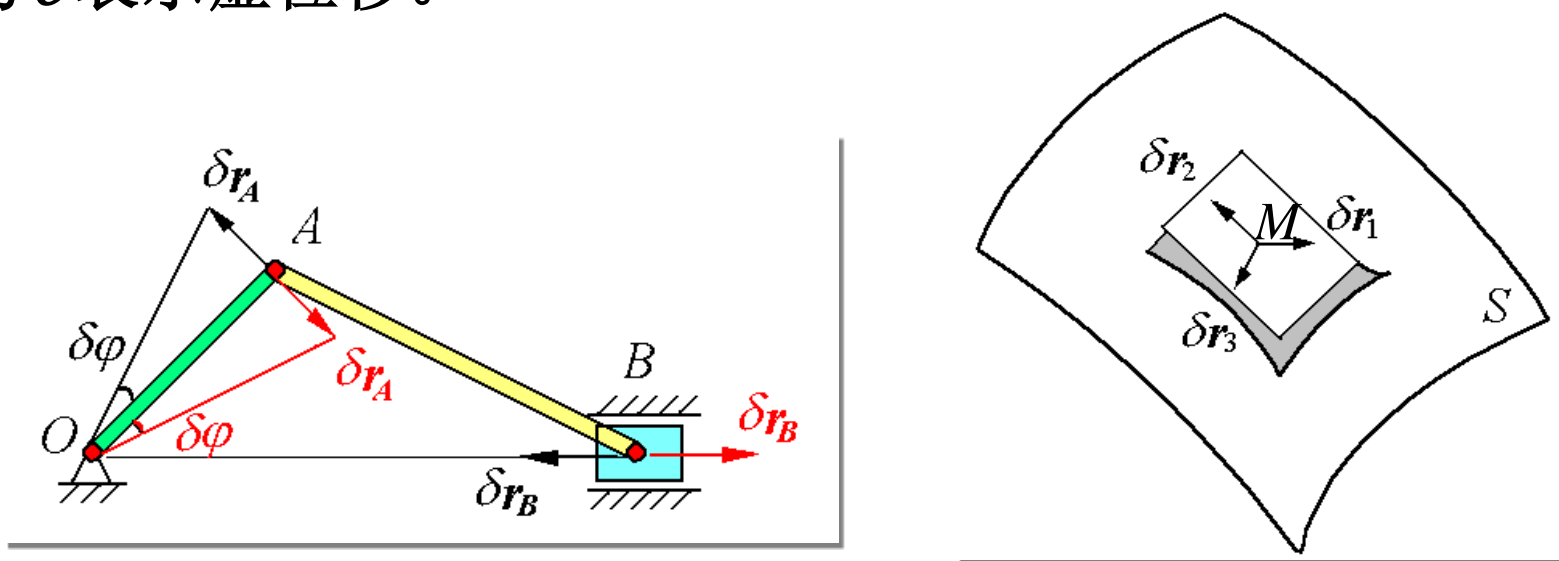
$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \cdots, q_k) \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \cdots, q_k) \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \cdots, q_k) \end{aligned} \right\}$$
$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_1, q_2, \cdots, q_k)$$
$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

## § 14-2 虚位移和虚功

### 一、虚位移

某瞬时，质点系中的某质点发生的为**约束所允许的、任意的无限小位移**，称为该质点（在该瞬时）的**虚位移**。

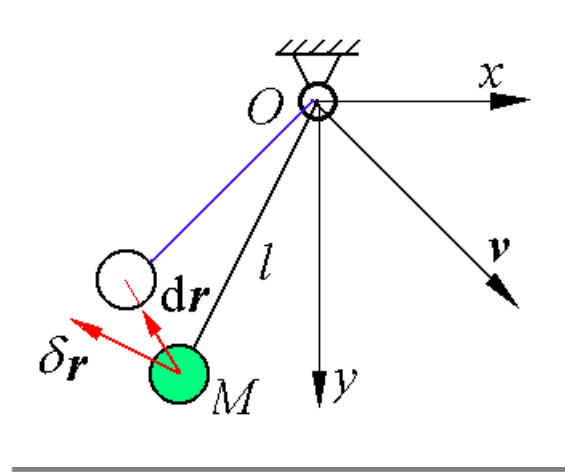
虚位移可以是线位移，也可以是角位移。通常用变分符号 $\delta$ 表示虚位移。



## 虚位移与真正运动时发生的实位移不同

- ① 实位移是在一定的力作用下和给定的初始条件下运动而实际发生的；虚位移是在约束容许的条件下可能发生的。
- ② 实位移具有确定的方向，可能是微小值，也可能是有限值；虚位移则是微小位移，视约束情况可能有几种不同的方向。
- ③ 实位移是在一定的时间内发生的；虚位移只是纯几何的概念，与时间无关，静止的质点系没有实位移，但可有虚位移。

**在定常约束下，微小的实位移必然是虚位移之一。而在非定常约束下，微小实位移不再是虚位移之一。**



受定常约束的非自由质点系中各质点的虚位移之间存在着一定的关系,确定这些关系通常有两种方法:

(注意: 在定常约束下, 微小的实位移必然是虚位移之一)

(一) 几何法: 定常约束的条件下, 真实位移是虚位移中的一个。因此可以用求实位移的方法来求各质点虚位移之间的关系。由运动学知, 质点的实位移与速度成正比, 即

$$d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt$$

因此可以用分析速度的方法分析各点虚位移之间的关系。这种方法又称虚速度法。

即各质点虚位移之比等于各质点速度之比。

由于 $AB$ 作平面运动，由速度投影定理

$$v_B \cos \theta = v_A \cos[90^\circ - (\varphi + \theta)] = v_A \sin(\varphi + \theta)$$

$$\frac{\delta r_B}{\delta r_A} = \frac{v_B}{v_A} = \frac{\sin(\varphi + \theta)}{\cos \theta}$$

或者，由于  $C$  为 $AB$ 的瞬心，故

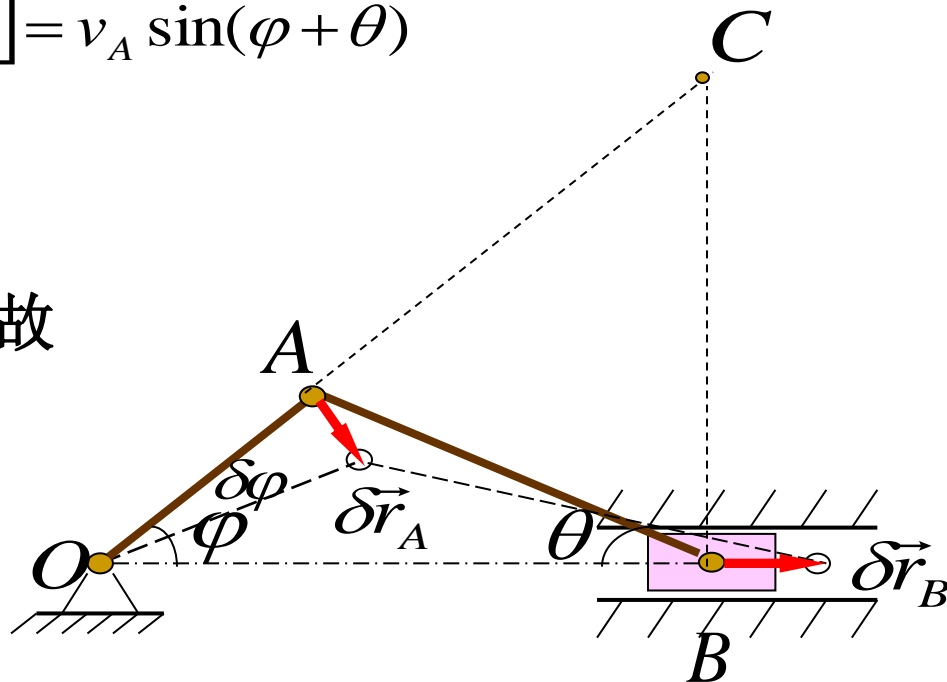
$$\frac{v_A}{AC} = \frac{v_B}{BC} \text{ 即 } \frac{v_B}{v_A} = \frac{BC}{AC}$$

由正弦定理

$$\frac{BC}{\sin(\varphi + \theta)} = \frac{AC}{\sin(90^\circ - \theta)} = \frac{AC}{\cos \theta}$$

同样可得

$$\frac{\delta r_B}{\delta r_A} = \frac{v_B}{v_A} = \frac{BC}{AC} = \frac{\sin(\varphi + \theta)}{\cos \theta}$$



(二) 解析法：质点系中各质点的坐标可表示为广义坐标的函数  
( $q_1, q_2, \dots, q_k$ )，广义坐标分别有变分 $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_k$ ，各  
质点的虚位移 $\delta \vec{r}_i$ 在直角坐标上的投影可以表示为

$$\left. \begin{aligned} \delta x_i &= \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \cdot \delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \cdot \delta q_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \cdot \delta q_k \\ \delta y_i &= \frac{\partial y_i}{\partial q_1} \cdot \delta q_1 + \frac{\partial y_i}{\partial q_2} \cdot \delta q_2 + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \cdot \delta q_k \\ \delta z_i &= \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \cdot \delta q_1 + \frac{\partial z_i}{\partial q_2} \cdot \delta q_2 + \dots + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \cdot \delta q_k \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

解析法是利用对约束方程或坐标表达式进行变分以求出虚位移之间的关系。例如

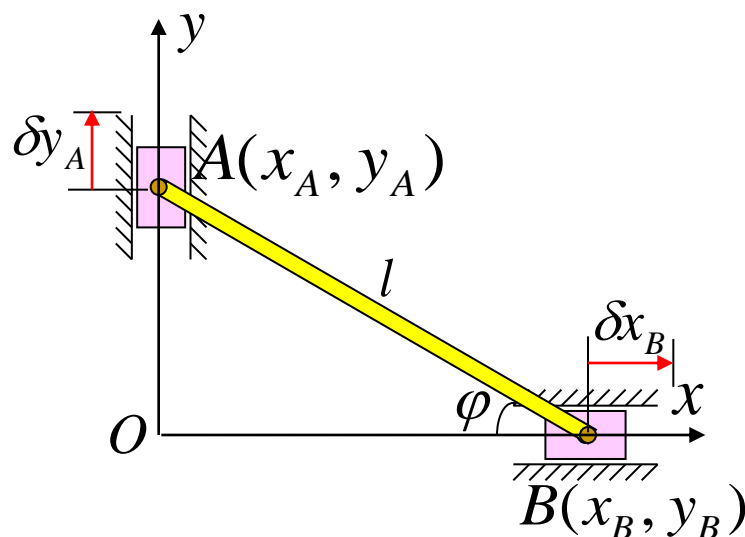
椭圆规机构如图，坐标 $x_B$ ， $y_A$ 有约束方程：

$$x_B^2 + y_A^2 = l^2$$

对上式进行变分运算得

$$2x_B\delta x_B + 2y_A\delta y_A = 0$$

$$\frac{\delta x_B}{\delta y_A} = -\frac{y_A}{x_B} = -\operatorname{tg} \varphi$$





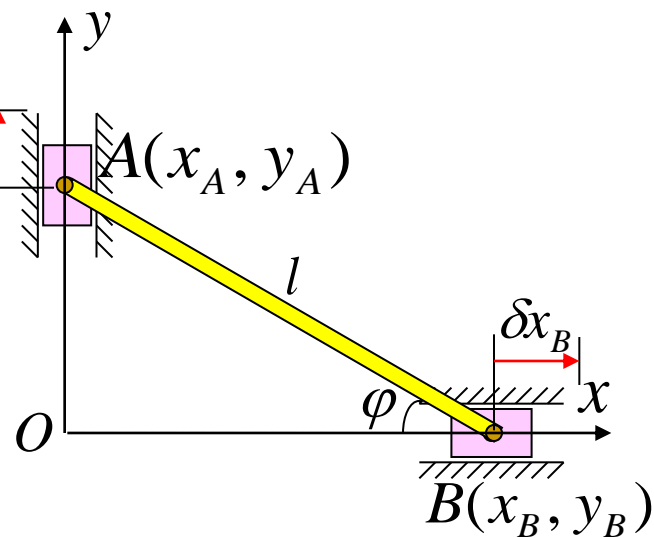
或者把坐标 $x_B$ ,  $y_A$ 有表示成 $\varphi$ 的函数, 也可求出虚位移间的关系。

因为  $x_B = l \cos \varphi$      $y_A = l \sin \varphi$

作变分运算

$$\delta x_B = -l \sin \varphi \delta \varphi \quad \delta y_A = l \cos \varphi \delta \varphi$$

由上式可知,  $\delta \varphi > 0$ , 即杆AB顺时针转动。 $B$ 点虚位移向左,  $A$ 点虚位移向上。



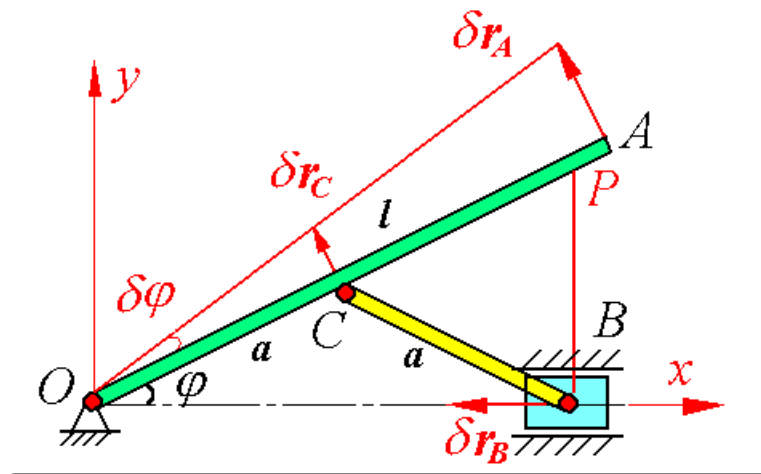
所以 
$$\frac{\delta x_B}{\delta y_A} = -\operatorname{tg} \varphi$$

比较以上两种方法, 可以发现, 几何法直观, 且较为简便, 而解析法比较规范。

[例1] 分析图示机构在图示位置时，  
点C、A与B的虚位移。

(已知  $OC=BC=a$ ,  $OA=l$ )

解：此为一个自由度系统，取  
 $OA$ 杆与 $x$ 轴夹角 $\varphi$ 为广义坐标。



1. 几何法

$$\frac{\delta r_C}{\delta r_A} = \frac{a}{l}$$

$$\frac{\delta r_C}{\delta r_B} = \frac{PC}{PB} = \frac{a}{2a \sin \varphi} = \frac{1}{2 \sin \varphi}$$

$P$ 为 $BC$ 杆的速度瞬心

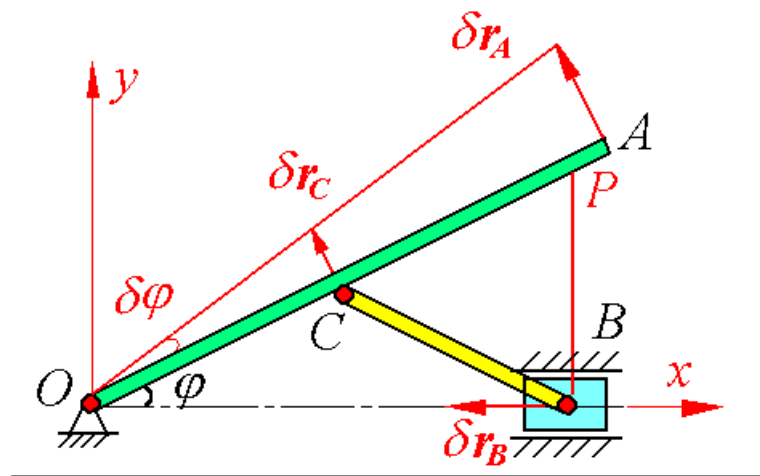
设 $OA$ 有虚位移 $\delta\varphi$ ，可按几何法  
求出各点虚位移及其投影

$$\delta \mathbf{r}_C = a \delta\varphi, \quad \delta \mathbf{r}_A = l \delta\varphi$$

$$\delta x_C = -a \sin \varphi \delta\varphi, \quad \delta y_C = a \cos \varphi \delta\varphi$$

$$\delta x_A = -l \sin \varphi \delta\varphi, \quad \delta y_A = l \cos \varphi \delta\varphi$$

$$\delta x_B = -\delta r_B = -2 \sin \varphi \delta r_C = -2a \sin \varphi \delta\varphi$$



## 2. 解析法

将 $C$ 、 $A$ 、 $B$ 点的坐标表示  
成广义坐标 $\varphi$ 的函数，得

对广义坐标 $\varphi$ 求变分，得各点  
虚位移在相应坐标轴上的投影：

$$x_C = a \cos \varphi, \quad y_C = a \sin \varphi$$

$$x_A = l \cos \varphi, \quad y_A = l \sin \varphi$$

$$x_B = 2a \cos \varphi, \quad y_B = 0$$

$$\delta x_C = -a \sin \varphi \delta\varphi, \quad \delta y_C = a \cos \varphi \delta\varphi$$

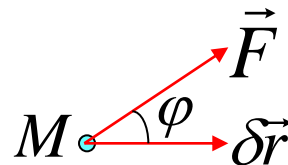
$$\delta x_A = -l \sin \varphi \delta\varphi, \quad \delta y_A = l \cos \varphi \delta\varphi$$

$$\delta x_B = -2a \sin \varphi \delta\varphi, \quad \delta y_B = 0$$

## 二、虚 功

力 $F$ 在其作用点发生的虚位移 $\delta \vec{r}$ 上所作的功称为**虚功**，记为 $\delta W$ 。

①以几何法表示的虚功



$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta \vec{r} \quad \text{或} \quad \delta W = F \cos \varphi \delta r$$

②以解析法表示的虚功

$$\delta W = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z$$

显然，虚功也是假想的，它与虚位移是同阶无穷小量。

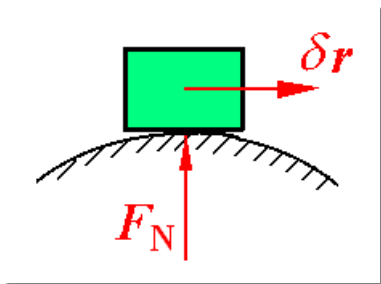
## 三、理想约束

如果在质点系的任何虚位移上，质点系的所有约束力的虚功之和等于零，则称这种约束为**理想约束**。

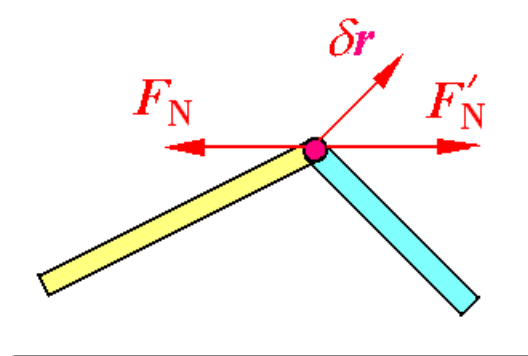
质点系受理想约束的条件： $\sum \delta W_N = \sum \bar{F}_{N_i} \cdot \delta \bar{r}_i = 0$

理想约束的典型例子如下：

### 1、光滑支承面



### 2、光滑铰链

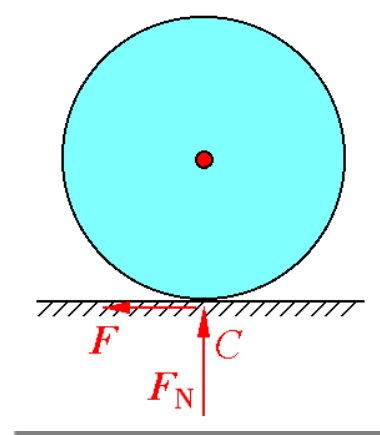


### 3、无重刚杆

### 4、不可伸长的柔索

### 5、刚体在粗糙面上的纯滚动

$$\sum \delta W_N = (\bar{F}_N + \bar{F}) \cdot \delta \bar{r}_C = 0$$

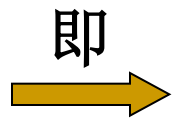


## § 14-3 虚位移原理

### 一、虚位移原理

具有定常、理想约束的质点系，平衡的必要与充分条件是：作用于质点系的所有主动力在任何虚位移上所作的虚功之和等于零。即

$$\sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$



$$\sum F_i \delta r_i \cos \alpha_i = 0$$

或用解析式表示为： 这些方程统称为**虚功方程**

$$\sum (F_{x_i} \delta x_i + F_{y_i} \delta y_i + F_{z_i} \delta z_i) = 0$$

几何法和解析法也可联合应用。

证明：(1) 必要性：即质点系处于平衡时，必有  $\sum \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0$

∵ 质点系处于平衡 ∴ 选取任一质点  $M_i$  也平衡。

$$\bar{F}_i + \bar{F}_{N_i} = 0$$

对质点  $M_i$  的任一虚位移  $\delta \bar{r}_i$ ，有  $(\bar{F}_i + \bar{F}_{N_i}) \cdot \delta \bar{r}_i = 0$

对整个质点系：  $\sum (\bar{F}_i + \bar{F}_{N_i}) \cdot \delta \bar{r}_i = 0$

$$\sum \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i + \sum \bar{F}_{N_i} \cdot \delta \bar{r}_i = 0$$

由于是理想约束  $\sum \bar{F}_{N_i} \cdot \delta \bar{r}_i = 0$

所以 
$$\sum \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0$$

(2) 充分性：即当质点系满足  $\sum \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0$ ，质点系一定平衡。

若  $\sum \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0$ ，而质点系不平衡，则至少有第*i*个质点不平衡。

$$\bar{F}_i + \bar{F}_{N_i} = \bar{F}_R \neq 0$$

在  $\bar{F}_{Ri}$  方向上产生实位移  $d\bar{r}_i$ ，取  $\delta \bar{r}_i = d\bar{r}_i$ ，则

$$(\bar{F}_i + \bar{F}_{N_i}) \cdot \delta \bar{r}_i = \bar{F}_{Ri} \cdot \delta \bar{r}_i > 0$$

$$\text{对质点系 } \sum (\bar{F}_i + \bar{F}_{N_i}) \cdot \delta \bar{r}_i > 0$$

$$\text{理想约束下 } \sum \bar{F}_{N_i} \cdot \delta \bar{r}_i = 0$$

$$\therefore \sum \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i > 0 \quad \text{与前题条件矛盾}$$

故  $\sum \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0$  时质点系必处于平衡。

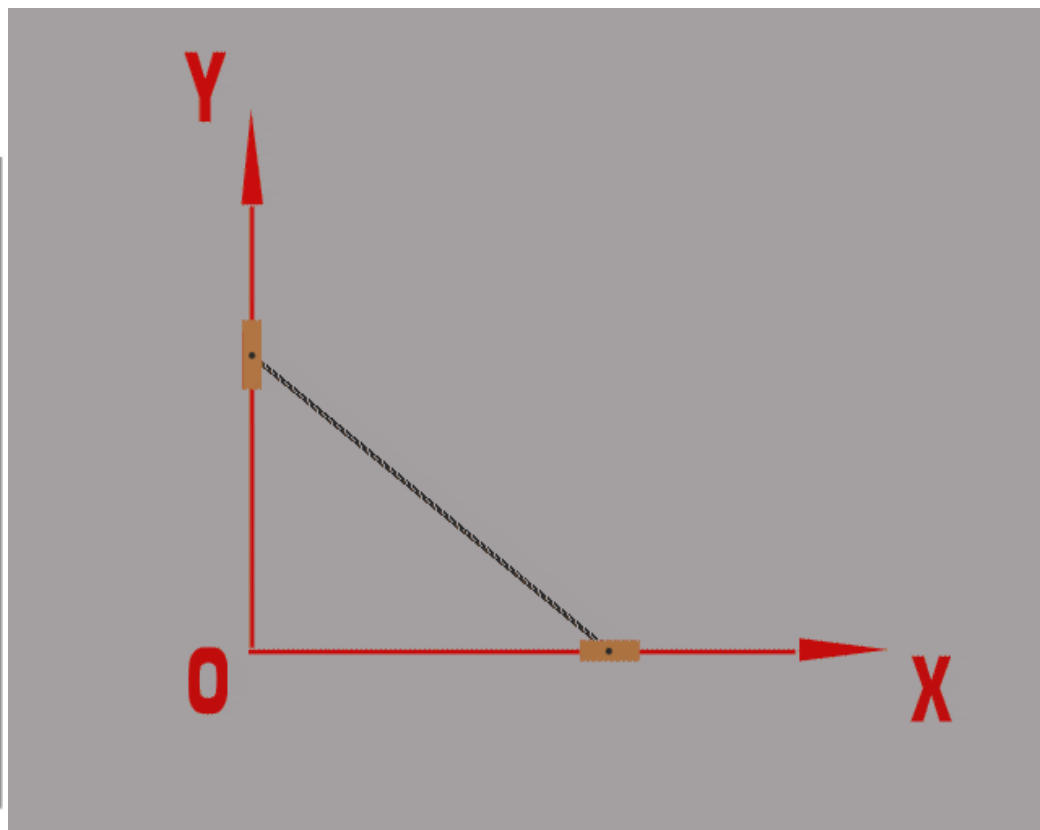
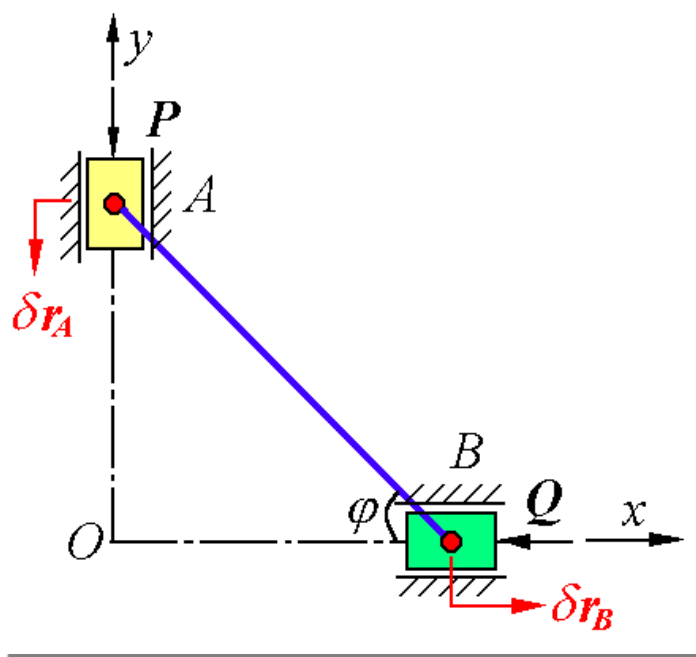


## 二、虚位移原理的应用

1. 系统在给定位置平衡时，求主动力之间的关系；
2. 求系统在已知主动力作用下的平衡位置；
3. 求系统在已知主动力作用下平衡时的约束力；
4. 求平衡构架二力杆的内力。

## 求主动力之间的关系

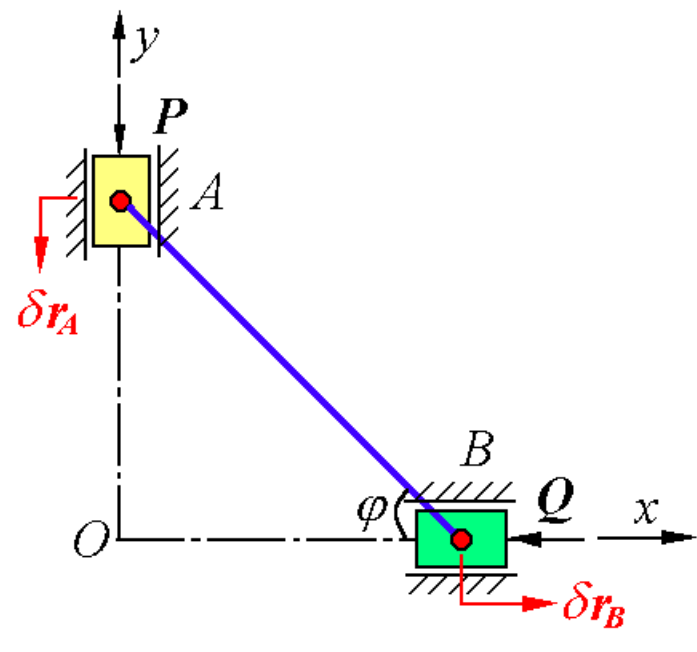
[例2] 图示椭圆规机构，连杆 $AB$ 长 $l$ ，杆重和滑道摩擦不计，铰链为光滑的，求在图示位置平衡时，主动力大小 $P$ 和 $Q$ 之间的关系。



解：研究整个机构。系统的所有约束都是完整、定常、理想的。

1、几何法：使A发生虚位移 $\delta\vec{r}_A$ ，B的虚位移 $\delta\vec{r}_B$ ，则由虚位移原理，得虚功方程：

$$P\delta\vec{r}_A - Q\delta\vec{r}_B = 0$$



$$\text{而 } \delta\vec{r}_A \cdot \sin \varphi = \delta\vec{r}_B \cdot \cos \varphi \Rightarrow \delta\vec{r}_B = \delta\vec{r}_A \cdot \tan \varphi$$

$$\therefore (P - Q \tan \varphi) \cdot \delta\vec{r}_A = 0$$

由 $\delta r_A$ 的任意性，得  $P = Q \tan \varphi$

2、解析法 由于系统为单自由度，  
可取 $\varphi$ 为广义坐标。

$$x_B = l \cos \varphi, \quad y_A = l \sin \varphi$$

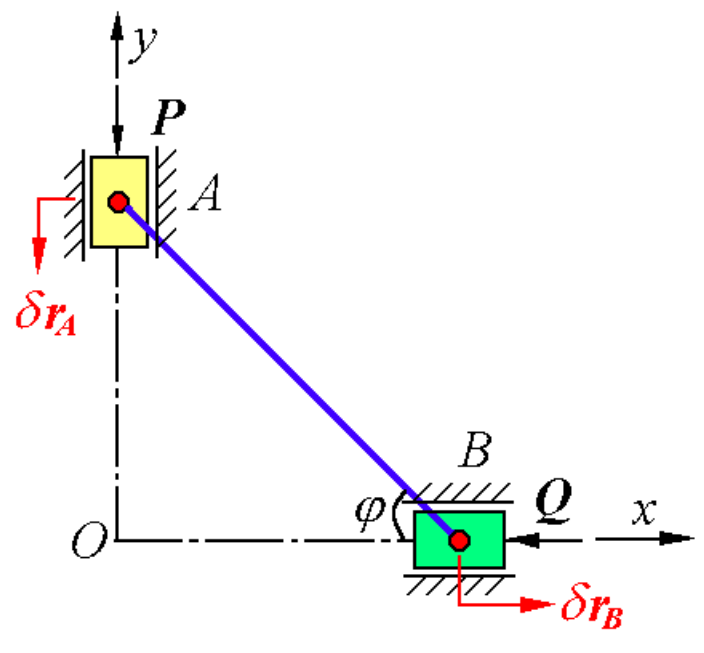
$$\delta x_B = -l \sin \varphi \delta \varphi, \quad \delta y_A = l \cos \varphi \delta \varphi$$

虚功方程为： $F_{Ay} \delta y_A + F_{Bx} \delta x_B = 0$

即  $-P \delta y_A - Q \delta x_B = 0,$

$$(-P \cos \varphi + Q \sin \varphi) l \delta \varphi = 0$$

由于 $\delta \varphi$  任意，故  $P = Q \tan \varphi$



解析法计算虚功不要另外考虑功的正负，功的正负由解析式自动计算得出。

[例3] 图示机构中，已知 $OA=AB=l$ ， $\angle AOB=\theta$ ，如不计各构件的重量和摩擦，求在图示位置平衡时主动力 $\vec{P}$ 与 $\vec{Q}$ 的大小之间的关系。

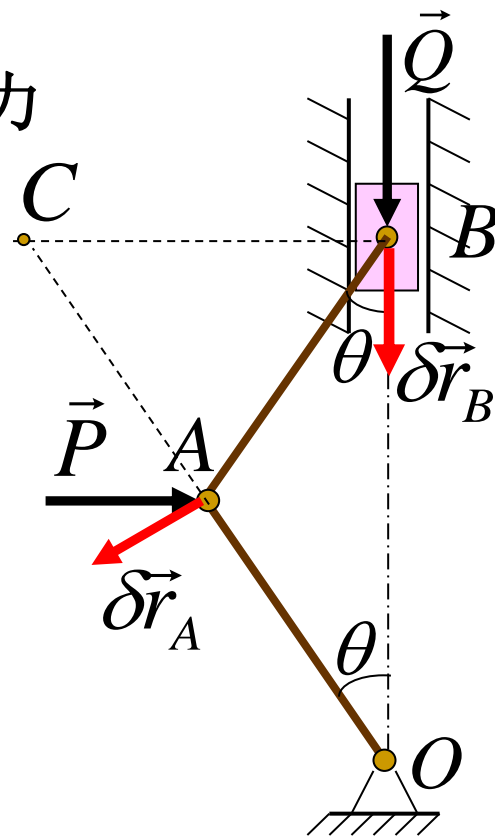
解1：以系统为研究对象，受的主动动力有 $\vec{P}$ 、 $\vec{Q}$ 。给系统一组虚位移如图。

由虚功方程  $\sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$ ，得

$$-P \delta r_A \cos \theta + Q \delta r_B = 0$$

$AB$ 作平面运动，瞬心在 $C$ 点，则

$$\frac{\delta r_B}{\delta r_A} = \frac{v_B}{v_A} = \frac{BC}{AC} = \frac{2l \sin \theta}{l} = 2 \sin \theta$$



将  $\delta r_B = 2 \sin \theta \delta r_A$  代入  $-P \delta r_A \cos \theta + Q \delta r_B = 0$  得

$$(-P \cos \theta + 2Q \sin \theta) \delta r_A = 0$$

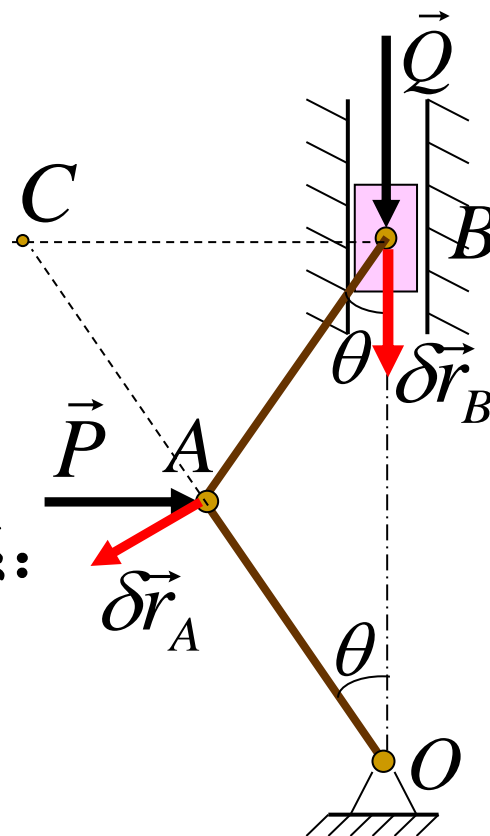
由于  $\delta r_A \neq 0$ ，于是得

$$P = 2Q \tan \theta$$

亦可由速度投影定理求虚位移之间的关系：

由速度投影定理  $v_B \cos \theta = v_A \sin 2\theta$

$$\frac{\delta r_B}{\delta r_A} = \frac{v_B}{v_A} = 2 \sin \theta$$



解2：解析法。建立如图坐标。

$$\text{因为 } x_A = l \sin \theta \quad y_B = 2l \cos \theta$$

对上两式作变分，得

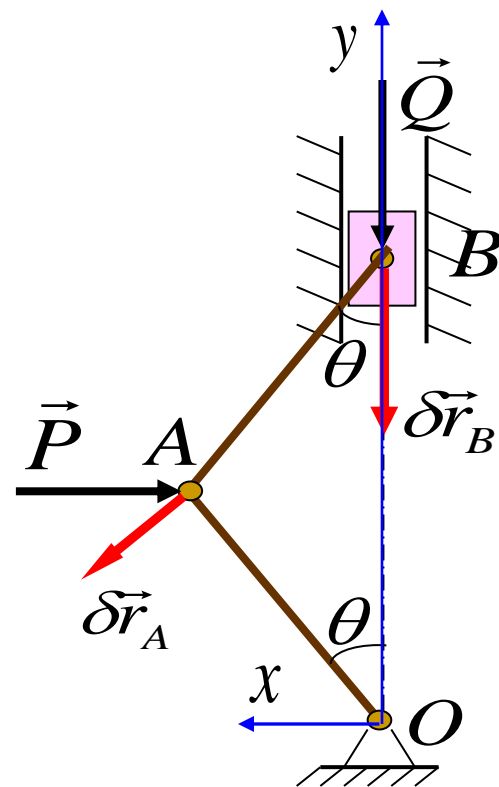
$$\delta x_A = l \cos \theta \delta \theta \quad \delta y_B = -2l \sin \theta \delta \theta$$

由  $\sum (F_{xi} \delta x_i + F_{yi} \delta y_i + F_{zi} \delta z_i) = 0$ ，得

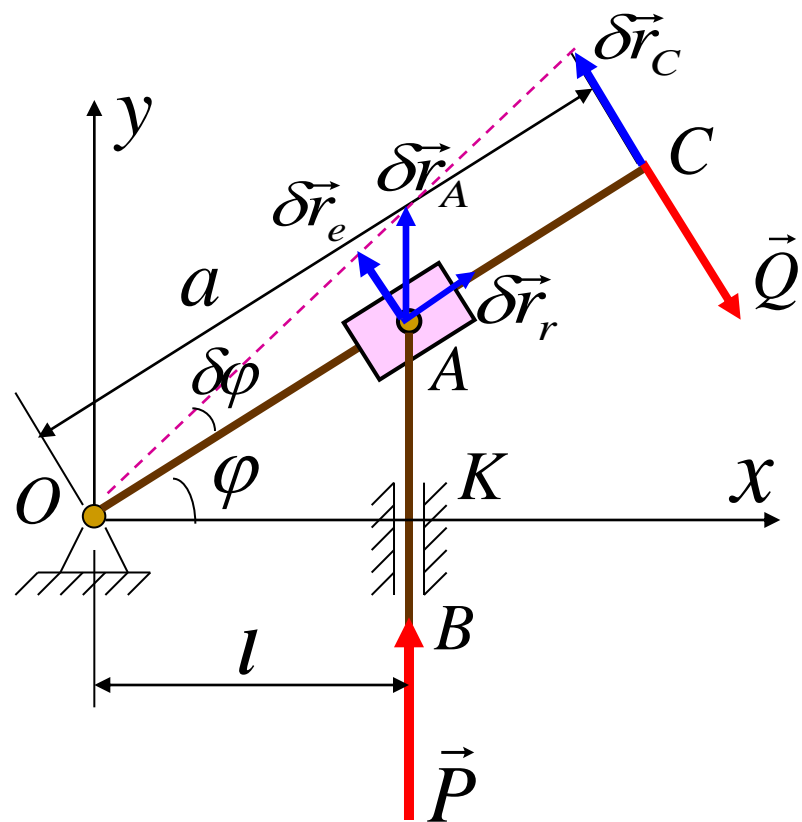
$$F_{Ax} \delta x_A + F_{By} \delta y_B = 0$$

$$\text{即 } (-P)l \cos \theta \delta \theta + (-Q)(-2l \sin \theta \delta \theta) = 0$$

$$\text{由于 } \delta \theta \neq 0, \text{ 于是得 } P = 2Q \tan \theta$$



[例4] 图示机构中，当曲柄 $OC$ 绕轴摆动时，滑块 $A$ 沿曲柄自由滑动，从而带动杆 $AB$ 在铅垂导槽 $K$ 内移动。已知 $OC=a$ ， $OK=l$ ，在 $C$ 点垂直于曲柄作用一力 $Q$ ，而在 $B$ 点沿 $BA$ 作用一力 $P$ 。求机构平衡时，力 $P$ 与 $Q$ 的关系。





解1: (几何法) 以系统为研究对象, 受的主动力有  $P$ 、 $Q$ 。给系统一组虚位移如图。

其中  $\delta \vec{r}_A = \delta \vec{r}_e + \delta \vec{r}_r$

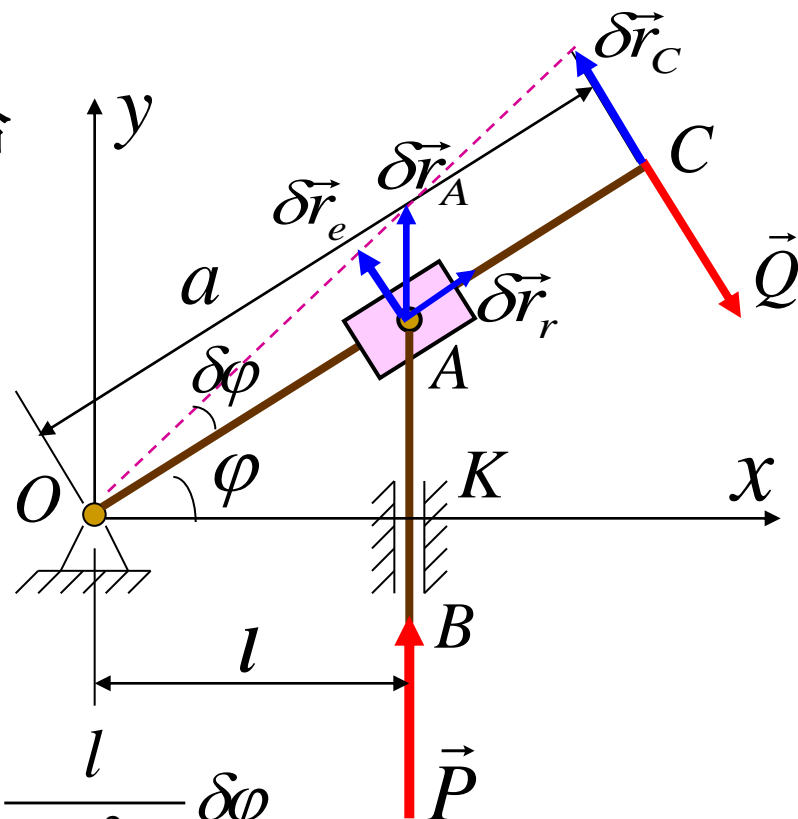
由虚位移原理  $\sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$ , 得

$$P \delta r_A - Q \delta r_C = 0$$

式中  $\delta r_C = a \delta \varphi$      $\delta r_A = \frac{\delta r_e}{\cos \varphi} = \frac{l}{\cos^2 \varphi} \delta \varphi$

故有  $P \frac{l}{\cos^2 \varphi} \delta \varphi - Q a \delta \varphi = 0$  由于  $\delta \varphi \neq 0$  于是得

$$Q = \frac{l}{a \cos^2 \varphi} P$$



解2 解析法:建立如图坐标。

主动力作用点的坐标及其变分为

$$y_A = l \tan \varphi \Rightarrow \delta y_A = \frac{l}{\cos^2 \varphi} \delta \varphi$$

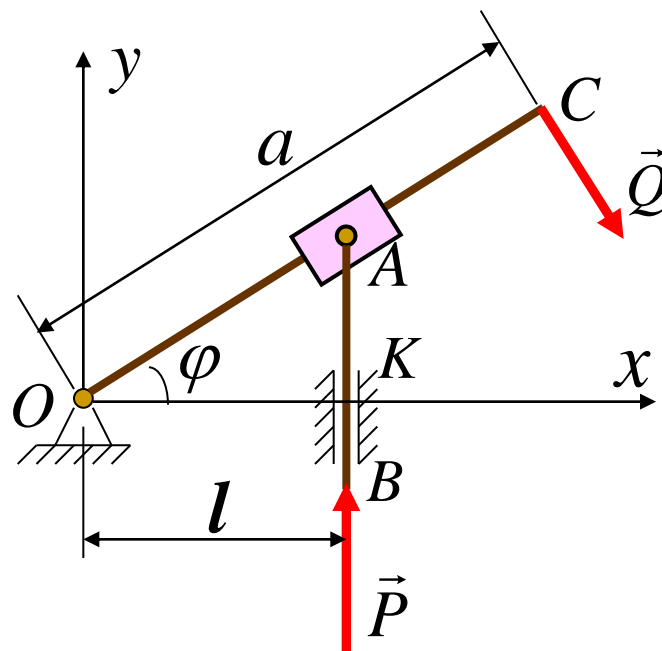
$$x_C = a \cos \varphi \Rightarrow \delta x_C = -a \sin \varphi \delta \varphi$$

$$y_C = a \sin \varphi \Rightarrow \delta y_C = a \cos \varphi \delta \varphi$$

主动力在坐标方向上的投影为

$$F_{Ay} = P \quad F_{Cx} = Q \sin \varphi \quad F_{Cy} = -Q \sin \varphi$$

$$\text{由 } \sum (F_{xi} \delta x_i + F_{yi} \delta y_i + F_{zi} \delta z_i) = 0$$



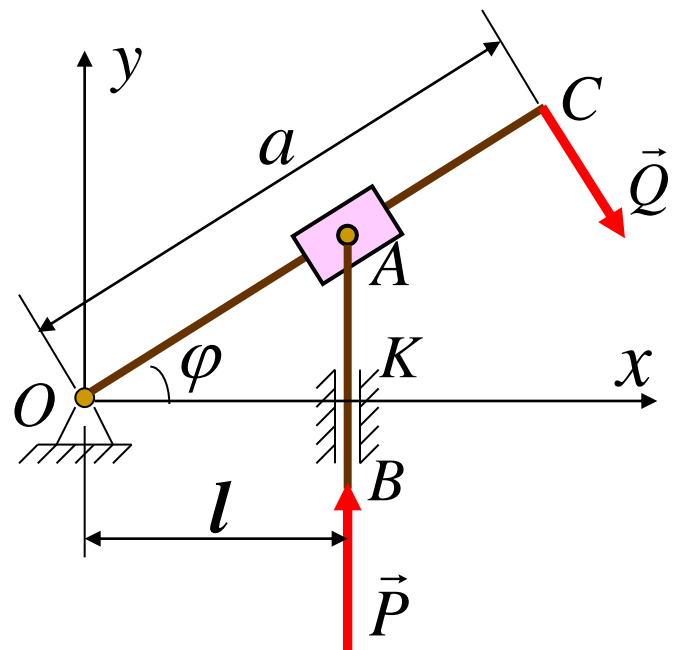
$$\text{即} \quad F_{Ay} \delta y_A + F_{Cx} \delta x_C + F_{Cy} \delta y_C = 0$$

$$\text{得} \quad P \frac{l}{\cos^2 \varphi} \delta \varphi + Q \sin \varphi (-a \sin \varphi \delta \varphi) + (-Q \cos \varphi) a \cos \varphi \delta \varphi = 0$$

$$\text{亦即} \quad P \frac{l}{\cos^2 \varphi} \delta \varphi - Q a \delta \varphi = 0$$

由于  $\delta \varphi \neq 0$  于是得

$$Q = \frac{l}{a \cos^2 \varphi} P$$



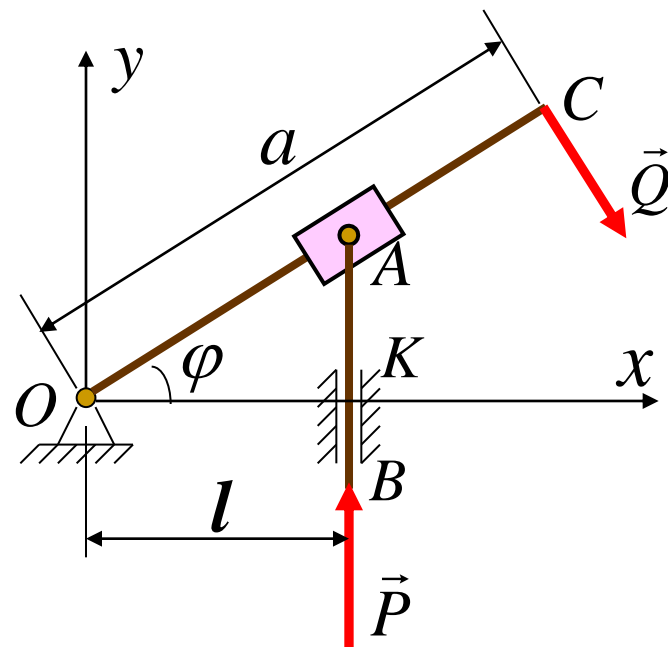
### 解3：综合法。

本题用解析法计算 $\vec{P}$ 力的虚功，用几何法计算 $\vec{Q}$ 力的虚功，此时虚功方程可以写为

$$F_{Ay} \delta y_A + \vec{Q} \cdot \delta \vec{r}_C = 0$$

将  $F_{Ay} = P$ ,  $y_A = l \tan \varphi$ ,  $\delta r_C = a \delta \varphi$

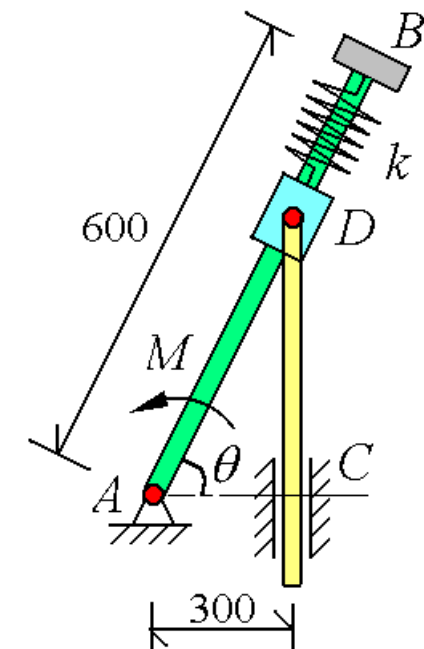
代入上式，得  $P \delta(l \tan \varphi) - Q \delta r_C = 0$



解析法中，广义坐标的增量总是取增大的方向。本例中 $\delta \varphi$ 取为增大的方向，即为逆时针转向。

即  $P \frac{l}{\cos^2 \varphi} \delta \varphi - Q a \delta \varphi = 0$  可得同样的结果。

[例5] 滑套 $D$ 套在光滑直杆 $AB$ 上，并带动杆 $CD$ 在铅直滑道上滑动。已知 $\theta=0^\circ$ 时，弹簧等于原长，弹簧刚度系数为 $5(\text{kN/m})$ ，求在任意位置（ $\theta$ 角）平衡时，加在 $AB$ 杆上的力偶矩 $M$ ？



解：这是一个已知系统平衡，求作用于系统上主动力之间关系的问题。**特别要指出的是，系统中若有弹簧，必须解除弹簧约束，将一对弹性力计入主动力**，系统简化为理想约束系统，才可以用虚位移原理求解。

设质点系内A、B之间有刚度系数为 $k$ ，原长为 $l_0$ 的弹簧连接。

解除弹簧约束，代之以一对弹性力。

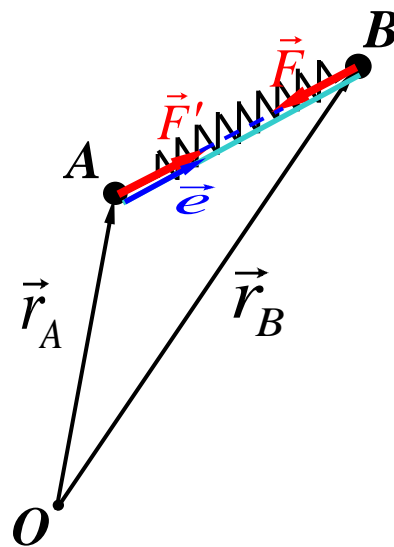
则弹性力分别为：

$$\vec{F}' = k(r_{AB} - l_0)\vec{e} \quad \vec{F} = -k(r_{AB} - l_0)\vec{e}$$

其中： $r_{AB}$ 为弹簧现长；

$\vec{e}$ 为由A指向B的单位矢量。

由固定点O向A、B作矢径，这  
一对弹性力的虚功之和记为 $\delta W_k$



$$\begin{aligned} \text{所以 } \delta W_k &= \vec{F}' \cdot \delta \vec{r}_A + \vec{F} \cdot \delta \vec{r}_B = -\vec{F} \cdot \delta \vec{r}_A + \vec{F} \cdot \delta \vec{r}_B \\ &= \vec{F} \cdot \delta(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}_{AB} \\ &= -k(r_{AB} - l_0)\vec{e} \cdot \delta(r_{AB}\vec{e}) \end{aligned}$$

$$= -k(r_{AB} - l_0)\delta r_{AB}$$

这时不要再考虑  
虚功 $\delta W_k$ 的正负。

选择 $AB$ 杆、 $CD$ 杆和滑套 $D$ 的系统为研究对象。

$$\theta = 0^\circ, l_0 = 600 - 300 = 300(\text{mm})$$

$$\theta \text{角时}, r_{BD} = 600 - \frac{300}{\cos \theta} < l_0, \quad \text{弹簧压缩, 受力见图。}$$

$$\delta r_{BD} = -0.3 \sec \theta \operatorname{tg} \theta \delta \theta < 0$$

表明 $BD$ 距离减小，弹性力作负功。

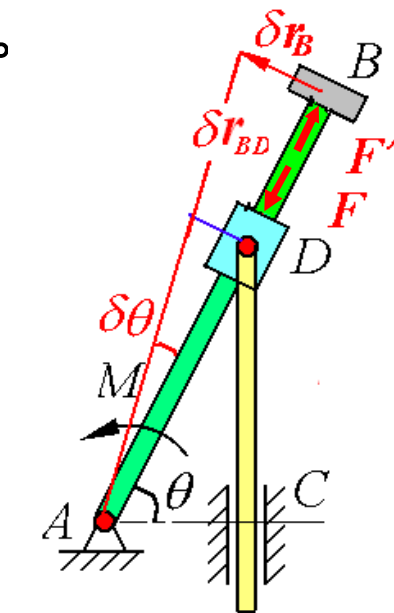
$$\text{弹性力的大小为 } F = k |r_{BD} - l_0| = 1.5(\sec \theta - 1)$$

$$\text{由虚位移原理: } M \delta \theta - |F \delta r_{BD}| = 0 \quad r_{BD} - l_0 = 0.3(1 - \sec \theta)$$

$$\text{所以 } M \delta \theta - 1.5(\sec \theta - 1)(0.3 \sec \theta \operatorname{tg} \theta \delta \theta) = 0$$

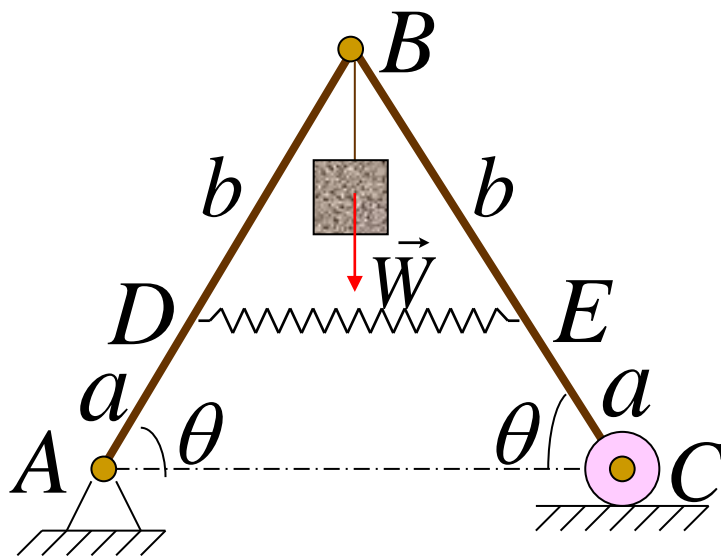
$$M = 0.45 \frac{\sin \theta (1 - \cos \theta)}{\cos^3 \theta} \quad (\text{kN} \cdot \text{m})$$

$$\begin{aligned} \text{或: 弹性力的虚功为 } \delta W_k &= -k(r_{BD} - l_0) \delta r_{BD} \\ &= -1.5(\sec \theta - 1)(0.3 \sec \theta \operatorname{tg} \theta \delta \theta) \end{aligned}$$



## 求系统的平衡位置

[例6] 图示平面机构，两杆长度相等。在 $B$ 点挂有重 $W$ 的重物。 $D$ 、 $E$ 两点用弹簧连接。已知弹簧原长为 $l$ ，弹性系数为 $k$ ，其它尺寸如图。不计各杆自重，求机构的平衡位置。





解：以系统为研究对象，解除弹簧约束，代之弹性力。建立如图的坐标。

系统受力有主动力  $\vec{W}$ ，以及非理想约束的弹性力  $\vec{F}$  和  $\vec{F}'$ ，将其视为主动力。弹簧现长为

$$r_{DE} = 2b \cos \theta$$

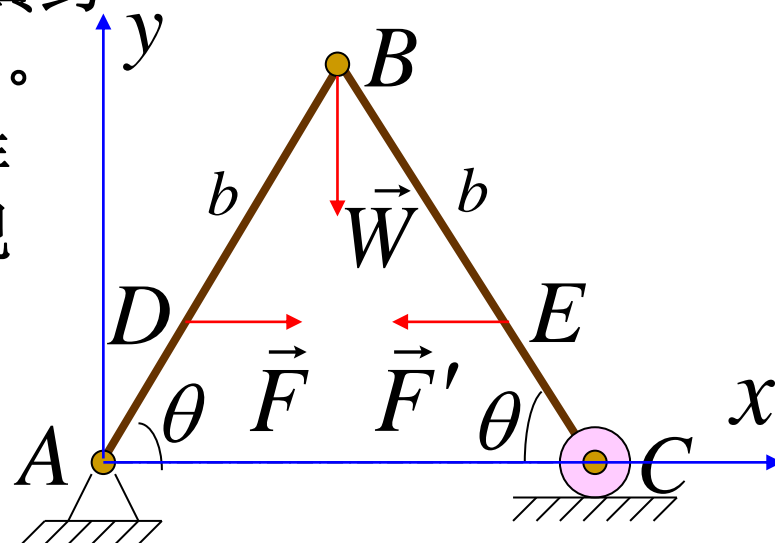
弹性力的大小为

$$F = k\delta = k|2b \cos \theta - l|$$

主动力作用点的坐标及其变分为

$$y_B = (a+b) \sin \theta \quad \text{变分} \quad \delta y_B = (a+b) \cos \theta \delta \theta$$

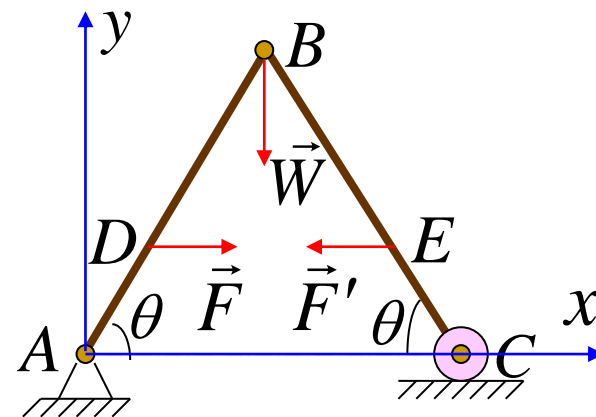
$$r_{DE} = 2b \cos \theta \quad \xrightarrow{\text{运算}} \quad \delta r_{DE} = -2b \sin \theta \delta \theta$$



由虚功方程得：

$$F_{By} \delta y_B + [-k(r_{DE} - l) \delta r_{DE}] = 0$$

$$\text{即 } (-W) \delta y_B + [-k(r_{DE} - l) \delta r_{DE}] = 0$$



代入  $\delta y_B = (a+b) \cos \theta \delta \theta$      $\delta r_{DE} = -2b \sin \theta \delta \theta$  得

$$-W(a+b) \cos \theta \delta \theta + k(2b \cos \theta - l) \cdot 2b \sin \theta \delta \theta = 0$$

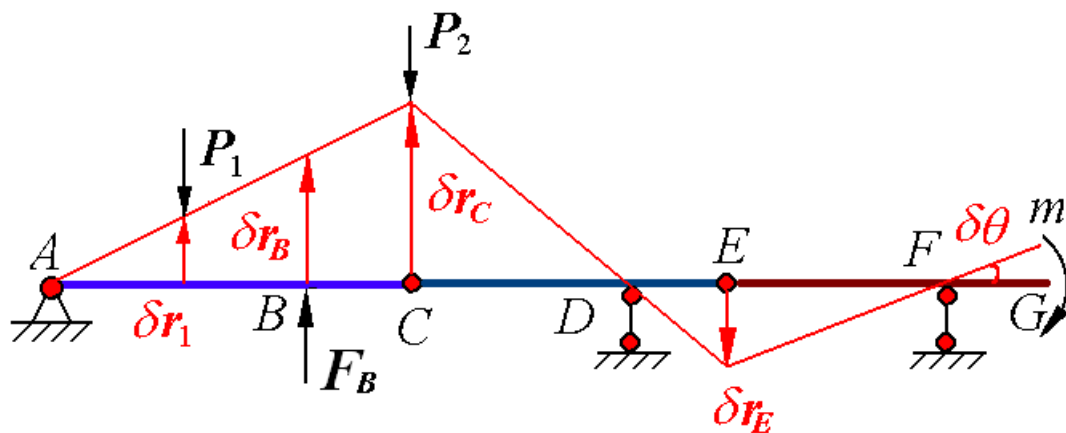
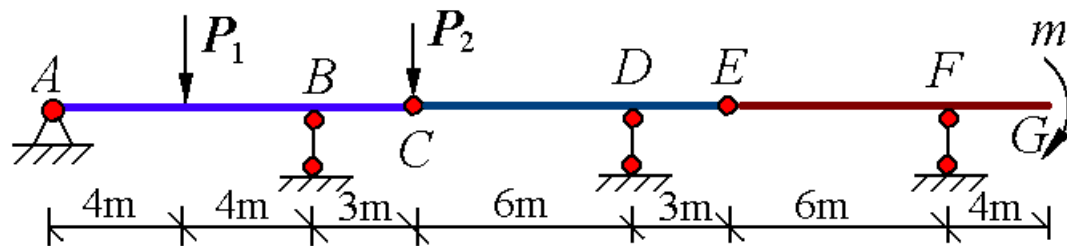
因  $\delta \theta \neq 0$ ，故

$$\tan \theta = \frac{W(a+b)}{2kb(2b \cos \theta - l)}$$

# 求静定结构的约束力

[例7] 多跨静定梁，  
求支座B处约束力。

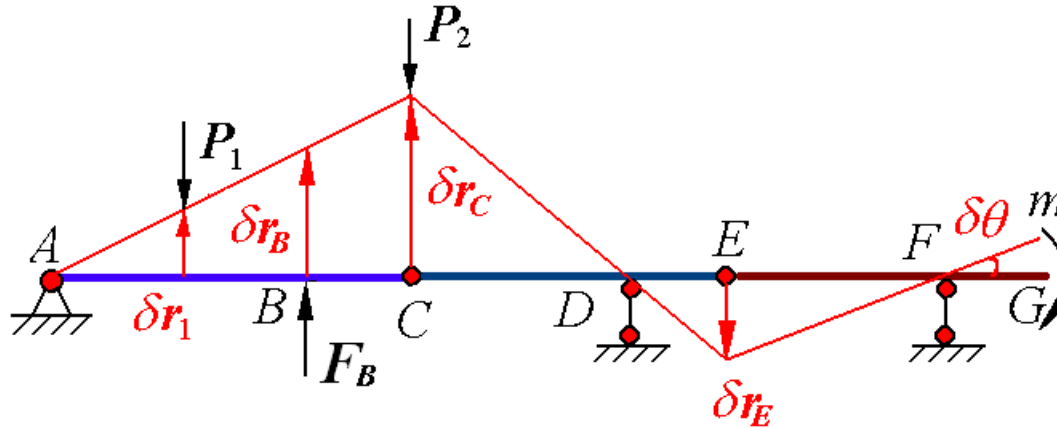
解1：静定结构必须要解除约束才可能有虚位移。将支座B去掉，代入相应的约束力 $F_B$ ，并使结构发生图示虚位移。



$$-P_1\delta r_1 + F_B\delta r_B - P_2\delta r_C - m\delta\theta = 0$$

$$\therefore F_B = P_1 \frac{\delta r_1}{\delta r_B} + P_2 \frac{\delta r_C}{\delta r_B} + m \frac{\delta\theta}{\delta r_B}$$

$$\therefore F_B = P_1 \frac{\delta r_1}{\delta r_B} + P_2 \frac{\delta r_C}{\delta r_B} + m \frac{\delta \theta}{\delta r_B}$$



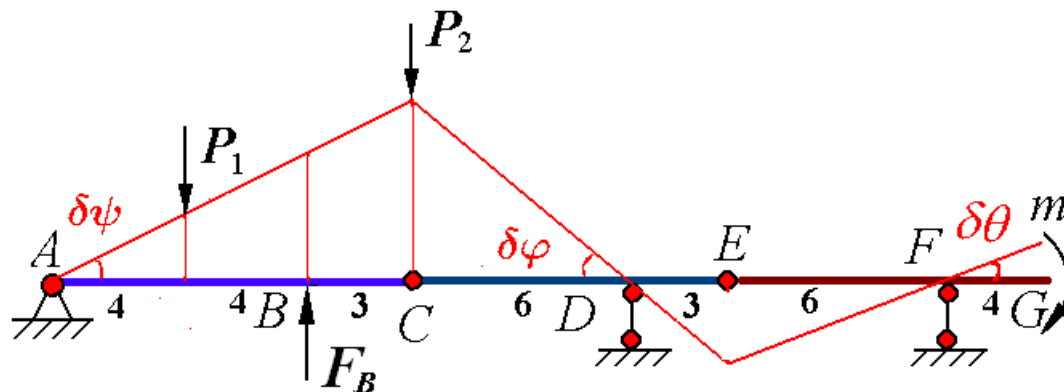
而

$$\frac{\delta r_1}{\delta r_B} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\delta r_C}{\delta r_B} = \frac{11}{8},$$

$$\frac{\delta \theta}{\delta r_B} = \frac{\delta r_G}{4} \cdot \frac{1}{\delta r_B} = \frac{\delta r_E}{6} \cdot \frac{1}{\delta r_B} = \frac{\delta r_C}{12} \cdot \frac{1}{\delta r_B} = \frac{1}{12} \times \frac{11}{8} = \frac{11}{96}$$

$$\therefore F_B = \frac{1}{2} P_1 + \frac{11}{8} P_2 + \frac{11}{96} m$$

解2：结构发生图示虚位移。将各刚体上的力系的向本刚体上不动的点简化，由简化理论及虚位移原理可得：



$$[\Sigma M_A(F)]_{AC} \delta\psi - m\delta\theta = 0$$

$$(8F_B - 4P_1 - 11P_2)\delta\psi - m\delta\theta = 0$$

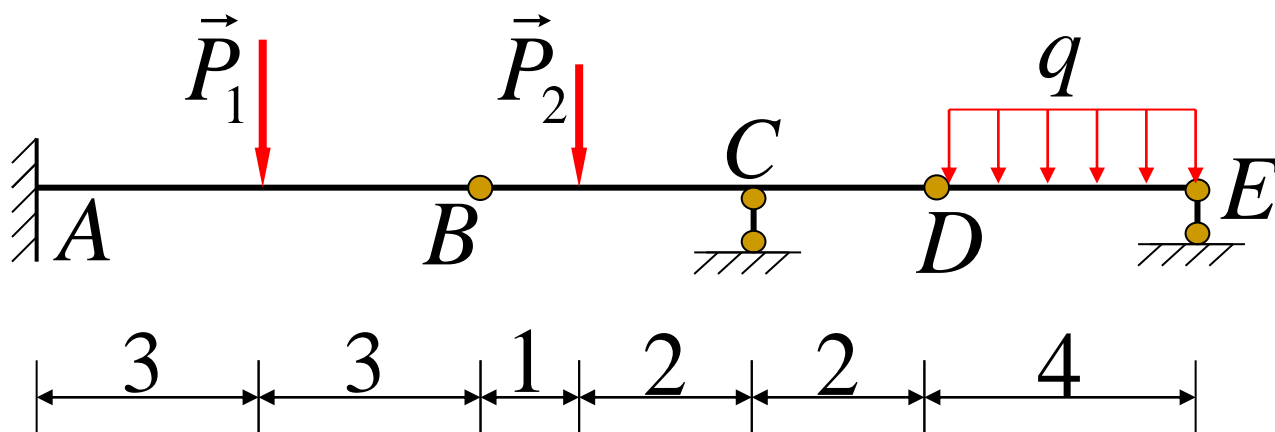
由几何关系得：  $11\delta\psi = 6\delta\varphi$ ,  $3\delta\varphi = 6\delta\theta$

所以  $11\delta\psi = 6\delta\varphi = 12\delta\theta$

代入虚功方程可得同样的结果。

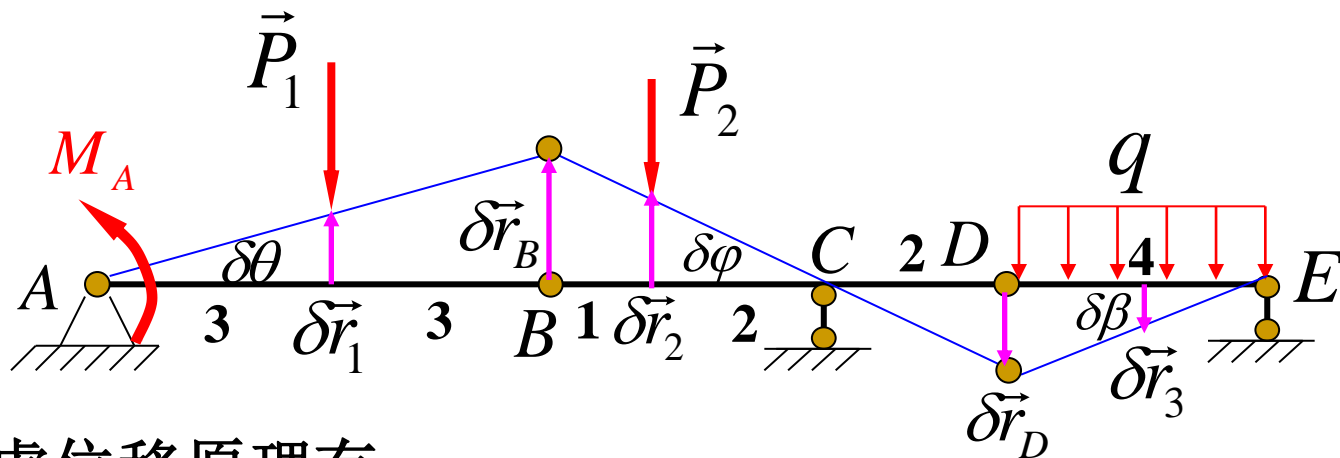
[例8] 图示多跨静定梁，试求A端处约束力偶及铅垂约束力。

已知：  $P_1=80\text{kN}$ ，  $P_2=60\text{kN}$ ，  $q=10\text{kN/m}$ 。长度单位为m。



解：（1）求A端约束力偶

以梁为研究对象，解除A处限制转动的约束，代之以相应的约束力偶矩  $M_A$ ，并视为主动力。给系统一组虚位移，如图所示。



由虚位移原理有

$$[\Sigma M_A(F)]_{AB} \delta\theta + [\Sigma M_C(F)]_{BD} \delta\varphi + [\Sigma M_E(F)]_{DE} \delta\beta = 0$$

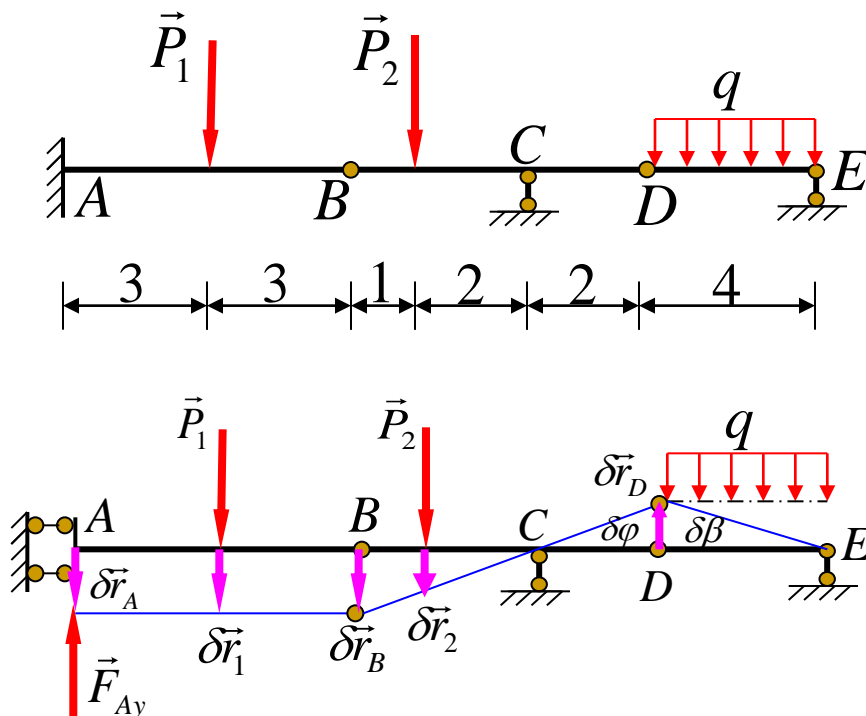
$$(M_A - 3P_1)\delta\theta + (-2P_2)\delta\varphi + \left(\frac{q}{2} \cdot 4^2\right)\delta\beta = 0$$

由几何关系得：  $6\delta\theta = 3\delta\varphi, \quad 2\delta\varphi = 4\delta\beta$

所以  $(M_A - 3P_1)\left(\frac{\delta\varphi}{2}\right) + (-2P_2)\delta\varphi + \left(\frac{q}{2} \cdot 4^2\right)\left(\frac{\delta\varphi}{2}\right) = 0$

$\because \delta\varphi \neq 0$  故有  $M_A = 3P_1 + 4P_2 - 8q = 400\text{kN}\cdot\text{m}$

(2) 求A处铅垂约束力  
解除A处铅垂的约束，代之以相应的约束反力 $F_{Ay}$ ，并视为主动力。给系统一组虚位移，如图所示。



由虚位移原理有

$$[\Sigma F_y]_{AB}(-\delta r_A) + [\Sigma M_C(F)]_{BD}\delta\varphi + [\Sigma M_E(F)]_{DE}\delta\beta = 0$$

由几何关系得:  $\delta r_A = 3\delta\varphi$ ,  $2\delta\varphi = 4\delta\beta$



$$[\Sigma F_y]_{AB}(-\delta r_A) + [\Sigma M_C(F)]_{BD} \delta\varphi + [\Sigma M_E(F)]_{DE} \delta\beta = 0$$

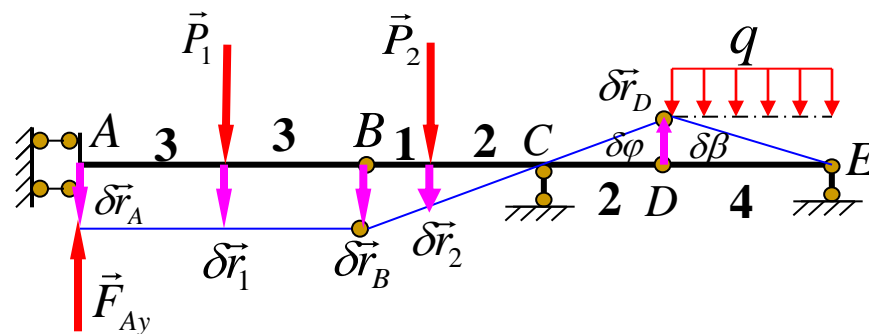
$$\delta r_A = 3\delta\varphi, \quad 2\delta\varphi = 4\delta\beta$$

所以，虚功方程为

$$(F_{Ay} - P_1)(-3\delta\varphi) + (2P_2)\delta\varphi + \left(-\frac{q}{2} \cdot 4^2\right)\left(\frac{\delta\varphi}{2}\right) = 0$$

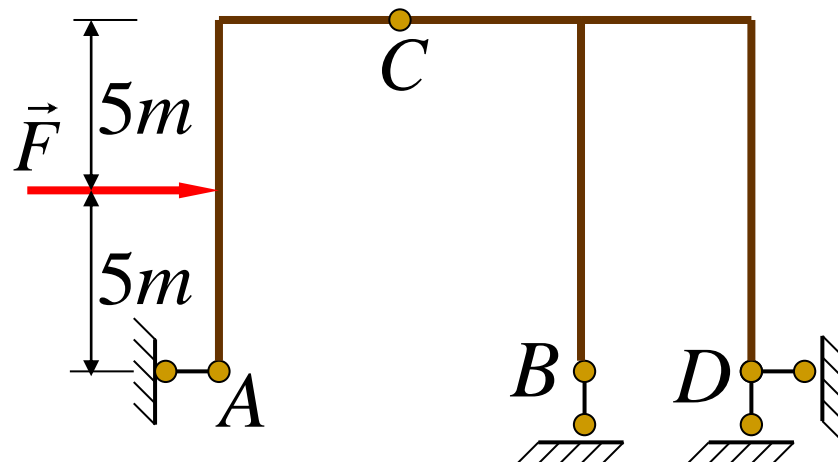
$$\text{于是有} \quad (F_{Ay} - P_1 - \frac{2}{3}P_2 + \frac{4}{3}q)\delta\varphi = 0$$

$$\because \delta\varphi \neq 0 \quad \text{故有} \quad F_{Ay} = P_1 + \frac{2}{3}P_2 - \frac{4}{3}q = 106.7\text{kN}$$



[例9] 求图示静定刚架支座D处的水平约束力。

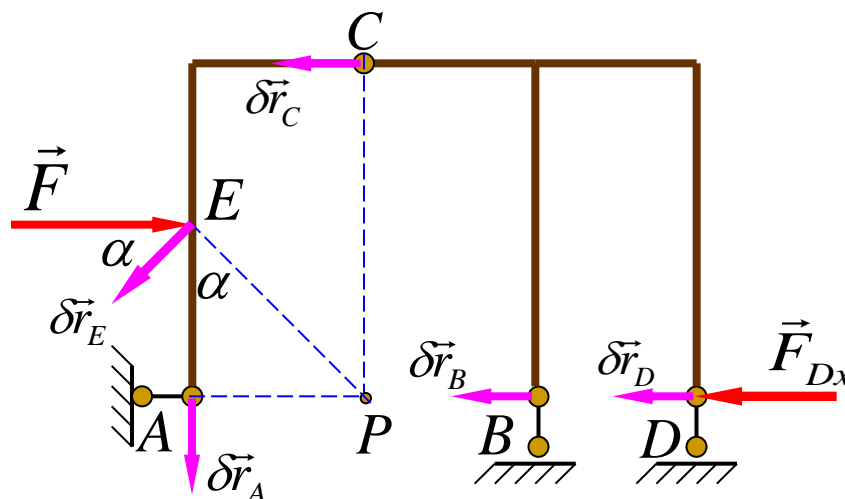
解：以刚架为研究对象，解除D处的水平约束，代之以相应的约束力 $F_{Dx}$ ，并视为主动力。给系统一组虚位移，如图所示。



由虚位移原理有

$$F_{Dx} \delta r_D - F \delta r_E \cos \alpha = 0$$

由运动学关系  $\delta r_D = \delta r_C$



$$\frac{\delta r_C}{PC} = \frac{\delta r_E}{PE}$$

$$\delta r_E = \frac{PE}{PC} \delta r_C = \frac{PE}{PC} \delta r_D$$

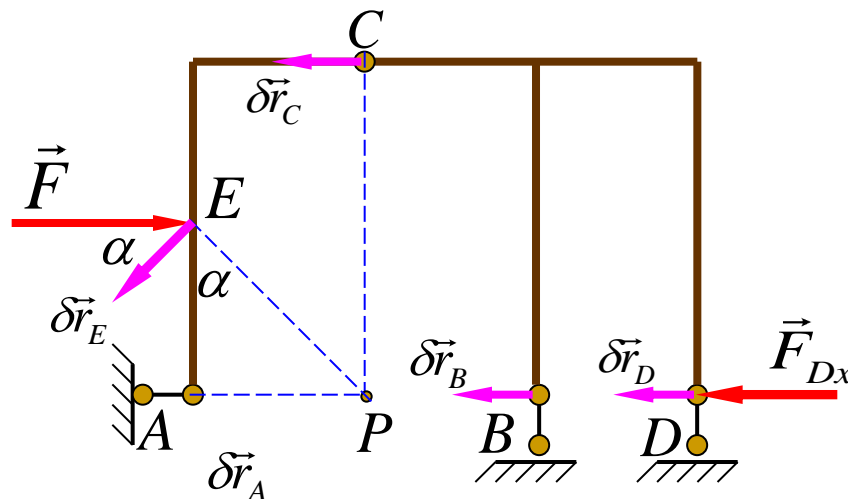
代入虚功方程

$$F_{Dx} \delta r_D - F \delta r_E \cos \alpha = 0$$

于是有  $(F_{Dx} - F \frac{PE}{PC} \cos \alpha) \delta r_D = 0$

$\because \delta r_D \neq 0$  且  $PE \cos \alpha = AE$  故  $F_{Dx} - F \frac{AE}{PC} = 0$

于是支座D的水平约束力为  $F_{Dx} = \frac{1}{2} F$



## 求桁架杆件及合结构的轴力

[例10] 求图示桁架杆1和杆2的轴力。

解：以桁架为研究对象，解除1杆的约束，代之以相应的约束力，并视为主动力。给系统一组虚位移，如图所示。由虚位移原理有：

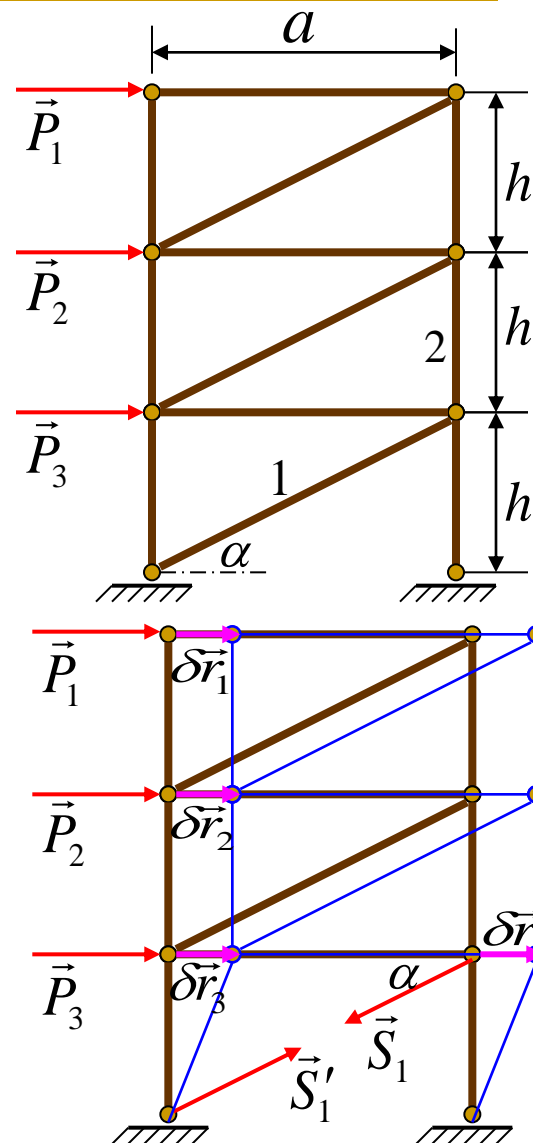
$$P_1 \delta r_1 + P_2 \delta r_2 + P_3 \delta r_3 - S_1 \cos \alpha \delta r = 0$$

由几何关系得  $\delta r_1 = \delta r_2 = \delta r_3 = \delta r$

$$\therefore (P_1 + P_2 + P_3 - S_1 \cos \alpha) \delta r = 0$$

$\because \delta r \neq 0$  于是得

$$S_1 = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{a} (P_1 + P_2 + P_3)$$



解除2杆的约束，代之以相应的约束力，并视为主动力。给系统一组虚位移，如图所示。

由虚位移原理有

$$P_1 \delta r_1 + P_2 \delta r_2 + S_2 \cos \alpha \delta r = 0$$

由几何关系得

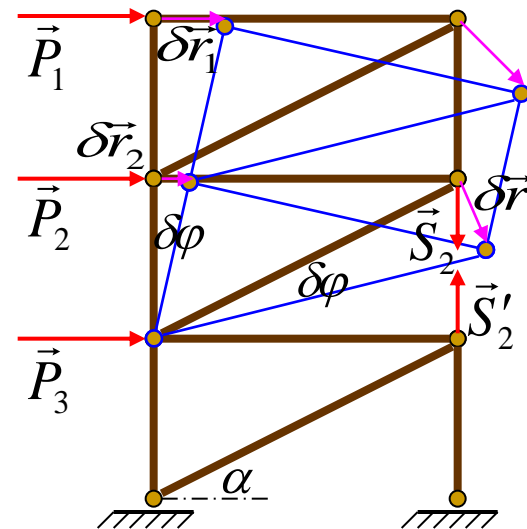
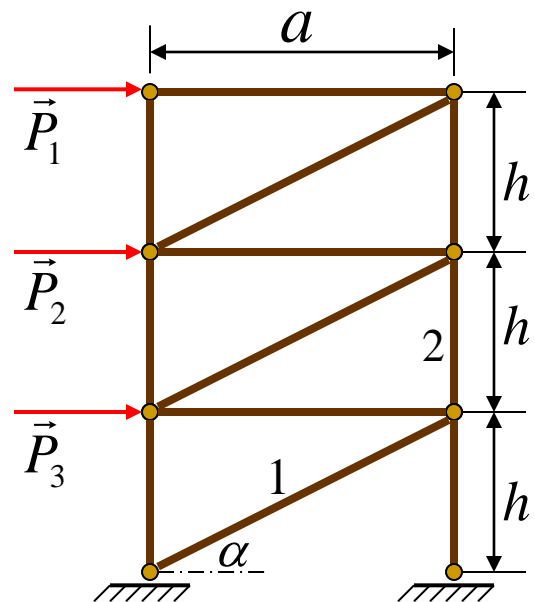
$$\delta r_1 = 2h \delta \varphi \quad \delta r_2 = h \delta \varphi$$

$$\delta r = \sqrt{h^2 + a^2} \delta \varphi \quad \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{h^2 + a^2}}$$

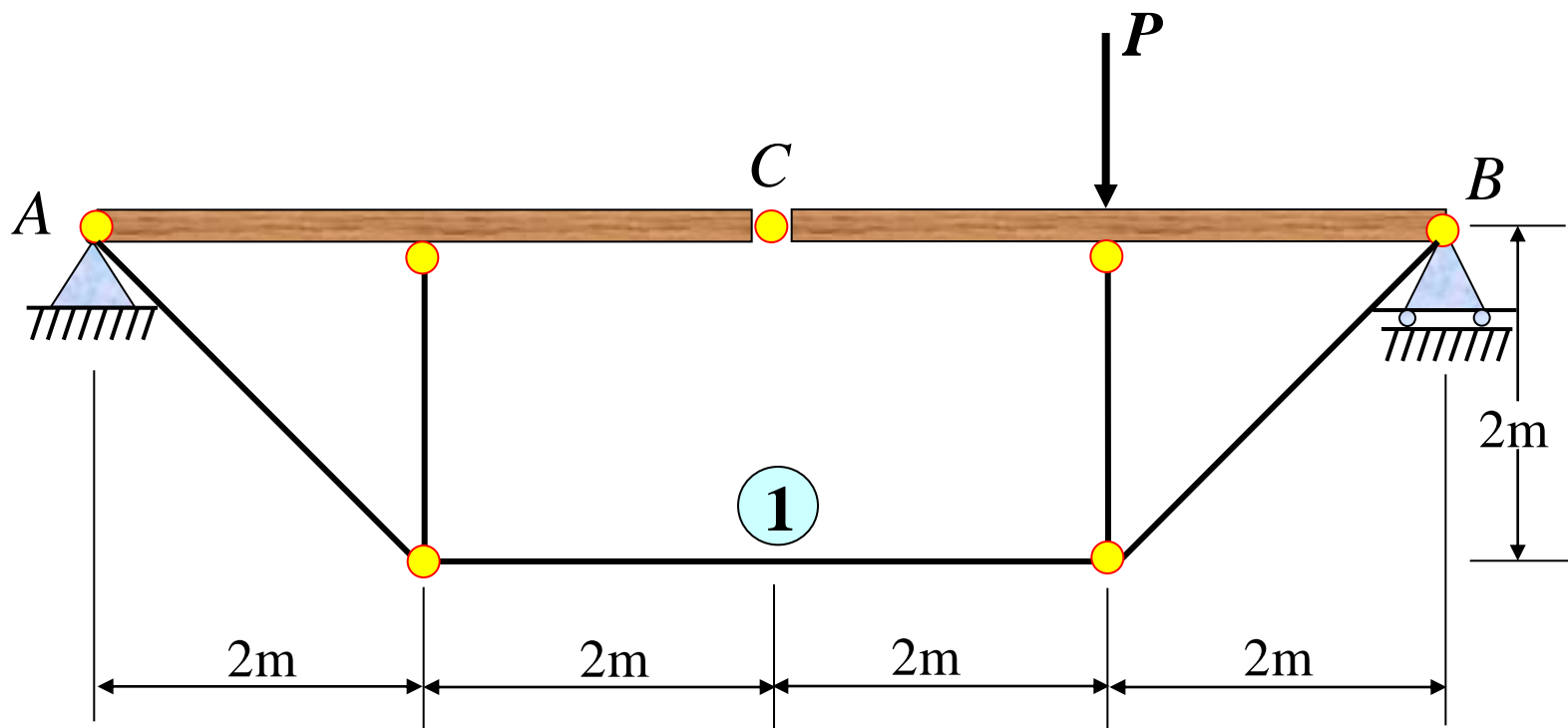
$$\therefore (2P_1 h + P_2 h + S_2 a) \delta \varphi = 0$$

$\because \delta \varphi \neq 0$  于是得

$$S_2 = -\frac{(2P_1 + P_2)h}{a}$$

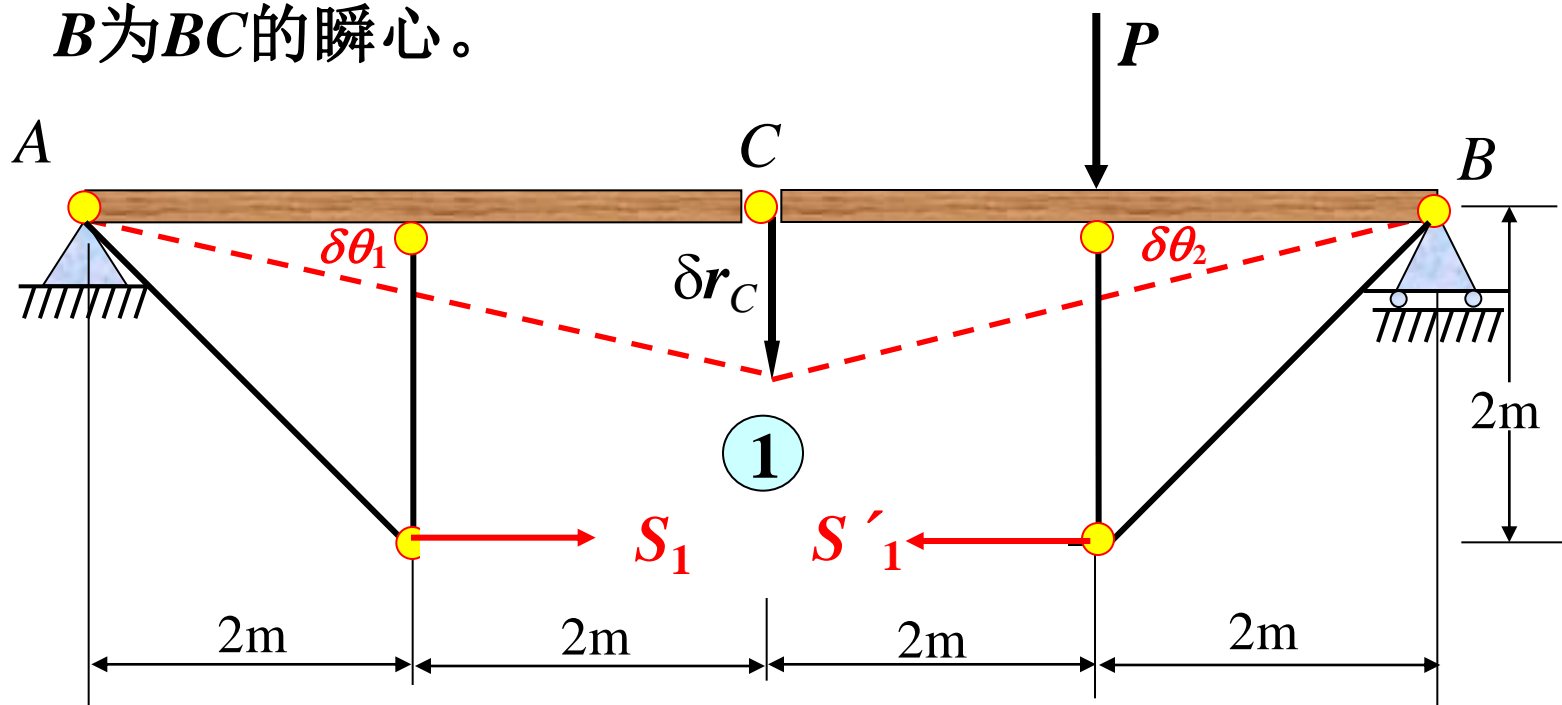


[例11] 组合构架如图所示。已知 $P=10\text{KN}$ ，不计构件自重，求1杆的内力。



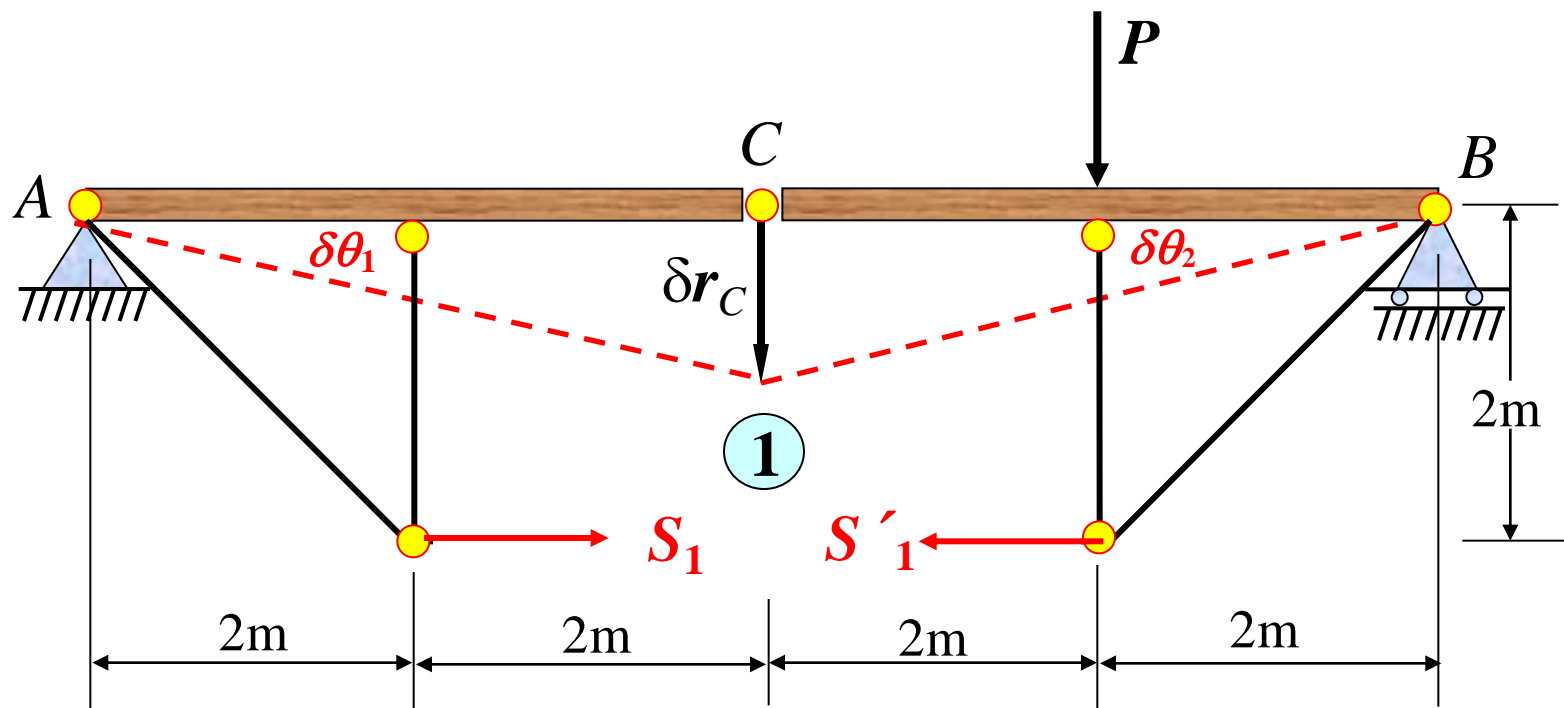
解:截断1杆代之内力 $S_1$ 和 $S'_1$ 且 $S_1 = S'_1 = S$ , 画虚位移图。

$B$ 为 $BC$ 的瞬心。



利用虚位移图得:

$$\delta r_C = (AC)\delta\theta_1 = (BC)\delta\theta_2 \quad \therefore \delta\theta_1 = \delta\theta_2 = \delta\theta$$



由虚位移原理得:

$$[\Sigma M_A(F)]_{AC} \delta\theta_1 + [\Sigma M_B(F)]_{BC} \delta\theta_2 = 0$$

即 
$$(-2S)\delta\theta_1 + (2P - 2S)\delta\theta_2 = 0$$

$$\therefore S = \frac{P}{2} = 5 \text{ kN}$$



## 应用虚位移原理求解质点系平衡问题的步骤和要点：

### 1. 正确选取研究对象；

以不解除约束的理想约束系统为研究对象，系统至少有一个自由度。若系统存在非理想约束，如弹簧力、摩擦力等，可把它们计入主动力，则系统又是理想约束系统，可选为研究对象。

若要求解约束力，需解除相应的约束，代之以约束力，并计入主动力。应逐步解除约束，每一次研究对象只解除一个约束，将一个约束力计入主动力，增加一个自由度。

## 2. 正确进行受力分析;

画出主动力的受力图，包括计入主动力的弹簧力、摩擦力和待求的约束力。

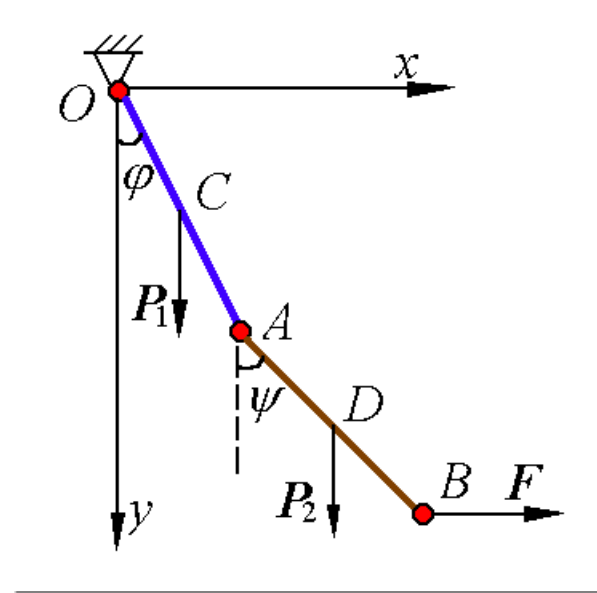
## 3. 正确进行虚位移分析，确定虚位移之间的关系;

## 4. 应用虚位移原理建立方程;

## 5. 解虚功方程求出未知数。

[例12] 均质杆 $OA$ 及 $AB$ 在 $A$ 点用铰连接，并在 $O$ 点用铰支承，如图所示。两杆各长 $2a$ 和 $2b$ ，各重 $P_1$ 及 $P_2$ ，设在 $B$ 点加水平力 $F$ 以维持平衡，求两杆与铅直线所成的角 $\varphi$ 及 $\psi$ 。

解：这是一个具有两个自由度的系统，取角 $\varphi$ 及 $\psi$ 为广义坐标，现用两种方法求解。



解法一：

应用虚位移原理，

$$P_1 \delta y_C + P_2 \delta y_D + F \delta x_B = 0 \quad (a)$$

而  $y_C = a \cos \varphi$  ,  $\delta y_C = -a \sin \varphi \delta \varphi$

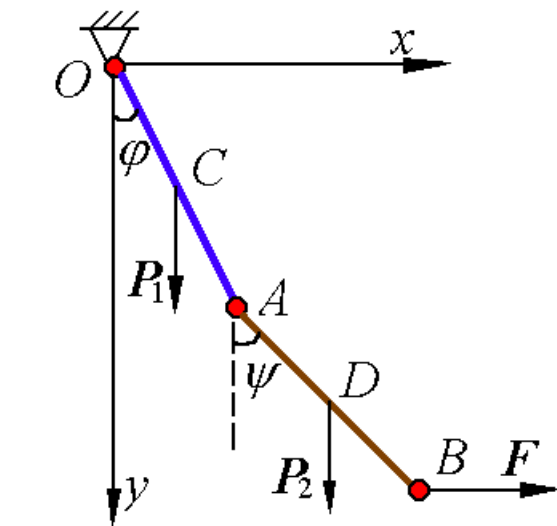
$$y_D = 2a \cos \varphi + b \cos \psi ,$$

$$\delta y_D = -2a \sin \varphi \delta \varphi - b \sin \psi \delta \psi$$

$$x_B = 2a \sin \varphi + 2b \sin \psi , \quad \delta x_B = 2a \cos \varphi \delta \varphi + 2b \cos \psi \delta \psi$$

代入(a)式，得：

$$(-P_1 a \sin \varphi - P_2 2a \sin \varphi + F 2a \cos \varphi) \delta \varphi + (-P_2 b \sin \psi + F 2b \cos \psi) \delta \psi = 0$$



$$(-P_1 a \sin \varphi - P_2 2a \sin \varphi + F 2a \cos \varphi) \delta \varphi + (-P_2 b \sin \psi + F 2b \cos \psi) \delta \psi = 0$$

由于 $\delta \varphi$ ,  $\delta \psi$  是彼此独立的, 所以:

$$-P_1 \cdot a \sin \varphi - P_2 \cdot 2a \sin \varphi + F \cdot 2a \cos \varphi = 0$$

$$-P_2 \cdot b \sin \psi + F \cdot 2b \cos \psi = 0$$

由此解得:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2F}{P_1 + 2P_2}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{2F}{P_2}$$

解法二：

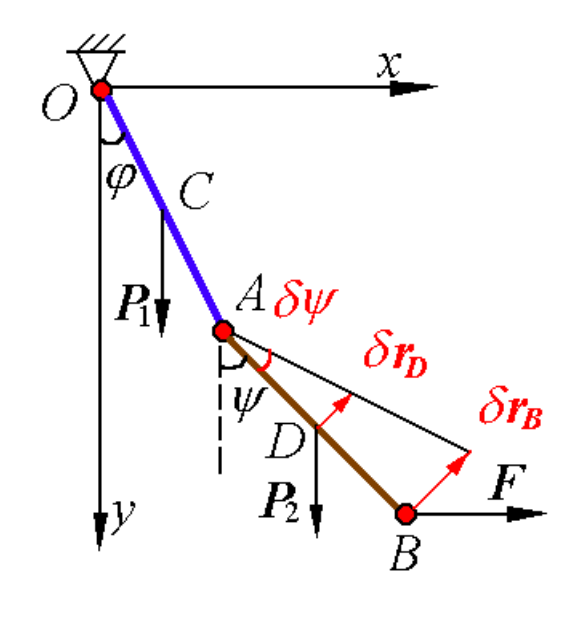
先使  $\varphi$  保持不变，而使  $\psi$  获得变分  $\delta\psi$ ，得到系统的一组虚位移，如图所示。

$$F\delta r_B \cos \psi - P_2\delta r_D \sin \psi = 0$$

$$\text{而 } \delta r_B = 2b\delta\psi, \quad \delta r_D = b\delta\psi$$

代入上式，得

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{F \cdot 2b\delta\psi}{P_2 \cdot b\delta\psi} = \frac{2F}{P_2}$$



再使 $\psi$ 保持不变，而使 $\varphi$ 获得变分 $\delta\varphi$ ，得到系统的另一组虚位移，如图所示。

图示中： $\delta\vec{r}_A = \delta\vec{r}_D = \delta\vec{r}_B$

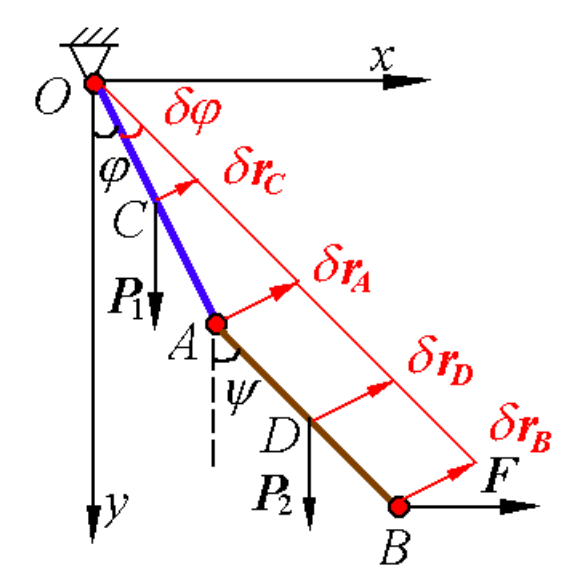
$$F\delta r_B \cos\varphi - P_1\delta r_C \sin\varphi - P_2\delta r_D \sin\varphi = 0$$

而  $\delta r_C = a\delta\varphi$  ,  
 $\delta r_B = \delta r_D = \delta r_A = 2a\delta\varphi$

代入上式后，得：

$$(F\cos\varphi \cdot 2a - P_1 \cdot a\sin\varphi - P_2 \cdot 2a\sin\varphi)\delta\varphi = 0$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2F}{P_1 + 2P_2}$$



# 第十四章结束

